V. V. Mišković

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ OPŠTE ASTRONOMIJE

Plan sklapanja prvog dela ("Naučna knjiga", Beograd, 1956) i rukopisa drugog dela u jednu knjigu

4. Zakon opšte gravitacije
5. Tačan oblik III Keplerova zakona
6. Keplerova jednačina
7. Rešavanje Keplerove jednačine
8. Razvijanje E, v, w i r u redove
9. Osnovne jednačine kretanja po paraboli

VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje
1. Sunčevo prividno kretanje
2. Oblik i dimenzije Sunčeve prividne putanje
3. Sunčeva prividna godišnja putanja na nebeskoj sferi
4. Pojedinosti Sunčeva prividnog dnevnog kretanja
5. Nejednakosti trajanja obdanica i obnoćnica
6. Trajanja sumraka

(ova poglavlja IV, V i VI složiti iz rukopisa, str. 5 - 27. Dalje se slaže iz štampanog prvog izdanja, nepromenjeno, str. 17 - 33 :)

Z A D A C I

I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126

(Zatim se nastavlja, sa početkom na novoj strani, iz rukopisa, str. 29 - 50 :)

IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187
VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje: 188 - 262

R E Š E N J A

(Posle str. 50 rukopisa prelazi se na štampano prvo izdanje, počevši sa njegovom stranom 37, i slaže iz njega zaključno sa stranom 150)

I. Sferna trigonometrija: 1 - 33
II. Zemlja kao nebesko telo: 34 - 75
III. Prividno dnevno kretanje nebeske sfere: 76 - 126

(Zatim se, s početkom na novoj strani, nastavlja iz rukopisa, str. 51 - 173, do kraja :)

IV. Astronomska refrakcija: 127 - 150
V. Elementi teorije kretanja planeta i kometa: 151 - 187
VI. Sunčevo prividno godišnje kretanje: 188 - 262

(potom se iz priloga rukopisa slažu)

T A B L I C E

I. Vrednosti srednje refrakcije
II. Približna rešenja Keplerove jednačine

S a d r ž a j

- - - - - - - - -

Celu zbirku zadataka složiti, koliko god je to tehnički moguće, kao štampano prvo izdanje prvog dela iz 1956. g.

- - - - - -

S L I K E

Slike 1 - 6 nepromenjene iz štampanog prvog dela Zbirke;
Slike 7 - 23 nove za kliširanje po priloženim crtežima;
Slike 24 - 89 nepromenjene iz štampanog prvog dela Zbirke, gde su numerisane brojevima 7 - 72;
Slike 90 - 151 nove za kliširanje po priloženim crtežima.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

В. В. МИШКОВИЋ

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА
ИЗ
ОПШТЕ АСТРОНОМИЈЕ

ПРВИ ДЕО

Научна књига

БЕОГРАД, 1956

Актом Комисије за уџбенике Универзитета у Београду бр. 896 од 10-VII-56 достављамо да се штампа као сталан уџбеник за студенте Пиродно-математичког факултета.

Тираж: 2000 примерака

Штампа Графичко предузеће „Академија", Београд, Космајска ул. 28, Тел. 24-701

ПРЕДГОВОР

Ова збирка задатака намењена је слушаоцима Опште астрономије. У њој се налазе сабрани, углавном, задаци који су били давани у току последњих десет година на вежбама или писменим испитима из овог предмета. Потреба да се Збирка штампа, и поред тога што су то све на вежбама рађени задаци, осетила се нарочито откако се на Општу астрономију почео уписивати знатно већи број слушалаца него раније. Од њих је и потекла идеја да се збирка изда.

Но још једна околност је допринела томе. То је што, док уџбеника Опште астрономије има у довољном броју, на свим европским језицима, за све потребе и разне укусе, — Збирки израђених задатака нема ни у тим литературама на избор, шта више оне се тешко данас и у иностранству налазе. Стога сам сматрао да ће оваква Збирка бити од користи за наставу Астрономије код нас. И спремио сам је за штампу.

При распореду материје држао сам се, углавном, прописаног програма за Општу астрономију. Он отступа од класичног утолико што поглављу о Земљи као небеском телу поклања нешто више места него што је то уобичајено у Општој астрономији, што се и у Збирци примењује. А оправдање за то треба тражити у чињеници што се Астрономија, као научна дисциплина, код нас тек на Универзитету почиње предавати. Из наставног плана за средњу школу она је, пре пет година, уклоњена. Тачније речено убачена је, и поред свих својих обележја егзактне науке, у оквир једне чисто дескриптивно-наративне дисциплине — Географије; дисциплине за чију наставу у средњој школи исти план резервише — седам од укупно осам година.

Човеку се пред том чињеницом скоро неодољиво намеће питање: чиме се правда и како објашњава да је за савлађивање географије само малене Југославије потребно — три пуне године, када се географија огромног Совјетског савеза, заједно још са географијом целога света, у совјетским средњим школама, савлађује за свега — четири године?! Зар се није могло, и никако још не може, рецимо, једна бар од тих седам година Астрономији посветити, као што то одавна већ раде остале културне земље?! То би и за Географију и за Астрономију — корисније било.

О тој околности морало је бити вођено рачуна и при састављању ове Збирка. Због тога она и излази — са решењима задатака. Због тога је и распон поступности сваког од њених поглавља приметно већи него што би то морало бити. Другим речима, због тога је уношен, у

свако њено поглавље, известан број и сасвим елементарних задатака, — да би се лакше и брже попуниле празнине у предспреми оних којима је Збирка намењена.

Нарочита пажња обраћена је на нумеричку страну решавања, јер се ова у нашим школама не само не негује и занемарује, већ, шта више, потцењује. У томе делу рада, код сваког задатка, доследно су примењивана два основна правила нумеричког рада. Прво је да се нумерички рад не предузима без претходно припремљене схеме. Друго је да се резултат ни најједноставнијег нумеричког рада не може сматрати тачним док се не провери! Код примене овог другог правила треба имати и то у виду да, у извесним случајевима, мора онај ко решава задатак — сâм потражити и образац, или начин, којим ће или како моћи проверити тачност добивених резултата. А желео бих, поводом ових правила, још и то да подвучем, да се оба тичу самог нумеричког рада, без обзира на технику и средства којим се он изводи. Другим речима, и схема за рад и контрола рада подједнако су безусловно потребни: и код ментално-ручног, и код машинско-ручног, и код машинско-аутоматског, па и код електронског начина.

Рачунске операције извођене су средствима приступачним онима којима је Збирка намењена. За логаритме су коришћене таблице са пет децимала, али оне са вредностима свих шест гониометриских функција, јер се и у нумеричком раду свих шест користе. Изузетно су само коришћени, у два или три случаја свега, и логаритми са седам децимала. Ово је чињено само када је: или број вредносних цифара то изискивао, да би се резултат добио са потребном тачношћу, — или требало да се покаже разлика у степену тачности резултата добивених помоћу логаритама са пет, односно седам децимала. Доследно је, у рачунском раду, спровођено још једно правило, на које се мало ко код нас обазире: правило да се непознати угао одређује само — помоћу тангенса или котангенса. Због овога је чак, каткада, добивено решење задатка трансформисано, како би се тражени угао добио изражен помоћу једне од поменутих двеју функција.

У нумеричком делу наилазиће се и на извесне нове ознаке и начин писања, који нису код нас уобичајени. Рећи ћу нешто о разлозима којима то правдам. Због прегледности схеме и лакшег извођења операција (сабирања и одузимања), — бројеви са више од четири цифре редовно су одвајани у групе. Они са пет цифара: у групе од по две и три; они са шест цифара: у групе од по три и три; они са седам: у групе од по три и четири.

Да би се избегла двосмисленост до које доводи употреба запете као знака и за интерпункцију, а и за одвајање целих од децимала (напр., при набрајању вредности изражених мешовитим бројевима), — уведена је и доследно коришћена тачка на средини — између целих и децимала мешовитих бројева.

У циљу да се у схеми што више скрати писање (нарочито понављања), — уведено је и доследно спроведено да се лева страна пише, место, рецимо, $\log a =$, или $\log \sin \varepsilon =$, или $\log \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') =, \ldots,$ само $[a]$, $[\sin \varepsilon]$, $[\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')], \ldots$ без знака $=$. Исто тако, вредности логаритама правих децималних разломака писане су само са позитивним делом

карактеристике; негативи део (−10 на крају) редовно је изостављан. Од овог правила отступно је само у случајевима када су се у истом обрасцу јављали и велики и мали бројеви.

О језичко-терминолошкој страни Збирке морам, исто тако, рећи онолико бар колико је потребно да оправдам отступања која сам себи дозволио, или сматрао за умесна.

Термин „раван" у смислу „једнак" доследно сам избегавао, и поред његова давно освештаног грађанског права у нашој и усменој настави и уџбеничкој литератури. Нека ми се не замери што се нисам могао никако помирити са том двоструком бесмислицом да, напр., сферни троугао са три једнаке стране зовем — равностраним сферним троуглом; или, да сферни троугао са две једнаке стране, зовем — равнокраким сферним троуглом. Први зовем — једнакостраним, други — једнакокраким.

За лук великог круга повучен у сферном троуглу из којег било од темена до тачке која полови наспрамну троуглову страну преузео сам из стране литературе термин — медијана.

За главне делове дана усвојио сам, односно увео термине — обданица и обноћница.

*

При састављању Збирке користио сам из стране литературе:

L. Gruey — Exercices astronomiques; Ed. A. Herman, Paris, 1889.

E. Villié — Compositions d'Analyse, Mécanique et Astronomie, I—II; Paris 1890. Ed. Gauthier—Villars.

W. Laska — Lehrbuch der Sphärischen Trigonometrie; J. Maier, Stuttgart, 1890.

R. Ball — Spherical Astronomy; Cambridge Univ. Press, 1923.

Barlow & Bryan — Elementary Mathematical Astronomy; Tutorial Press, London, 1926.

Russel—Dugan—Stewart — Astronomy; Ginn & Co, New York, 1926.

P. Humbert — Exercices numériques d'Astronomie; Ed. Vuibert, Paris, 1933.

H. Godfray — Treatise on Astronomy; Macmillan & Co., London, 1934.

W. M. Smart — Spherical Astronomy; Cambridge Univ. Press, 1936.

Ако је задатак преузет био из неког од ових дела или Збирки — стављано је испод задатка ауторово име. Није означавано име ако је задатак преиначаван, редовно од елементарнијег задатка састављен мало тежи или интересантнији за решавање. Ако је преузето и решење, такође је стављано име аутора из чијег дела оно потиче.

Збирка је спремана била да из штампе изађе за почетак ове (1956—57) школске године. Како се, међутим, ово технички показало као скоро неизводљиво, одлучио сам се да је поделим у два дела. На овај начин ће нови слушаоци моћи први део користити, уз предавања зимског семестра, у току којега ће — надам се — и други део њен моћи изаћи штампан.

*

На крају овог предговора осећам за пријатну дужност да се сетим и оних који су ми помогли, било при спремању рукописа, било при штампању Збирке.

Своме колеги, професору Кашанину, који је имао стрпљења да прочита рукопис, искрено сам захвалан за тај труд, као и за примедбе и сугестије које ми је учинио.

Захвалан сам и асистенту Ј. Симовљевићу, који је прочитао цео рукопис, добар део нумеричког рада у њој проверио и указао ми на омашке које је при том уочио.

И асистенту Р. Ђорђевићу дугујем захвалност што је један део нумеричког рада прегледао у рукопису и упозорио ме на примећене пропусте.

Дугогодишњем свом сараднику, сараднику Астрономско-нумеричке секције Математичког института Српске академије наука, М. Чавчићу искрено сам захвалан за огромни труд који га је стала израда свих цртежа Збирке.

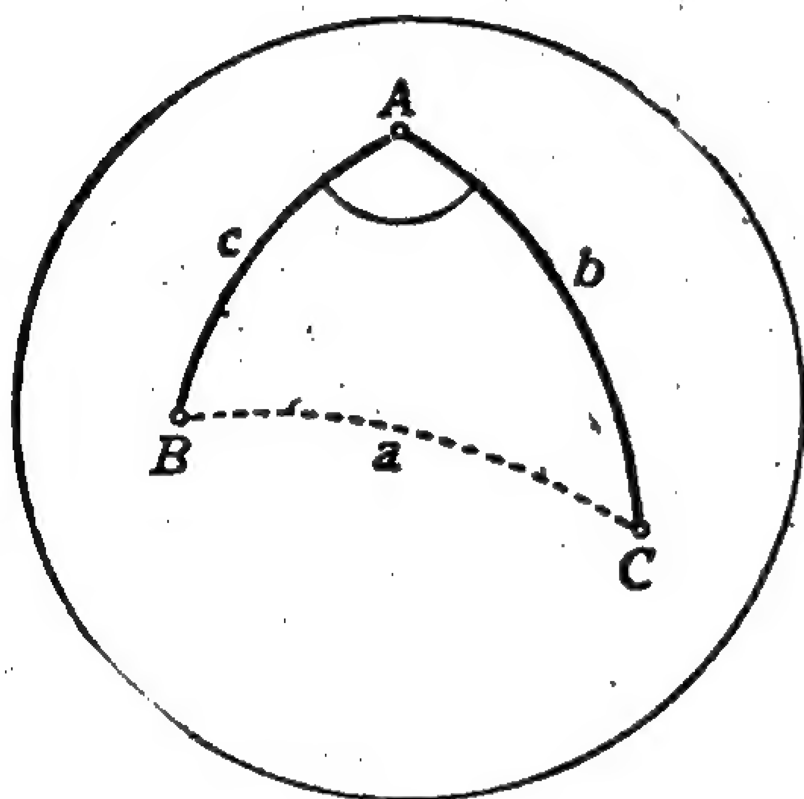
12 мај 1956 *В. В. М.*

УВОД

I. ПРЕГЛЕД ОБРАЗАЦА СФЕРНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

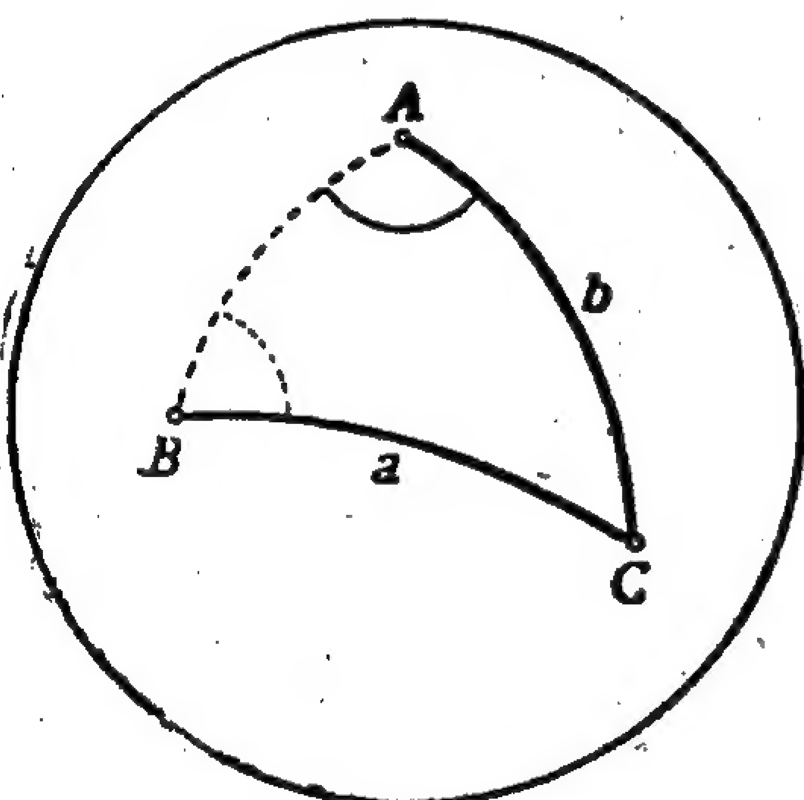
1. Косоугли сферни троугао

А. — Четвороелементни обрасци



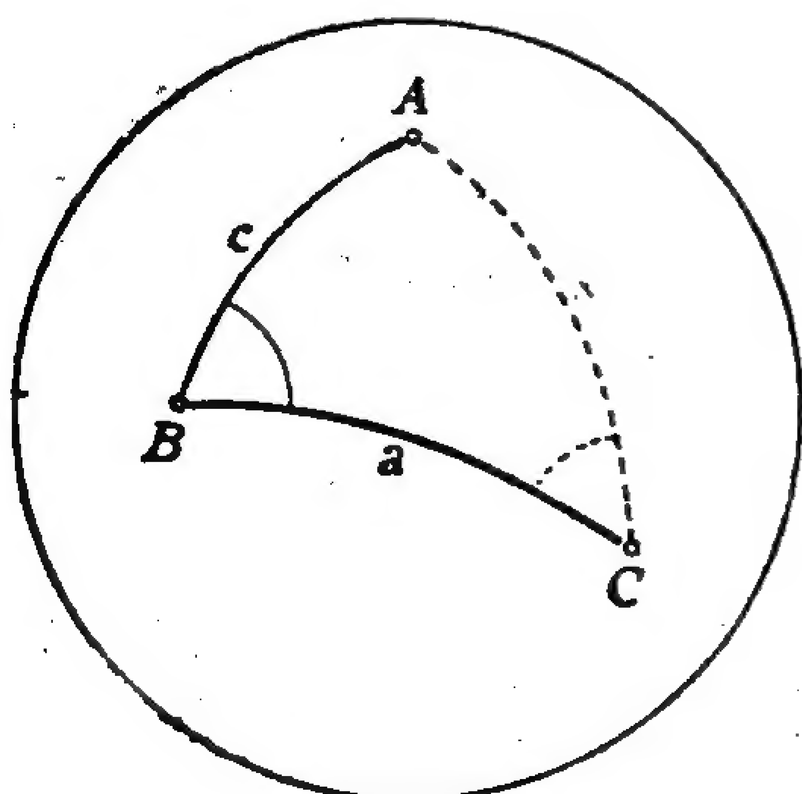
Сл. 1

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C;\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$



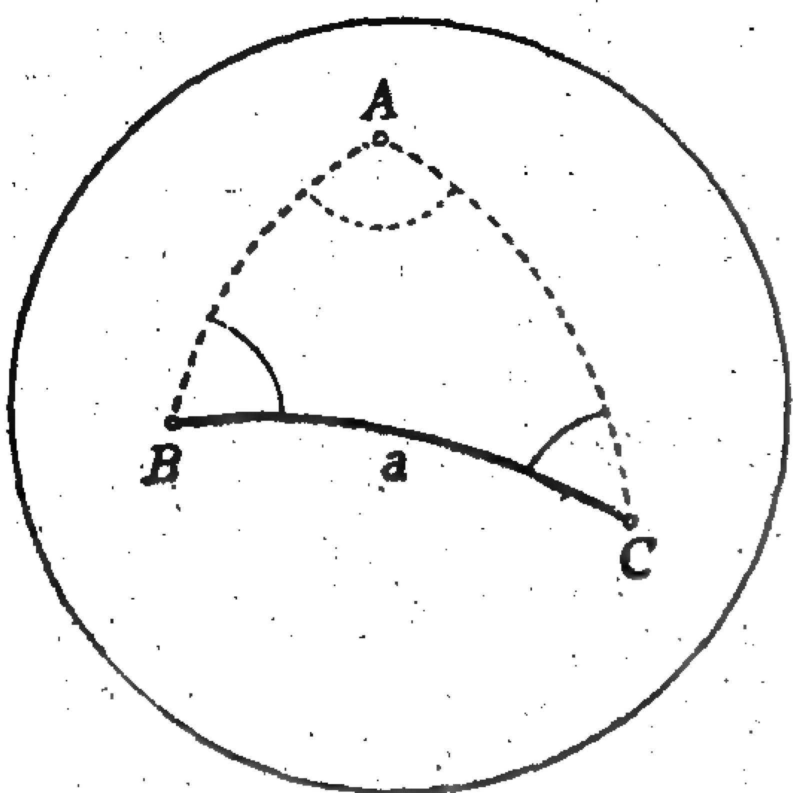
Сл. 2

$$\left.\begin{aligned}\sin a\sin B&=\sin b\sin A,\\ \sin b\sin C&=\sin c\sin B,\\ \sin c\sin A&=\sin a\sin C;\end{aligned}\right\}\qquad\text{(II)}$$



Сл. 3

$$\left.\begin{aligned}\cos a\cos B&=\sin a\operatorname{ctg} c-\sin B\operatorname{ctg} C,\\ \cos a\cos C&=\sin a\operatorname{ctg} b-\sin C\operatorname{ctg} B,\\ \cos b\cos C&=\sin b\operatorname{ctg} a-\sin C\operatorname{ctg} A,\\ \cos b\cos A&=\sin b\operatorname{ctg} c-\sin A\operatorname{ctg} C,\\ \cos c\cos A&=\sin c\operatorname{ctg} b-\sin A\operatorname{ctg} B,\\ \cos c\cos B&=\sin c\operatorname{ctg} a-\sin B\operatorname{ctg} A;\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$



Сл. 4

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a,\\ \cos B &= -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b,\\ \cos C &= -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

B. — *Петоелементни обрасци*

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B &= \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A,\\ \sin a\cos C &= \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A,\\ \sin b\cos C &= \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B,\\ \sin b\cos A &= \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B,\\ \sin c\cos A &= \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C,\\ \sin c\cos B &= \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C;\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

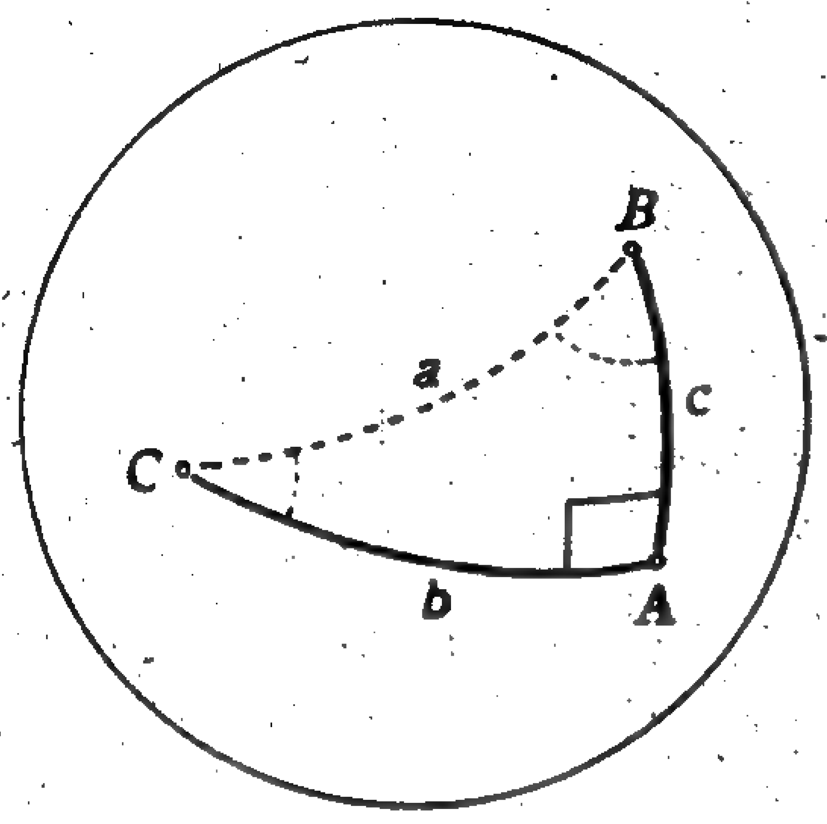
$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos b &= \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a,\\ \sin A\cos c &= \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos a,\\ \sin B\cos c &= \cos C\sin A + \sin C\cos A\cos b,\\ \sin B\cos a &= \cos A\sin C + \sin A\cos C\cos b,\\ \sin C\cos a &= \cos A\sin B + \sin A\cos B\cos c,\\ \sin C\cos b &= \cos B\sin A + \sin B\cos A\cos c.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

C. — *Гаусова група образаца*

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,\\ \sin a\sin B &= \sin b\sin A,\\ \sin a\cos B &= \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A.\end{aligned}\right\} \qquad (\text{VII}_1)$$

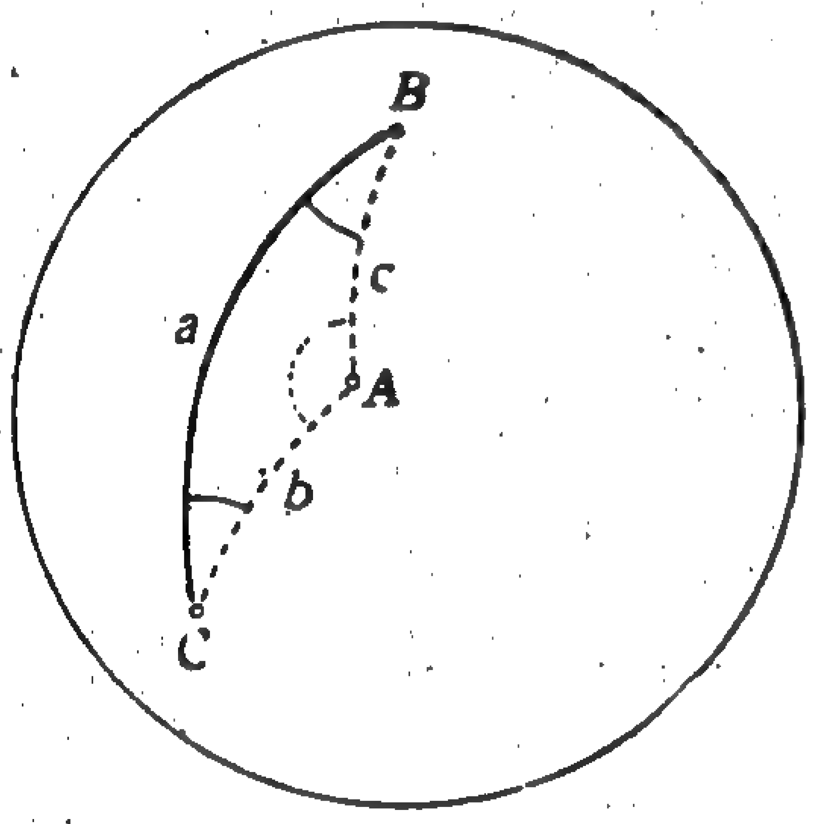
$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,\\ \sin a\sin C &= \sin c\sin A,\\ \sin a\cos C &= \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A.\end{aligned}\right\} \qquad (\text{VII}_2)$$

2. Правоугли $\left(A=\frac{\pi}{2}\right)$ и квадрантни $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$ сферни троугли



Сл. 5

$$\left.\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,\\
\sin b &= \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C,\\
\sin c &= \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B,\\
\cos B &= \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a,\\
\cos C &= \cos c \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$



Сл. 6

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c,\\
\sin B &= \sin A \sin b = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} c,\\
\sin C &= \sin A \sin c = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} b,\\
\cos b &= \cos B \sin c = -\operatorname{tg} C \operatorname{ctg} A,\\
\cos c &= \cos C \sin b = -\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

3. Специјални обрасци

3.1. *Бордини обрасци*

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}.$$

3.2. *Деламброви обрасци*

$$\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

$$\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}(B-C),$$

$$\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C),$$

$$\cos\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}(B+C).$$

3.3. *Непероне аналогије*

$$\sin\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\sin\frac{1}{2}(b-c)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A,$$

$$\cos\frac{1}{2}(b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)=\cos\frac{1}{2}(b-c)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A,$$

$$\sin\frac{1}{2}(B+C)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c)=\sin\frac{1}{2}(B-C)\operatorname{tg}\frac{1}{2}a,$$

$$\cos\frac{1}{2}(B+C)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c)=\cos\frac{1}{2}(B-C)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}a.$$

3.4. *Образац за сферни ексцес*

$$\sigma=A+B+C-\pi;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c)}.$$

4. Диференцијални обрасци

4. – (I). $da=\cos C\,db+\cos B\,dc+\sin B\sin c\,dA.$

4. – (II). $\operatorname{ctg}a\,da-\operatorname{ctg}b\,db=\operatorname{ctg}A\,dA-\operatorname{ctg}B\,dB.$

4. – (III). $\sin a\,dB=\sin C\,db-\sin B\cos a\,dc-\cos C\sin b\,dA.$

4. – (IV). $dA=\sin b\sin C\,da-\cos c\,dB-\cos b\,dC.$

II. РЕДОВИ

Маклоренов ред

$$f(x)=f(o)+xf'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\frac{x^3}{3!}f'''(o)+\ldots.$$

Тајлоров ред

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

Биномни ред

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots \qquad [x^2<1]$$

Логаритамски ред

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad [-1<x\leqslant 1]$$

Редови за тригонометриске и циклометриске функције

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \qquad [x\neq\infty]$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad [x\neq\infty]$$

$$\operatorname{tang} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2]$$

$$\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\ldots \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\frac{127}{604800}x^7+\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2]$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad [x^2\leqslant 1]$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

$$\text{arctang}\, x = x - \frac{1}{3}{}^{3}x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \qquad [-1 < x \leqslant 1]$$

$$\text{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arctang}\, x.$$

$$\text{arcsec}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5x^5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7x^7} - \dots \qquad [x^2 > 1]$$

$$\text{arccosec}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arcsec}\, x.$$

Специјални редови

Ако је дат израз

$$\text{tg}\, p = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x},$$

онда је

(1) $$p = a \sin x + \frac{1}{2} a^2 \sin 2x + \frac{1}{3} a^3 \sin 3x + \dots \qquad [a < 1]$$

Ако је дат израз

$$q = \sqrt{1 - 2a \cos x + a^2},$$

онда је

(2) $$\log q = -M\left(a \cos x + \frac{1}{2} a^2 \cos 2x + \frac{1}{3} a^3 \cos 3x + \dots\right) \qquad [a < 1]$$

Ако је дат израз

$$\text{tg}\, y = n\, \text{tg}\, x,$$

онда је

(3) $$y = x + \frac{n-1}{n+1} \sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6x + \dots \qquad [n > 1]$$

Ако је дат израз

$$\sin y = \sin x + h,$$

онда је

(4) $$y = x + h \sec x + \frac{1}{2} h^2 \sec x^2\, \text{tg}\, x + \frac{1}{6} h^3 \sec^3 x\,(1 + 3\, \text{tg}^2 x) + \dots \qquad [y \approx x]$$

Ако је дат израз

$$\cos y = \cos x + k,$$

онда је

(5) $$y = x - k\, \text{cosec}\, x - \frac{1}{2} k^2\, \text{cosec}^2 x\, \text{ctg}\, x - \frac{1}{6} k^3\, \text{cosec}^3 x\,(1 + 3\, \text{ctg}^2 x) + \dots$$

$$[y \approx x]$$

III. ПРЕГЛЕД ОБРАЗАЦА ЗА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ АСТРОНОМСКИХ КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА

1. *Екваторског у хоризонтски*

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H; \qquad n \sin N = \sin\delta;$$

$$\cos h \cos A = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos H; \qquad n \cos N = \cos\delta \cos H;$$

$$\sin h = n \cos(\varphi - N),$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = n \sin(\varphi - N).$$

За паралактички угао

$$\cos h \sin q = \cos\varphi \sin H, \qquad n' \sin N' = \cos\varphi \cos H,$$

$$\cos h \cos q = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos H; \qquad n' \cos N' = \sin\varphi;$$

$$\cos h \sin q = \cos\varphi \sin H,$$

$$\cos h \cos q = n' \cos(\delta + N').$$

Контролни обрасци

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h-\delta) = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi - N\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+\delta);$$

$$\cos h \sin(H - A) = -2n \sin H \cos\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)\sin\left(N + 45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{1}{2}(A - q) = \cos\frac{1}{2}H \cos\frac{1}{2}(\varphi - \delta),$$

$$\cos\frac{z}{2}\sin\frac{1}{2}(A - q) = \sin\frac{1}{2}H \sin\frac{1}{2}(\varphi + \delta).$$

Диференцијални обрасци

$$dh = \cos q\, d\delta - \cos A\, d\varphi - \cos\delta \sin q\, dH,$$

$$\cos h\, dA = \sin q\, d\delta - \sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos q\, dH.$$

2. *Хоризонтског у екваторски*

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cosh \cos A,$$

$$\cos\delta \sin H = \cos h \sin A, \qquad m \sin M = \cos h \cos A;$$

$$\cos\delta \cos H = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A; \qquad m \cos M = \sin h;$$

$$\sin\delta = m \sin(\varphi - M),$$

$$\cos\delta \sin H = \cos h \sin A,$$

$$\cos\delta \cos H = m \cos(\varphi - M).$$

За паралактички угао

$$\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A, \qquad m' \sin M' = \cos\varphi \cos A,$$

$$\cos\delta \cos q = \sin\varphi \cosh + \cos\varphi \sin h \cos A; \qquad m' \cos M' = \sin\varphi;$$

$$\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A,$$

$$\cos\delta \cos q = m' \cos(h - M').$$

Контролни обрасци

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h-\delta) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi + M\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(h+\delta),$$

$$\cos\delta \sin(H-A) = -2m \sin A \cos\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right)\cos\left(M + 45^0 - \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\sin\frac{z}{2}\sin\frac{1}{2}(A+q) = \sin\frac{1}{2}H\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta),$$

$$\sin\frac{z}{2}\cos\frac{1}{2}(A+q) = \cos\frac{1}{2}H\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta).$$

Диференцијални обрасци

$$d\delta = \cos q\,dh + \cos H\,d\varphi + \cos h \sin q\,dA,$$

$$\cos\delta\,dH = -\sin q\,dh + \sin H \sin\delta\,d\varphi + \cosh \cos q\,dA.$$

3. *Екваторског у еклиптички*

$$\sin\beta = -\cos\delta \sin\alpha \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon,$$

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha, \qquad m \sin M = \sin\delta,$$

$$\cos\beta \sin\lambda = \cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon; \qquad m \cos M = \cos\delta \sin\alpha;$$

$$\sin\beta = m \sin(M - \varepsilon),$$

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha,$$

$$\cos\beta \sin\lambda = m \cos(M - \varepsilon).$$

За паралактички угао:

$$\cos\beta\sin q=\cos\alpha\sin\varepsilon, \qquad m'\sin M'=\sin\varepsilon\sin\alpha,$$
$$\cos\beta\cos q=\cos\delta\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon\sin\alpha; \qquad m'\cos M'=\cos\varepsilon;$$

$$\cos\beta\sin q=\cos\alpha\sin\varepsilon,$$
$$\cos\beta\cos q=m'\cos(M'-\delta).$$

Контролни обрасци

$$\sin\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\cos\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\delta+\beta),$$

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\delta-\beta)=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\sec\frac{1}{2}(\lambda-\alpha);$$

$$\cos M\cos\beta\sin\lambda=\cos(M-\varepsilon)\cos\delta\sin\alpha,$$

$$\sin\left(45^0-\frac{1}{2}\beta\right)\sin\frac{1}{2}(Q-\lambda)=\cos\left(45^0+\frac{1}{2}\alpha\right)\sin\left[45^0-\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right],$$

где je
$$Q=90^0-q.$$

Диференцијални обрасци

$$d\beta=\cos q\,d\delta-\cos\delta\sin q\,d\alpha-\sin\lambda\,d\varepsilon,$$
$$\cos\beta\,d\lambda=\sin q\,d\delta+\cos\delta\cos q\,d\alpha+\cos\lambda\sin\beta\,d\varepsilon.$$

4. *Еклиптичког у екваторски*

$$\sin\delta=\cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon+\sin\beta\cos\varepsilon,$$
$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda, \qquad n\sin N=\sin\beta,$$
$$\cos\delta\sin\alpha=\cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon-\sin\beta\sin\varepsilon; \qquad n\cos N=\cos\beta\sin\lambda;$$

$$\sin\delta=n\sin(N+\varepsilon),$$
$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda,$$
$$\cos\delta\sin\alpha=n\cos(N+\varepsilon).$$

За паралактички угао

$$\cos\delta\sin q=\cos\lambda\sin\varepsilon, \qquad n'\sin N'=\sin\varepsilon\sin\lambda,$$
$$\cos\delta\cos q=\cos\beta\cos\varepsilon-\sin\beta\sin\varepsilon\sin\lambda; \qquad n'\cos N'=\cos\varepsilon;$$

$$\cos\delta\sin q=\cos\lambda\sin\varepsilon,$$
$$\cos\delta\cos q=n'\cos(N'+\beta).$$

Контролни обрасци

$$\sin\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)=\mathrm{tg}\frac{1}{2}\,\varepsilon\cos\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\delta+\beta),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta-\beta)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\sec\frac{1}{2}(\lambda-\alpha),$$

$$\cos N\cos\delta\sin\alpha=\cos(N+\varepsilon)\cos\beta\sin\lambda,$$

$$\sin\left(45^{\circ}-\frac{1}{2}\delta\right)\sin\frac{1}{2}(Q+\alpha)=\sin\left(45^{\circ}+\frac{1}{2}\lambda\right)\sin\left[45^{\circ}-\frac{1}{2}(\varepsilon+\beta)\right],$$

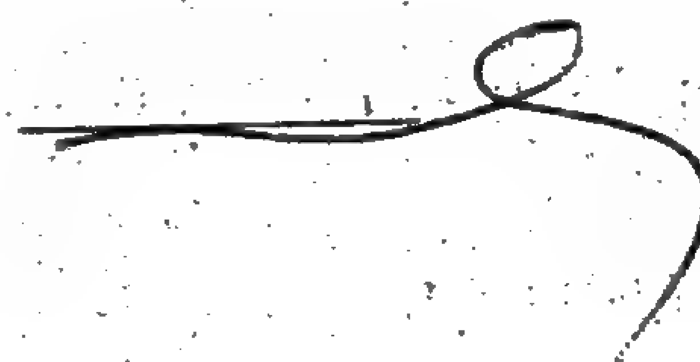
где je

$$Q=90^{\circ}-q.$$

(Диференцијални обрасци/

$$d\delta=\cos q\,d\beta+\sin q\cos\beta\,d\lambda+\sin\alpha\,d\varepsilon,$$

$$\cos\delta\,d\alpha=-\sin q\,d\beta+\cos q\cos\beta\,d\lambda-\sin\delta\cos\alpha\,d\varepsilon,$$



ЗАДАЦИ

~~Збирка решених задатака из Опште астрономије~~

I СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Угао $\alpha = 0{\cdot}265$ радијана прерачунати у:

а) степене и његове делове; б) минуте и њене делове; в) секунде и њене делове (две децимале); г) степене, минуте, секунде и њене делове (две децимале).

2. Угао $\alpha = 15^{0}\,11'\,0''{\cdot}17$ прерачунати у радијане и његове делове.

3. Угао $\alpha = 237^{0}\,51'\,37''{\cdot}62$ прерачунати у часове, минуте, секунде и њене делове (три децимале).

4. Угао $\alpha = 15^{h}\,51^{m}\,26^{s}{\cdot}508$ прерачунати у степене, минуте, секунде и њене делове (две децимале).

5. Ако се за вредност углова α и β, које треба одредити из $\sin\alpha = 0{\cdot}016\,5929$ и $\operatorname{tg}\beta = 0{\cdot}016\,5952$, са по две децимале угловне секунде, узме $\alpha = 0{\cdot}017\,5929$ и $\beta = 0{\cdot}016\,5952$, или, у угловној мери, $\alpha = 0^{0}\,57'\,2''{\cdot}53$ и $\beta = 0^{0}\,57'\,3''{\cdot}01$, колика су, у угловним секундама, отступања тих вредности од тачних, ако се занемаре виши од трећег степени вредности $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$?

6. Показати да се у сферном троуглу већем углу насупрот налази већа страна.

7. Показати да је у сферном троуглу разлика између било која два угла мања од суплемента трећег угла.

8. Показати да је површина сферног троугла, на сфери полупречника R, чији су углови A, B, C,

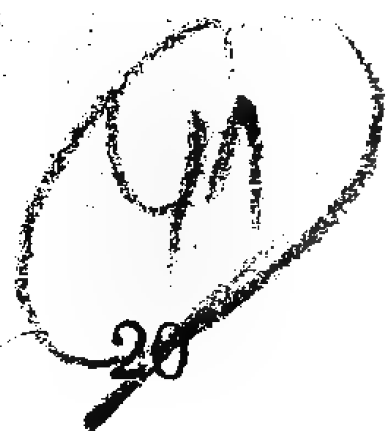
$$p = \frac{R^{2}\pi}{180^{0}}(A + B + C - 180^{0}).$$

9. Израчунати површину сферног троугла, на сфери полупречника једнака јединици, ако су углови тог троугла $A = 80^{0}$, $B = 70^{0}$, $C = 60^{0}$.

10. Извести основни образац Сферне тригонометрије помоћу образаца за правоугле сферне троуглове.

11. Извести обрасце IV групе, за израчунавање углова, помоћу образаца за правоугле сферне троуглове.

12. Извести Гаусову групу образаца за сферни троугао помоћу ротације координатног система око једне осе.



13. Како гласи Неперово мнемоничко правило за обрасце за решавање квадрантног сферног троугла (у којега је једна страна 90°)?

•14. Подесити за логаритамско рачунање образац

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos b \cdot \cos C$$

за одређивање угла C.

• 15. Дате су у сферном троуглу стране $b = 37^\circ 47' 18''$ и $c = 74^\circ 51' 50''$ и угао међу њима $A = 44^\circ 10' 40''$. Одредити: 1) трећу страну, a, и један од налеглих углова, рецимо C; 2) сва три непозната елемента.

• 16. Објаснити геометриско значење уведених помоћних величина, m и M, у претходном задатку 1).

• 17. Извести обрасце за одређивање промена израчунатих елемената у функцијама промена датих елемената у задатку 15, и применити их узимајући, рецимо, за исте: $db = 10''$, $dc = 20''$, $dA = 30''$.

• 18. Дате су две стране сферног троугла, $b = 16^\circ 42' 30''$ и $c = 47^\circ 14' 04''$ и угао међу њима $A = 153^\circ 2' 14''$, израчунати висину и медијану, обе повучене из темена A.

19. Дате су три стране сферног троугла $a = 50^\circ 54' 32''$, $b = 37^\circ 47' 18''$ и $c = 74^\circ 51' 50''$; израчунати углове тог троугла.

Израчунати промене тих углова, ако се све три стране промене за по $6''$, дакле за $da = +06''$, $db = +06''$, $dc = +06''$.

20. Показати да је у сферном троуглу $B + C = 180^\circ$, ако је $b + c = 180^\circ$.

21. Ако је у сферном троуглу $a + b + c = 180^\circ$, показати да је

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1.$$ [*Humbert*]

22. Извести везу што постоји између страна и углова у једнакостраном сферном троуглу.

• 23. Израчунати елементе сферног троугла ако су дате стране a и b, а уз то још и веза $C = A + B$.

• 24. Ако је у сферном троуглу $A + B = C$, показати да је

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \cos C = 0.$$ [*Humbert*]

25. Ако је у сферном троуглу $A + B = C$, показати да је

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{c}{2}.$$ [*Luska*]

26. Показати да је у правоуглом сферном троуглу:

1) $\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_a$ и $\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_b$, где су a и b катете, c хипотенуза, а c_a и c_b делови хипотенузе уз једну, односно другу од катета;

2) $\sin^2 h = \operatorname{tg} c_a \cdot \operatorname{tg} c_b$, где је h лук великог круга повучен из темена правог угла нормално на хипотенузу. [*Laska*]

27. Дате су у сферном троуглу основа, c, и веза међу угловима $\cos A + \sec B \cos C = 0$. Одредити геометриско место темена C.

28. Показати да међу елементима сферног троугла постоји веза

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) = \sin (a+b) \sin^2 \frac{C}{2}.$$

29. Показати да међу елементима сферног троугла постоји веза

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B).$$

30. Ако се стране CA и CB сферног троугла ABC преполове у тачкама D и E, па лук великог круга DE означи са η, а збир троуглових углова означи са $2S$, показати да је

$$\cos \eta = \sec \frac{c}{2} \cdot \sin S.$$

31. Дате су у сферном троуглу страна c и веза $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \mu$, где је μ медијана из темена C. Одредити разлику $(a-b)$.

32. Извести шестоелементни, или такозвани Кањолиев образац,

$$\sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c \cdot \cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C \cdot \cos a.$$

33. Показати да је у сферном троуглу ABC (в. сл. 15), у којем су други и виши степени елемената c и C занемарљиви,

$$\Delta A = B_1 - A = C \cdot \cos b.$$

II ЗЕМЉА КАО НЕБЕСКО ТЕЛО

34. Извести изразе за депресију хоризонта и даљину вида посматрача који се налази на узвишењу h над морском површином.

Израчунати тражене величине узимајући за полупречник Земље (сфере) $R=6370$ км и $h=30$ м.

35. Извести израз за површину слободног видика на Земљи (сфери) коју види посматрач са узвишења h над морском површином.

Израчунати ту површину узимајући за Земљин полупречник $R=6370$ км, а за h, прво, $h_1=30$ м, а, затим, $h_2=6$ км.

36. Са коликог би узвишења над морском површином посматрач видео 1/100-ти део површине Земље (сфере), полупречника $R=6370$ км?

37. Посматрачи A и B налазе се на узвишењима h_1 и h_2 над морском површином на Земљи (сфери), чији је полупречник R. Шта ће бити услов, ако је α угао између њихових вертикала, да они још један другог виде?

38. Ако је са узвишења h_1 и h_2 на истој вертикали посматрана иста некретница под угловима α_1 и α_2 са видиком, показати да се за приближну вредност полупречника Земљине сфере добива

$$R=\left(\frac{\sqrt{2h_2}-\sqrt{2h_1}}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2. \qquad [Godfray]$$

39. Посматрач се налази у балону на висини $h=12$ км изнад места чије су географске координате $L=0^\circ$, $\varphi=+60^\circ$. Претпостављајући да је Земља сфера, наћи координате тачака на меридијану и на паралелу до којих допире његов вид.

40. Одредити географске координате тачака на екватору које се налазе на удаљењу d од тачке чије су координате (L, φ).

41. Колика је разлика у географским дужинама места A_1 и A, од којих се прво налази на екватору, а друго на паралелу географске ширине φ, ако је φ_s географска ширина најјужније тачке великог круга повучена кроз A_1 и A.

42. Места A и B имају исту географску ширину, φ, а географске дужине им имају разлику L. Наћи географску ширину најсеверније тачке великог круга што пролази кроз та места, и одредити разлику у дужинама путања мерених по паралелу и по великом кругу између тих места. [Smart]

43. Израчунати географску ширину паралела на Земљи (сфери, полупречника $R=6370$ км) између двају места, удаљених једно од другог 261 км, а чије су географске дужине $L_1=43^0\,17'$ и $L_2=46^0\,41'$.

44. Извесног датума кренуо је брод из места чије су географске координате $L=-16^0\,30'$ и $\varphi=-28^0\,0'$, у правцу истока, и плови брзином од 12 чворова. Израчунати, прво, географску дужину тачке на којој ће се наћи брод пошто превали 4500 н. м. и, друго, трајање вожње.

45. Два брода плове у истом смеру: један по паралелу $\varphi_1=+42^0\,40'$, други по паралелу $\varphi_2=-12^0\,30'$. Ако први плови брзином од 18 чворова, коликом брзином треба други да плови да би се са првим налазио стално на истом меридијану?

46. Два брода крећу, један из места $L_1=-18^0\,24'$, $\varphi_1=+60^0$ у правцу запада, други из места $L_2=+26^0\,36'$ и $\varphi_2=+30^0$ у правцу истока. Први плови брзином од 12 чворова, а други брзином од 15 чворова. Ако су кренули 27 фебруара 1952 г., у 12 ч. гр. вр., израчунати тренутак када ће они имати исту географску дужину, и коју?

47. Два пешака полазе из истог места, чија је географска ширина $\varphi=+60^0$, један у правцу истока други у правцу запада. Крећу се истом брзином. Колика је ова била, ако им је, после 5 часова пешачења свакога од њих, разлика географских дужина износила $\Delta L=4^m$?

48. Колике су приближне часовне промене географских координата воза који креће, у правцу североистока, из Београда, чија је географска ширина $\varphi=+44^0\,48'$, ако вози брзином од 50 км на час? [*Barlow and Bryan*]

49. Два посматрача, који се налазе на географским ширинама $\varphi_1=+23^0\,30'$ односно $\varphi_2=+25^0\,45'$, удаљени су један од другога 278 км. Налазе ли се они на истом меридијану? Ако се не налазе, за колико би требало други посматрач, остајући на истој ширини, да промени своју географску дужину, да се нађе са првим на истом меридијану?

50. Из места A, чије су координате $L_1=+3^h\,24^m{.}3$ и $\varphi_1=+2^0\,15'$, полази 15 априла, у 10^h, брод за место B, чије су координате $L_2=-2^h\,12^m{.}7$ и $\varphi_2=-18^0\,46'$, и плови најкраћим путем, брзином од 20 чворова. Ако настави пловидбу, под овим условима, и преко места B: а) одредити координате најјужније тачке пута, као и датум и час кад у њу стиже; б) извести изразе за часовне промене географских координата брода и израчунати ове промене.

51. За колико се највише може скратити пут између два места на истом паралелу на Земљи (сфери) кад се плови по великом кругу место по паралелу? [*Ball*]

52. Које географске координате имају тачке на Земљи (сфери) чије су хоризонтске равни паралелне са равни вертикала азимута A у месту на екватору, чија је географска дужина L. — Израчунати координате ако је $A=70^0$, $L=-20^0$. [*Barlow and Bryan*]

53. Наћи координате тачака на Земљи (сфери) чије су хоризонтске равни паралелне са равни која са београдским меридијаном образује угао $A=70^0$.

54. Колико је далеко од подножја Ајфелова торња, чија је висина $h=300$ м, а који се налази на географској ширини $\varphi=48^{0}\,50'\,11''$, најближа тачка чија је линеарна брзина, услед Земљине ротације, једнака линеарној брзини врха Ајфелова торња?

55. Колико ће далеко пасти од вертикале тело пуштено, на екватору, са висине $h=300$ м, ако се занемаре отпор ваздуха и промене услед висине убрзања силе теже?

56. Израчунати аксифугална убрзања материјалних тачака на површини Земље (сфере) а на тачкама чије су географске ширине $\varphi_1=0^{0}$, $\varphi_2=30^{0}$ и $\varphi_3=60^{0}$, и оценити последице тих убрзања које сносе тежине тела на тим тачкама.

57. Коју би вредност требало да има угловна брзина Земљине ротације па да тела на екватору изгубе своју тежину?

58. Колико би износило убрзање силе теже на површини Земље (сфере) кад би њена маса равномерно испунила простор до Месечеве даљине (једнаке 60·27 Земљиних полупречника), а колико на површини Сунчеве сфере, кад би његова маса равномерно испунила запремину сфере полупречника једнака астрономској јединици $(149{\cdot}45\times10^{6}$ км)?
[*Russell—Dugan—Stewart*]

59. Колико износи убрзање силе теже у Кајени (главном граду Гијане, у Јужној Америци, скоро на самом екватору) где часовник са секундним клатном, који је у Паризу показивао тачно време, закашњава дневно за по $2^{m}\,28^{s}$?

60. Ако пренесемо на екватор хронометар и часовник са клатном, који у Београду показују тачно време, хоће ли се појавити разлике међу њима и колике? Шта би требало урадити, ако се покажу разлике, да на екватору хронометар и часовник показују исто време?

61. За колико би се променила географска ширина Београда кад би Земља престала да ротира?

62. Како ће се понашати један према другом часовник са секундним клатном и хронометар, који су на екватору показивали тачно време, ако их пренесемо на један од Земљиних полова?

63. За колико би требало променити дужину клатна часовника, који је на екватору показивао тачно време, да би могао да показује тачно време и када би Земљина сфера одједном престала да ротира?

64. Показати да је привидна промена равни осцилација физичког клатна, у односу према меридијанској равни места, пропорционална синусу географске ширине тог места.

65. Израчунати азимут у Београду равни осцилација физичког клатна, које је пуштено да осцилира у равни првог вертикала, након 9^{h} звезданог времена од тренутка пуштања.

66. Извести изразе за правоугле координате и геоцентрични радијевектор посматрачев на Земљи—елипсоиду, кад су дате велика и мала полуоса меридијанске елипсе и посматрачева географска ширина.

Израчунати координате и радије вектор за посматрача у Београду, чија је географска ширина $\varphi=+44^0 48' 13''\cdot 20$ и ако се зна да су $a=6378\cdot 388$ км и $b=6356\cdot 909$ км.

67. Показати да је приближна вредност редуковане ширине, ако се занемаре квадрат и виши степени спљоштености,

$$\psi=\varphi-\left(\frac{\alpha}{2\, arc\, 1''}\sin 2\varphi\right)'',$$

као и да су приближне вредности геоцентричне ширине и радија-вектора (у јединицама екваторског полупречника), ако се занемаре трећи и виши степени екцентричности,

$$\varphi'=\varphi-\left(\frac{c^2}{2\,\mathrm{arc}\, 1''}\sin 2\varphi\right)'',$$

односно

$$r=1-\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi.$$

Израчунати ψ, φ' и r за $\varphi=+44^0 48' 13''\cdot 20$, узимајући $\alpha=\frac{1}{297}$ и $e=0\cdot 082$. [*Ball*]

68. Показати да имамо, ако је $|p|<1$, за свако x:

1) $p\sin x+p^2\sin 2x+p^3\sin 3x+\dots\dots=p\sin x(1-2p\cos x+p^2)^{-1}$;

2) $p\cos x+\frac{1}{2}p^2\cos 2x+\frac{1}{3}p^3\cos 3x+\dots=-\log\sqrt{1-2p\cos x+p^2}$,

где log означава природне логаритме.

69. Показати да имамо, ако је

$$\mathrm{tg}\, y=n\,\mathrm{tg}\, x, \qquad \text{за } n>a, \text{ и, за } n=1,\ y=x,$$

$$y=x+\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\sin 4x+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3\sin 6x+\dots$$

70. Изразити разлику између геоцентричне и географске ширине, а исто тако и разлику између редуковане и географске ширине, као функцију географске ширине у облику тригонометриског реда.

71. Приказати логаритам геоцентричног радија вектора, као функцију географске ширине, у облику:

1) бесконачног тригонометриског реда;

2) бесконачног реда по све већим степенима од $\sin\varphi$.

72. Одредити екстремне вредности разлика геоцентричне и географске, односно редуковане и географске ширине, тачака на Земљи — елипсоиду.

73. Одредити између којих се граница крећу дужине меридијанских лукова од једног степена на Земљи-елипсоиду, и показати да је однос највеће према најмањој вредности једнак $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

74. Показати да је спљоштеност, α, Земљина елипсоида, ако се занемаре њени квадрати и виши степени, дата изразом

$$\alpha = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right),$$

где s_1 и s_2 означавају дужине лукова од 1° Земљиних меридијана на $\varphi_1 = +60°$, односно $\varphi_2 = +45°$. [*Ball*]

75. Извести изразе за убрзање силе теже на Земљи-елипсоиду у тачки географске ширине φ.



III ПРИВИДНО ДНЕВНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКЕ СФЕРЕ

76. Које хоризонтске, а које екваторске координате имају некретнице које се налазе у исти мах и на небеском екватору и у посматрачеву хоризонту?

77. Које су за посматрача на северној географској ширини φ хоризонтске координате небеских полова, а које екваторске координате посматрачева зенита и надира?

78. Које су месне екваторске координате основних тачака хоризонтске равни, дакле тачака S, W, N и E, посматрача на географској ширини φ?

79. Између којих се граница крећу деклинације некретница које за посматрача у Београду ($\varphi = +44^{\circ}\,48'$) остају стално над хоризонтом односно стално под хоризонтом?

80. На којим местима пролази кроз зенит, а на којим је циркумполарна, звезда α Lyrae (Vega), чија је деклинација $\delta = +38^{\circ}\,44'$?

81. Између којих се граница крећу за посматрача у Београду ($\varphi = +44^{\circ}\,48'$) у току звезданог дана зенитске даљине некретница чија је деклинација $\delta = +63^{\circ}\,12'$?

82. Која некретница кроз зенит места географске ширине $\varphi = +38^{\circ}\,44'$ пролази $4^h\,42^m\,52^s$ звезданог времена после кулминације некретнице чија је ректасцензија $\alpha = 13^h\,52^m\,35^s$?

83. Колики је у Гриничу часовни угао некретнице, ако је у месту географске дужине $L = -40^{\circ}$ њен часовни угао, у истом тренутку, $H_1 = 6^h\,5^m\,4^s$? А колики у том месту, када је у Гриничу часовни угао $H_2 = 6^h\,5^m\,4^s$?

84. Колики је у Гриничу часовни угао α Bootis (Arcturus), чија је ректасцензија $\alpha = 14^h\,13^m\,36^s{\cdot}12$, у тренутку када је у Београду, чија је географска дужина $L = -20^{\circ}\,30'\,48''$, месно звездано време $t = 15^h 21^m 14^s{\cdot}37$?

85. Ако су ректасцензије двеју некретница $\alpha_1 = 10^h\,9^m\,8^s$ и $\alpha_2 = 18^h\,19^m\,20^s$, колики је часовни угао друге у тренутку када је часовни угао прве $H_1 = 49^{\circ}\,39'\,30''$?

86. Колики део звезданог дана проведе некретница чија је деклинација дата изразом $\sin\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ над, а колики део под хоризонтом места чија је географска ширина $\varphi = 45^0$?

87. Шта се све може одредити из посматраних висина исте циркумполарне звезде у обема њеним кулминацијама?

88. Између којих се граница налазе деклинације некретница које за посматрача на географској ширини φ не пролазе кроз први вертикал?

Израчунати те границе за $\varphi = +44^0\,48'$.

89. Са извесног места на северној хемисфери посматрана је некретница, у тренутку њене горње кулминације, на зенитској даљини $z_s = 6^0\,33'\,44''.5$, а у тренутку њене доње кулминације на зенитској даљини $z_i = 71^0\,27'\,39''.3$. Одредити тачну посматрачеву географску ширину и деклинацију некретнице.

Образложити зашто овај задатак има два решења?

90. Са извесног места, A, чије су географске координате φ_1 и L_1, две познате звезде налазе се у истом азимуту и излазе за место B. Које су географске координате овог места?

91. Посматрана је некретница из места чија је географска ширина $\varphi = +38^0\ 58'\,53''$, на зенитској даљини $z = 69^0\,42'\,30''$ у вертикалу азимута $A = 300^0\,10'\,30''$; одредити деклинацију и часовни угао звезде.

Шта би требало још да је познато да би могла бити одређена и ректасцензија звезде?

92. Из места географске ширине $\varphi = +42^0\,41'\,40''$ посматрана је, у $8^h\,54^m\,20^s$ звезданог времена, на зенитској даљини $z = 61^0\,48'\,30''$, некретница чије су координате $\alpha = 4^h\,28^m\,48^s.38$, $\delta = +16^0\,15'\,30''$. Одредити поправку часовника.

93. Одредити правац меридијана и географску ширину посматрача који је, одређеног датума, у $9^h\,5^m\,21^s$, посматрао на зенитској даљини $z = 32^0\,35'\,23''.5$ и азимуту $A = 118^0\,23'\,57''.2$, некретницу чије су координате $\alpha = 46^0\,20'\,15''$ и $\delta = +58^0\,52'\,46''.2$.

94. Одредити конструкцијом деклинацију звезде, као и географску ширину места са којега је та звезда посматрана, у тренутку њене кулминације, на висини $h = 25^0$, а чији је азимут залаза $A = 65^0$, — па рачуном проверити добивене резултате.

95. Одредити графички деклинацију и ректасцензију некретнице, посматране са географске ширине φ, у тренутку t, на зенитској даљини z и азимиту A.

Применити поступак на податке: $\varphi = +50^0$; $t = 8^h\,40^m$; $z = 35^0$ и $A = 40$, па нумерички проверити тачност решења.

96. У којим случајевима остаје, током звезданог дана, зенитска даљина некретнице непромењена?

97. Одредити географску ширину места и координате некретнице која, у том месту, излази у $12^h 33^m 24^s$ зв. вр., која пролази кроз посматрачев зенит и проводи над његовим хоризонтом $14^h 19^m 48^s$ зв. вр.

98. Показати да је часовни угао некретнице, деклинације δ, у тренутку њена излаза за посматрача на географској ширини φ, дат једначином

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \cos(\varphi - \delta) \sec(\varphi + \delta). \qquad [Smart]$$

99. Ако су часовни углови некретнице, позитивне деклинације δ: H_1 при њену пролазу кроз први вертикал (западни), а H_2 при залазу за посматрача на позитивној географској ширини φ — показати да је

$$\cos H_1 \cos H_2 + \operatorname{tg}^2 \delta = 0. \qquad [Smart]$$

100. Ако некретница деклинације δ у меридијану места географске ширине φ достиже зенитску даљину z_1, а у првом вертикалу зенитску даљину z_2 — показати да је

$$\operatorname{ctg} \delta = \operatorname{cosec} z_1 \sec z_2 - \operatorname{ctg} z_1 ,$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} z_1 - \operatorname{cosec} z_1 \cos z_2 . \qquad [Godfray]$$

101. Показати, ако је зенитска даљина (z) некретнице мања од колатитуде (ψ) посматрачеве, да је

$$\psi = \xi + \operatorname{arc} \cos (\cos z \sec \eta),$$

где је $\operatorname{tg} \xi = \operatorname{ctg} \delta \cos H$ и $\sin \eta = \cos \delta \sin H$,

и објаснити геометриско значење величина ξ и η. [Smart]

102. Ако за посматрача на географској ширини φ две некретнице, деклинација δ_1 и δ_2, једновремено излазе, али прва кулминира када друга залази, — показати да је тада

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1 = 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta_2 . \qquad [Smart]$$

103. Одредити географску ширину места у којем две некретнице познатих координата залазе једновремено.

104. Показати да су часовни угао (H) и азимут (A) некретнице, у тренутку кад она достигне висину једнаку посматрачевој географској ширини (φ), дати изразима

$$H = \arc\cos\left[\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\right],$$

$$A = 2 \arc\cos\left[\sec\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\right],$$

где δ означава деклинацију некретнице. [*Godfray*]

105. Одредити географску ширину места у којем две некретнице познатих координата стижу једновремено у први вертикал тог места.

106. Како изгледају везе између екваторских координата (A_r, D) пôла великог круга што спаја некретнице Σ_1 и Σ_2 и координата, (α_1, δ_1) односно (α_2, δ_2), ових некретница? [*Ball*]

107. Ако некретнице Σ_1 и Σ_2, чије су координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2), доспевају у исти вертикал за посматрача на географској ширини φ, показати да је онда

$$\cos\varphi > \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec}\sigma,$$

где σ означава сферну даљину $\Sigma_1 \Sigma_2$. [*Ball*]

108. Одредити ректасцензију тачке пресека са небеским екватором, као и нагиб према екватору, великог круга што пролази кроз некретнице чије су координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2).

Применити решење на некретнице

$$\alpha_1 = 7^h\, 20^m\, 1^s{\cdot}33, \qquad \alpha_2 = 14^h\, 29^m\, 15^s{\cdot}87,$$

$$\delta_1 = -15^0\, 16'\, 17''; \qquad \delta_2 = +42^0\, 41'\, 40'';$$

и објаснити положај друге некретнице.

109. Израчунати висине и азимуте на којима су посматрачи из Београда и Њујорка, чије су географске координате:

$$L_1 = -1^h\, 22^m\, 3^s \quad \text{и} \quad \varphi_1 = +44^0\, 48'{\cdot}2,$$

$$L_2 = +4\;\; 55\;\; 50 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = +40\;\; 48{\cdot}6,$$

посматрали, извесног датума, α Aurigae (Капела), чије су координате

$$\alpha = 5^h\, 13^m\, 26^s \quad \text{и} \quad \delta = +45^0\, 57'{\cdot}3,$$

у тренутку њене горње кулминације у Гриничу.

110. Посматрачи A и B имају исту географску ширину, а географске дужине им се разликују за 180^0. Одредити њихову географску ширину, знајући да између тренутка залаза за посматрача B звезде α Leonis, чија је деклинација $\delta = +12^0 11' 20''$, и тренутка њена излаза за посматрача A протекне $5^h 30^m$ звезданог времена.

Задатак решити, прво, графички, па проверити рачунски. [*Humbert*]

111. Кроз први вертикал (западни) места на географској ширини $\varphi = +44^0 48' 13''$ пролазе једновремено две некретнице, које имају деклинације $\delta_1 = +10^0 20' 30''$ и $\delta_2 = +29^0 28' 27''$. Одредити угловну даљину њихову и разлику њихових ректасцензија.

Који би још податак требало знати, па да би се могле одредити и ректасцензије посматраних некретница?

112. α Geminorum (Castor), чије су координате $\alpha = 7^h 31^m 48^s.0$ и $\delta = +31^0 59' 13''$, посматрана је при пролазу кроз први (западни) вертикал извесног места и датума, у $t = 10^h 55^m 56^s.5$ звезданог времена. Одредити,

1) посматрачеву географску ширину;

2) грешку коју изазива у израчунатој географској ширини грешка од 1^s у процењеном звезданом времену пролаза кроз први вертикал;

3) грешку коју изазива у израчунатој географској ширини грешка од $1''$ у азимуту првог вертикала.

113. Две некретнице, чије су координате

$$\alpha_1 = 7^h 31^m 48^s.2, \qquad \alpha_2 = 10^h 6^m 2^s.4,$$

$$\delta_1 = +31^0 59' 14''; \qquad \delta_2 = +12^0 10' 59'';$$

посматране су са извесног места, у извесном тренутку t, на зенитским даљинама

$$z_1 = 46^0 57' 16'' \quad \text{и} \quad z_2 = 37^0 1' 58''.$$

Одредити посматрачеву географску ширину и тренутак посматрања.

114. У који тренутак звезданог времена за посматрача на географској ширини $\varphi = +36^0 47' 50''$ некретнице Σ_1 и Σ_2, са координатама:

$$\alpha_1 = 1^h 35^m 57^s.2, \qquad \alpha_2 = 3^h 39^m 20^s.8,$$

$$\delta_1 = +67^0 36' 31''; \qquad \delta_2 = +42^0 18' 28'';$$

достижу једновремено исту висину?

После колико звезданог времена из тог тренутка ће разлика њихових зенитских даљина достићи $1''$? [*Sorbonne 1922*]

115. Са извесног места географске ширине φ посматране су две некретнице, Σ_1 и Σ_2, једнаких ректасцензија и познатих деклинација δ_1 и δ_2, на истој висини, у размаку τ звезданог времена. Ако је, у тренутку посматрања прве звезде, њен часовни угао H_1:

1) показати да је

$$\cos(H_1+M)=2N\sin M\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{cosec}\,\tau,$$

где је
$$N=\sin\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\cos\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\sec\delta_2,$$

$$\mathrm{ctg}\,M=\mathrm{ctg}\,\tau-\cos\delta_1\sec\delta_2\,\mathrm{cosec}\,\tau;$$

2) шта би требало још да се зна па да се могу одредити и посматрачева географска ширина и висина на којој су Σ_1 и Σ_2 посматране.

116. Две некретнице, Σ_1 и Σ_2, познатих координата, (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2), пролазе једновремено кроз посматрачев вертикал азимута A. Показати да је, у том случају, посматрачева географска ширина дата изразом

$$\varphi=\mathrm{arc\,tg}\,[\mathrm{tg}\,\delta_2\sin(\sigma+H_2)\,\mathrm{cosec}\,\sigma],$$

где је H_2 часовни угао друге некретнице при њену пролазу кроз вертикал азимута A, а σ помоћни угао одређен једначином

$$\mathrm{tg}\left[\sigma-\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]=\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\delta_2+\delta_1)\,\mathrm{cosec}\,(\delta_2-\delta_1).$$

Шта би требало да је познато, поред датих података, па да се може израчунати не само посматрачева географска ширина, већ и азимут вертикала и како?

117. Кад су за одређено место промене зенитске даљине некретнице у току звезданог дана најспорије, а кад најбрже? Кад стално једнаке променама часовног угла?

118. Ако је A_d азимут у тренутку највеће дигресије циркумполарне звезде деклинације δ, показати да се за t секунада од тренутка највеће дигресије њен азимут промени за

$$\left[-\frac{1}{2}(15\,t)^2\,\mathrm{arc}\,1''\sin^2\delta\,\mathrm{tg}\,A_d\right]''.$$

Израчунати промену у азимуту произвољно изабране циркумполарне, за посматрача на географској ширини $\varphi=+44^\circ\,48'\,13''$, за 10^s од њене највеће дигресије.

119. Израчунати промене, за секунду звезданог времена, висине и азимута некретнице познатих координата, за посматрача на северној географској ширини у тренутцима: 1) излаза некретнице; 2) пролаза кроз први вертикал; 3) горње кулминације.

120. Показати, прво геометриски па онда аналитички, кад је и колика је највећа промена висине некретнице која кулминира северно од посматрачева зенита.

121. Показати да је промена паралактичког угла некретнице дата изразом

$$\frac{dq}{dA}=\cos\varphi\cos A\sec h.$$

122. Израчунати промену висине, за минуту звезданог времена, у тренутку горње кулминације за посматрача на географској ширини $\varphi = +44^0\,48'\,13''$ звезде α Tauri (Aldebaran), чија је деклинација $\delta = +16^0\,25'\,19''$.

123. Прво геометриски извести, па аналитички проверити:

а) кад ће грешка измерене зенитске даљине небеског тела познатих координата, из места географске ширине φ, најмање утицати на изведену поправку часовника?

б) кад ће грешка у посматрачевој географској ширини најмање утицати на поправку часовника изведену из посматране зенитске даљине небеског тела познатих координата?

124. Одредити деклинацију некретнице чија разлика између азимута и часовног угла достиже највећу вредност у тренутку залаза за посматрача на географској ширини φ.

125. Одредити висину некретнице која има највећу деклинацију од свих звезда које се у датом тренутку налазе на вертикалу азимута A, за посматрача на географској ширини φ.

126. Показати да се помоћу посматране висине h, у тренутку t звезданог времена, Северњаче (α Ursae minoris), чије су и координате дате, добива за посматрачеву географску ширину, ако се занемаре други и виши степени поларне даљине (p):

$$\varphi = h - p \cos H\,,$$

а ако се занемаре трећи и виши степени поларне даљине,

$$\varphi = h - p \cos H + \frac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} h \sin^2 H \operatorname{arc} 1''.$$

РЕШЕЊА

I. СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. За ово прерачунавање имамо:

$$1 \text{ радијан } = \frac{180^0}{\pi} = \frac{10\,800'}{\pi} = \frac{648\,000''}{\pi},$$

или

$$1 \text{ радијан} \begin{cases} = 57^0{\cdot}295\,779\cdots = 57^0\,17'\,44''{\cdot}806\cdots; \\ = 3437'{\cdot}746\,77\cdots; \\ = 206\,264''{\cdot}806\cdots. \end{cases}$$

Према томе ћемо имати, ако још скраћено множимо:

$$\text{а)}\quad \begin{array}{r} 57^0{\cdot}29578 \\ 562 \\ \hline 1\,145\,916 \\ 343\,774 \\ 28\,648 \\ \hline \alpha = 15^0{\cdot}10\,338\,; \end{array} \qquad \text{б)}\quad \begin{array}{r} 3437'\,7468 \\ 562 \\ \hline 6\,875\,494 \\ 2\,062\,648 \\ 171\,887 \\ \hline \alpha = 911'{\cdot}0029\,; \end{array} \qquad \text{в)}\quad \begin{array}{r} 206264''{\cdot}80 \\ 562 \\ \hline 4\,125\,296 \\ 1\,237\,589 \\ 103\,132 \\ \hline \alpha = 54660''{\cdot}17\,. \end{array}$$

Помоћу логаритама бисмо имали, ако вредности радијана у степенима, минутама и секундама означимо са ρ^0, ρ', односно ρ'':

а) $\log \rho^0 = 1{\cdot}758\,1226,$ б) $\log \rho' = 3{\cdot}536\,2739,$ в) $\log \rho'' = 5{\cdot}314\,4251,$

$\log \alpha = 9{\cdot}423\,2459,$ $\log \alpha = 9{\cdot}423\,2459,$ $\log \alpha = 9{\cdot}423\,2459,$

$\log \alpha^0 = 1{\cdot}181\,3685,$ $\log \alpha' = 2{\cdot}959\,5198,$ $\log \alpha'' = 4{\cdot}737\,6710,$

$\alpha^0 = 15^0{\cdot}18\,338;$ $\alpha' = 911'{\cdot}0029;$ $\alpha'' = 54\,660''{\cdot}17;$

На основи ових вредности видимо непосредно да је

г) $\alpha = 15^0\,11'\,0''{\cdot}17.$

2. За ово прерачунавање имамо:

$1^0 = \dfrac{\pi}{180} = 0{\cdot}017\,453\,29\cdots$ радијана, што се обично означава са $\operatorname{arc} 1^0$;

$1' = \dfrac{\pi}{10\,800} = 0{\cdot}000\,290\,88\cdots$ радијана, што се обично означава са arc 1′;

$1'' = \dfrac{\pi}{648\,000} = 0{\cdot}000\,004\,848\cdots$ радијана, што се обично означава са arc 1″;

За ово исто прерачунавање помоћу логаритама имамо:

$$\log \operatorname{arc} 1^0 = 8{\cdot}241\,8774 - 10; \qquad \log \operatorname{arc} 1' = 6{\cdot}463\,7261 - 10;$$

$$\log \operatorname{arc} 1'' = 4{\cdot}685\,5749 - 10.$$

Према томе, ако се у резултату задовољимо са четири децимале (јер само проверавамо резултате претходног задатка) имаћемо:

за 15^0: $\quad 15 \times 0{\cdot}017\,45 \ldots\ldots\ldots 0{\cdot}2618$;

за $11'$: $\quad 11 \times 0{\cdot}000\,29 \ldots\ldots\ldots 0{\cdot}0032$;

за $0''{\cdot}17$: $\quad 0.17 \times 0{\cdot}000\,005 \ldots\ldots\ldots\ldots$;

дакле $\qquad \alpha = 15^0\,11'\,0''{\cdot}17 = \quad 0{\cdot}2650$ радијана.

3. Ово прерачунавање врши се помоћу везе по којој пуном углу одговарају 24 часа. Према томе:

$$1^0 = \frac{24^h}{360} = \frac{1^h}{15} = \frac{60^m}{15} = 4^m; \qquad 1^h = \frac{360^0}{24} = 15^0;$$

$$1' = \frac{4^m}{60} = \frac{1^m}{15} = \frac{60^s}{15} = 4^s; \qquad 1^m = \frac{15^0}{60} = \frac{1^0}{4} = \frac{60'}{4} = 15';$$

$$1'' = \frac{4^s}{60} = \frac{1^s}{15} = \quad 0^s{\cdot}067. \qquad 1^s = \frac{15'}{60} = \frac{1'}{4} = \frac{60''}{4} = 15''.$$

За дати угао $x^0\,y'\,z''$ имали бисмо, у временим јединицама, $\left(\dfrac{x}{15}\right)^h \left(\dfrac{y}{15}\right)^m \left(\dfrac{z}{15}\right)^s$, где слова у изложиоцима претстављају уобичајене ознаке за часове, минуте, односно секунде.

Ако сад при дељењу x са 15 означимо количник са ξ, а остатак са p; а при дељењу y са 15 означимо количник са η, а остатак са q, имаћемо:

$$\left(\frac{x}{15}\right)^h = \left(\xi + \frac{p}{15}\right)^h = \xi^h + 4p\,\frac{1^h}{60} = \xi^h + 4p\,\frac{60^m}{60} = \xi^h + (4p)^m;$$

$$\left(\frac{y}{15}\right)^m = \left(\eta + \frac{q}{15}\right)^m = \eta^m + 4q\,\frac{1^m}{60} = \eta^m + 4q\,\frac{60^s}{60} = \eta^m + (4q)^s.$$

Према томе би се правило за непосредно прерачунавање датог угла $x^0\,y'\,z''$ у времене јединице могло претставити обрасцем:

$$x^0\,y'\,z'' = \xi^h\,(4p + \eta)^m \left(4q + \frac{z}{15}\right)^s.$$

За дати угао, $\alpha = 237^0\,51'\,37''\cdot62$, било би: $x=237$, $y=51$, $z=37\cdot62$;
$x=15\times15+12$; дакле $\xi=15$, $p=12$, те ће бити $\xi^h\,(4p)^m \ldots 15^h\,48^m$
$y=15\times\;3+\;6$; дакле $\eta=\;3$, $q=\;6$, те ће бити $\eta^m\,(4q)^s \ldots \;\;3\;\;24^s$
$\frac{z}{15}$ даје $\ldots\;\;2\cdot508$;
те тако добивамо да је $\alpha=237^0\,51'\,37''\cdot62=15^h\,51^m\,26^s\cdot508.$

4. Ако дати угао напишемо у облику $\xi^h\,\eta^m\,\zeta^s$, његова вредност у степенима, минутама и секундама износила би, према горњим односима, $(15\xi)^0\,(15\eta)'\,(15\zeta)''$. Но овако бисмо добивали за минуте и секунде бројеве и веће од 60, те би их још требало овим бројем делити и додавати јединицама претходног реда. Прерачунавање је, међутим, непосредније ако се претходно изврши дељење са 60 бројева 15η и 15ζ, то јест дељење бројева η и ζ са 4. Ако количнике ових дељења означимо са y, односно z, а остатке са μ, односно ν, што ће рећи ставимо

$$\eta=4x+\mu \qquad \text{и} \qquad \zeta=4y+\nu,$$

имаћемо

$$(15\eta)' = x.60' + (15\mu)' = x^0\,(15\mu)',$$
$$(15\zeta)'' = y.60'' + (15\nu)'' = \qquad y'\;\;(15\nu)''.$$

Према томе би се правило за непосредно прерачунавање угла $\xi^h\,\eta^m\,\zeta^s$ у степене, минуте и секунде могло претставити обрасцем:

$$\xi^h\,\eta^m\,\zeta^s = (15\xi+x)^0\,(15\mu+y)'\,(15\nu)''.$$

За дати угао, $\alpha=15^h\,51^m\,26^s\cdot508$, било би $\xi=15$, $\eta=51$, $\zeta=26\cdot508$;
према томе: $(15\xi)^0=225^0$
$\eta=4\times12+3$, дакле $x=12$, $\mu=3$, те ће бити: $x^0(15\mu)' \ldots 12\;\;45'$
$\zeta=4\times\;6+2\cdot508$, дакле $y=6$, $\nu=2\cdot508$, те ће бити: $y'\,(15\nu)'' \ldots\ldots\;\;6\;\;37''\cdot62$;
и тако добивамо да је $\alpha=15^h\,51^m\,26^s\cdot508= \ldots\ldots\ldots\ldots =237^0\,51'\,37''\cdot62.$

5. Поћи ћемо од познатих редова

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{5}+\frac{\alpha^5}{120}-\ldots, \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\beta=\beta+\frac{\beta^3}{5}+\frac{2\beta^5}{15}+\ldots,$$

место којих ћемо, према условима задатка, узети само

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{6} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\beta=\beta+\frac{\beta^3}{3}.$$

Али ако степене више од трећег занемарујемо, онда је

$$\frac{1}{6}\sin^3\alpha=\frac{1}{6}\alpha^3, \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\beta=\frac{1}{3}\beta^3.$$

Ако прве саберемо, а друге одузмемо добивамо

$$\alpha=\sin\alpha+\frac{1}{6}\sin^3\alpha=\sin\alpha\left(1+\frac{1}{6}\sin^2\alpha\right),$$

и

$$\beta=\operatorname{tg}\beta-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\beta=\operatorname{tg}\beta\left(1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\beta\right).$$

На основи датих вредности за $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ налазимо

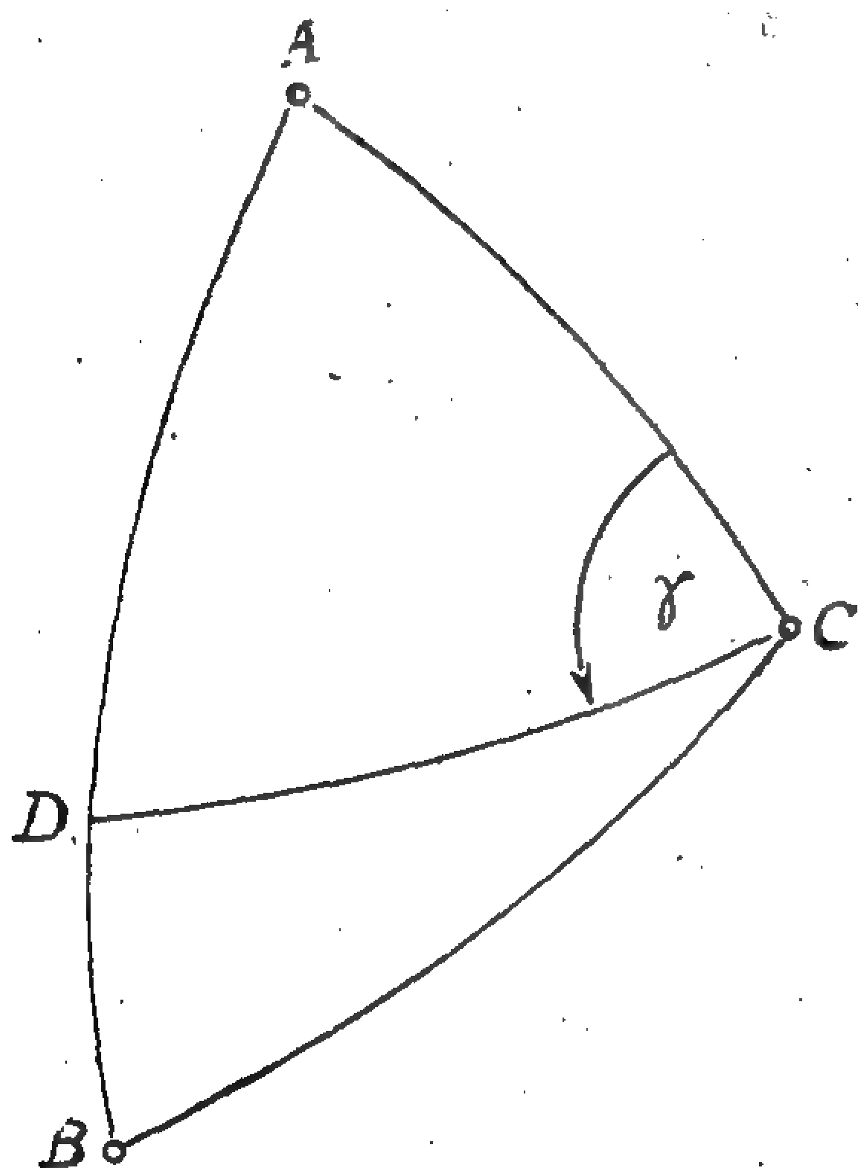
$$\frac{1}{6}\sin^2\alpha = 0{\cdot}000\,0459 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\beta = 0{\cdot}000\,0918\,.$$

И тако налазимо за отступања усвојених од тачних вредности, у деловима секунде:

$$\text{угла } \alpha: 3422''{\cdot}53 \times 0{\cdot}000\,0459 = 0''{\cdot}16\,,$$
$$\text{угла } \beta: 3423{\cdot}01 \times 0{\cdot}000\,0918 = 0{\cdot}31\,,$$

тако да, према условима задатка, за тачне вредности углова имамо:

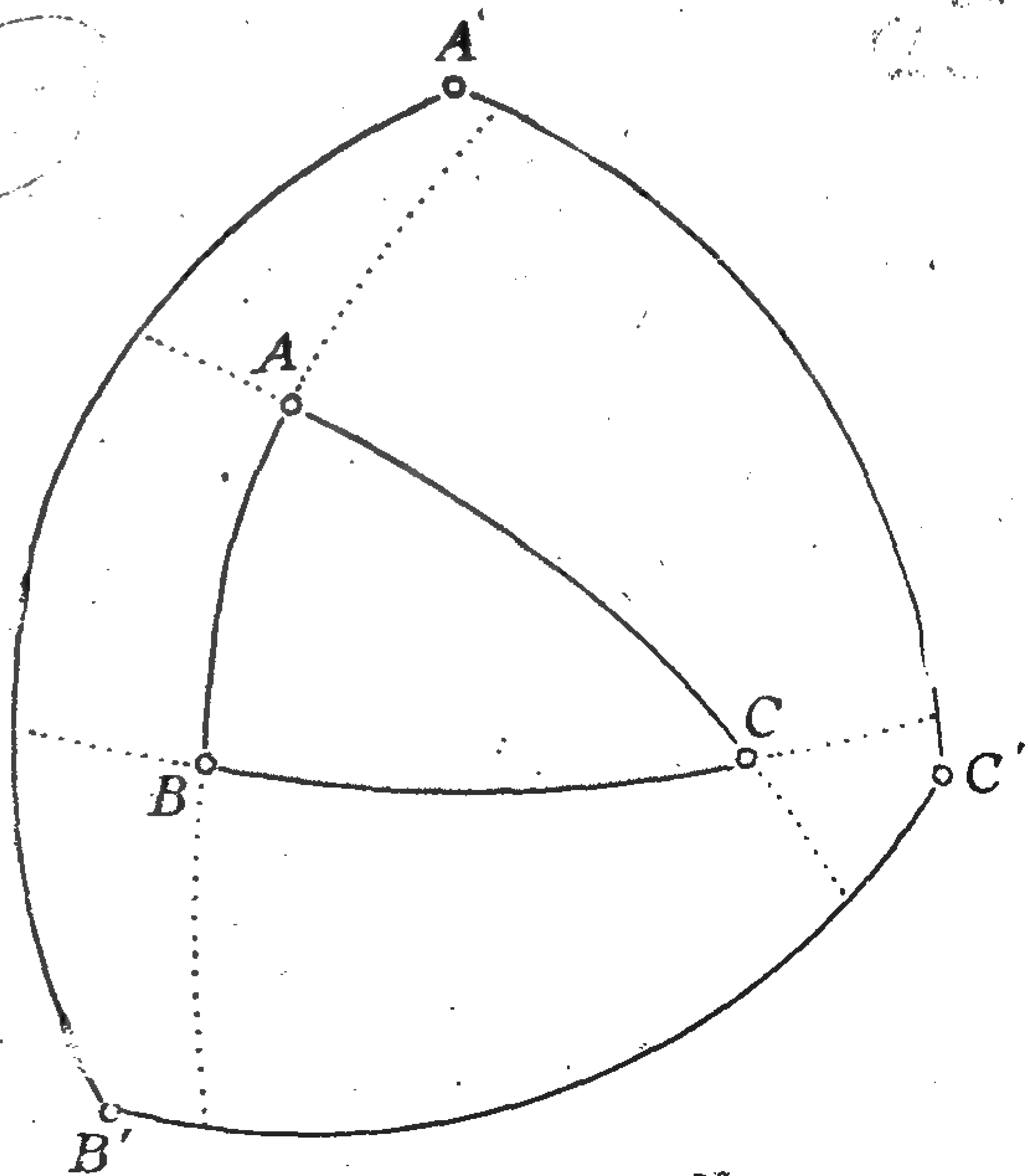
$$\alpha = 0^0\,57'\,2''{\cdot}69 = 3422''{\cdot}69$$
и
$$\beta = 0^0\,57'\,2''{\cdot}70 = 3422''{\cdot}70.$$



Сл. 7.

6. Нека је у сферном троуглу ABC (в. сл. 7) угао C већи од угла A. Одмеримо у темену C угао $\gamma = A$. Тако ћемо добити једнакокраки сферни троугао ACD, у којем је $AD = CD$. Како је, према познатом ставу, $CD + DB > BC$, дакле и $AD + DB > BC$, то је $AB > BC$. Доиста, дакле, већем углу насупрот у сферном троуглу налази се већа страна.

За доказ да се, и обрнуто, већој страни насупрот налази већи угао, помоћи ћемо се поларним сферним троуглом $A'B'C'$ (в. сл. 8). Међу елементима оваквих двају сферних троуглова постоје, као што знамо, везе $c + C' = a + A' = 180^0$, или $c - a = A' - C'$. Значи, ако је $c > a$ биће и $A' > C'$. Но онда ће, према претходном ставу, у поларном сферном троуглу бити и $a' > c'$. А како, опет, према вези међу елементима ових сферних троуглова имамо $a' + A = c' + C = 180^0$, или $a' - c' = C - A$, то из $a' > c'$ следује да ће, доиста, у сферном троуглу ABC, у којем је $c > a$, бити и $C > A$, то јест већој страни на супрот налазити се већи угао.



Сл. 8.

7. Да бисмо доказали тврђење, продужимо сваку од страна датог сферног троугла до половине великог круга (стране AB и AC продужимо за BA' и CA', да буде $ABA' = ACA' = \pi$). Тако ћемо за свако теме и две стране датог сферног троугла добити по један сферни двоугао, као $ABA'C$ (в. сл. 9). Сваки

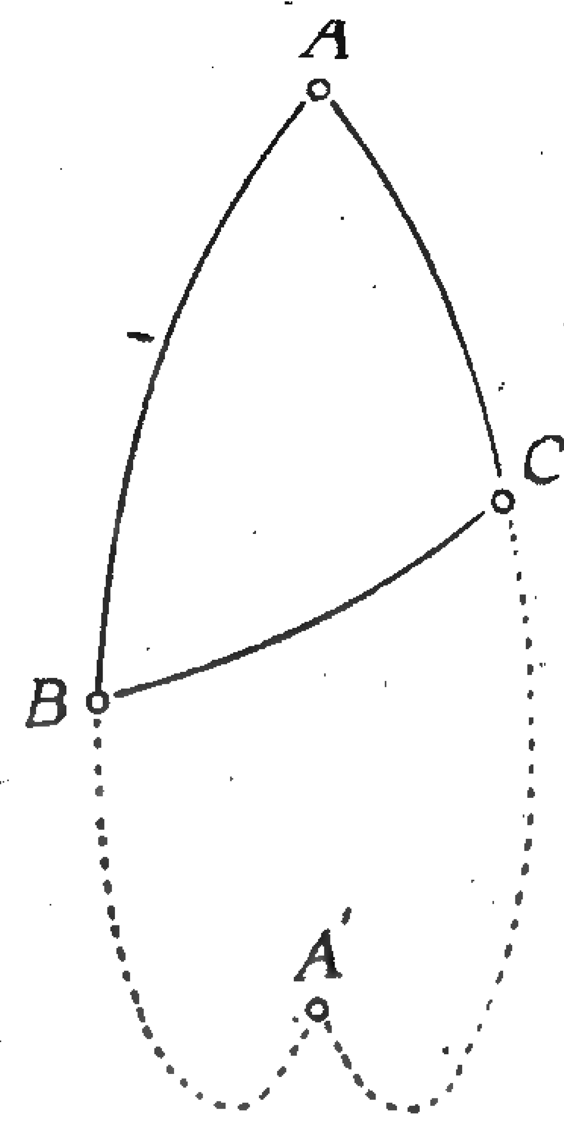
од њих састоји се из по два сферна троугла: датог, ABC, и допунског, $BA'C$. Углови овог су, то јест допунског: $\pi - B$, $\pi - C$, A. За њих имамо неједначину

$$(\pi - B) + (\pi - C) + A > \pi, \quad \text{или} \quad C - A < \pi - B,$$

што је и требало показати. На сличан начин доказује се да је и

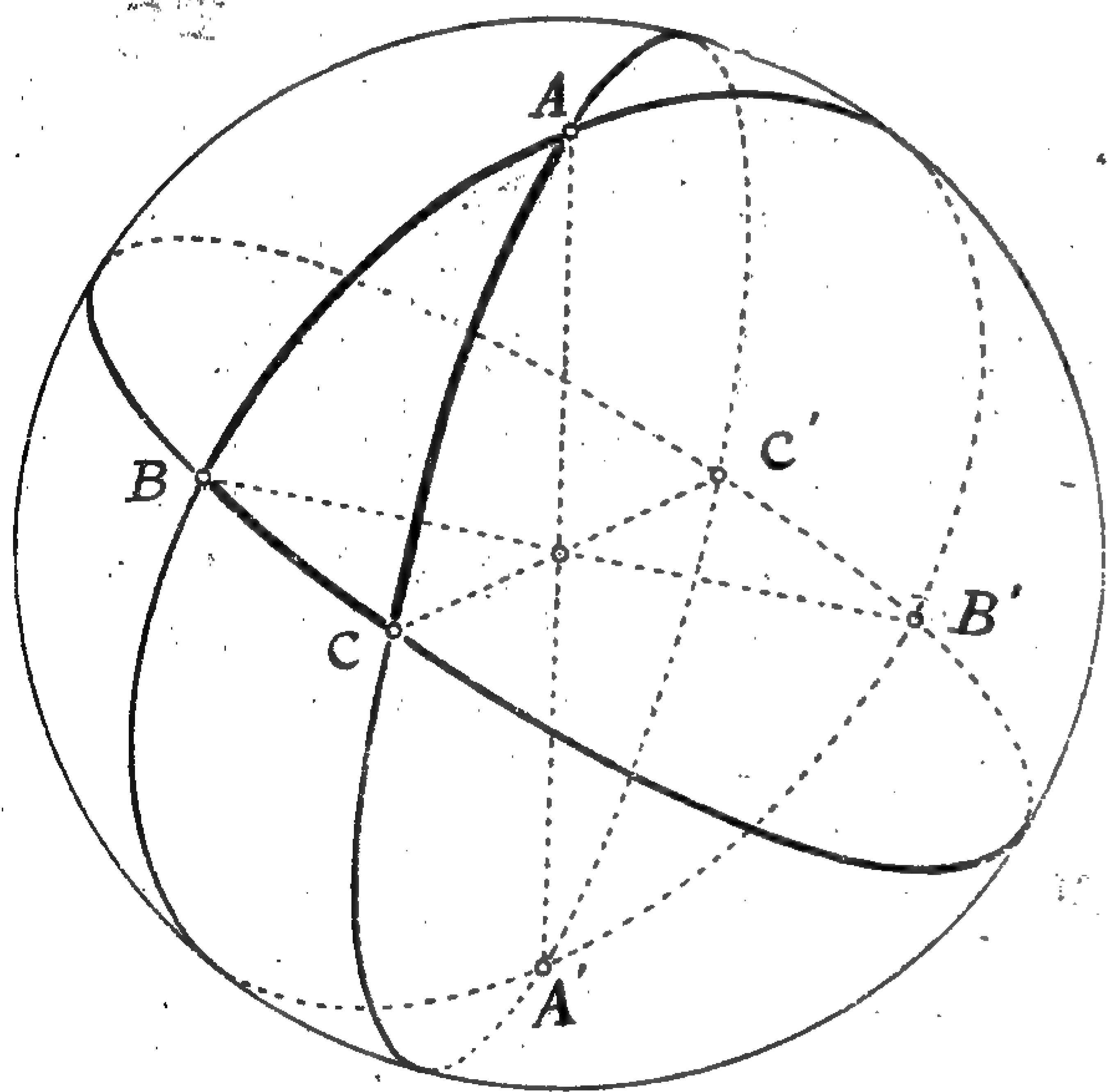
$$A - B < \pi - C, \quad \text{и} \quad B - C < \pi - A.$$

Из ових неједначина закључујемо да ће у правоуглом сферном троуглу, рецимо, кад је $C = \frac{\pi}{2}$, бити $A - B < \frac{\pi}{2}$ и $A + B < \frac{3\pi}{2}$; то јест разлика углова на хипотенузи мања од $\frac{\pi}{2}$, а збир њихов мањи од $\frac{3\pi}{2}$.



Сл. 9.

8. Да бисмо извели образац за површину сферног троугла ABC (в. сл. 10), продужимо му сваку од страна до половине великог круга. Добићемо тако три сферна двоугла: $ABA'CA$, $BCB'AB$ и $CAC'BC$. Означимо им површине са p_A, p_B, p_C.



Сл. 10.

Означимо са S површину сфере; онда је

$$p_A = \frac{A^0}{360^0} \cdot S, \qquad p_B = \frac{B^0}{360^0} \cdot S,$$

$$p_C = \frac{C^0}{360^0} \cdot S,$$

или

$$p_A = \frac{A}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2AR^2,$$

$$p_B = \frac{B}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2BR^2,$$

$$p_C = \frac{C}{2\pi} \cdot 4R^2\pi = 2R^2C,$$

где су са A^0, B^0, C^0 означени углови сферног троугла у степенима, а са A, B, C у радијанима ; са R полупречник сфере.

Са сл. 10 видимо да је

$$p_A + p_B + p_C = (ABC + CB'A) + (BCA + AC'B) + (CAB + BA'C).$$

Ако приметимо да је $BA'C = B'AC'$, па у последњем члану на десној страни извршимо ту замену, имаћемо

$$p_A + p_B + p_C = (ABC + CB'A + AC'B + B'AC') + 2ABC = \frac{1}{2}S + 2p,$$

где је са p означена површина датог сферног троугла, ABC. Унесемо ли у ову једначину за површине сферних двоуглова, p_A, p_B, p_C, напред дате вредности, добићемо за површину сферног троугла ABC

$$2p = \frac{S}{360^0}(A^0 + B^0 + C^0 - 180^0), \text{ или } p = \frac{R^2\pi}{180^0}(A^0 + B^0 + C^0 - 180^0) = \frac{\varepsilon^0}{180^0}R^2\pi;$$

односно

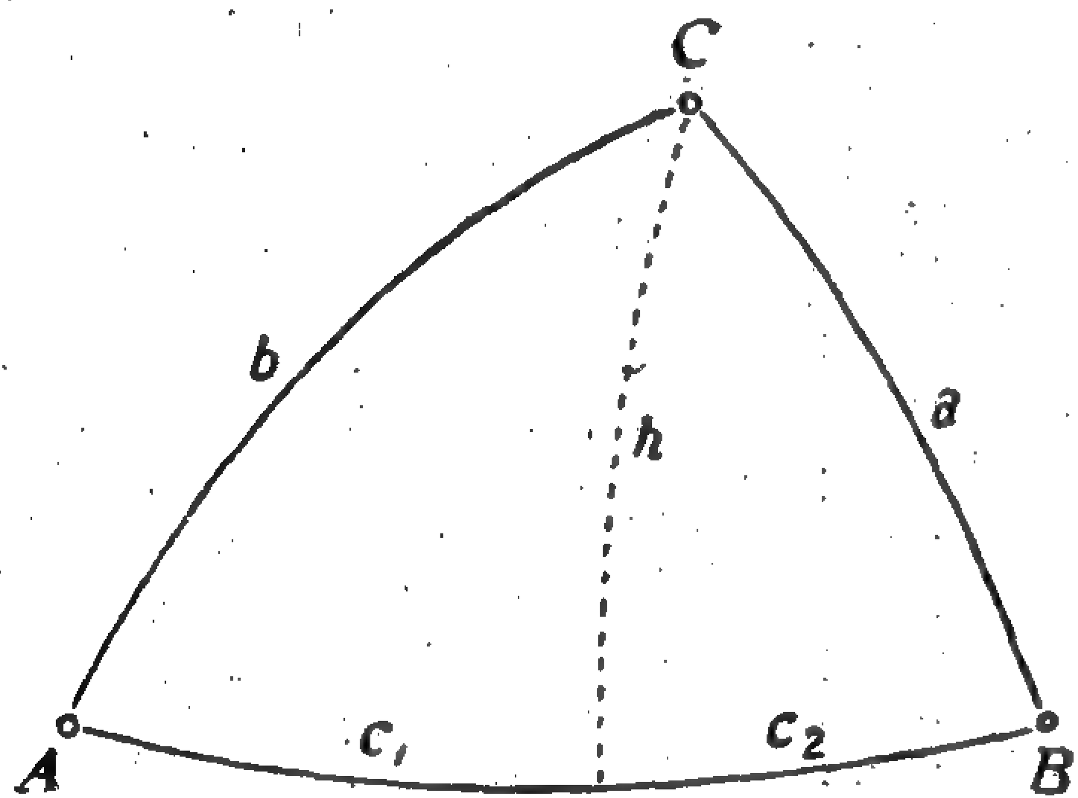
$$2R^2(A + B + C) = 2R^2\pi + 2p, \text{ или } p = R^2(A + B + C - \pi) = R^2\varepsilon,$$

при чему смо са ε^0 означили вишак преко 180^0, односно са ε вишак преко π — збира углова датог сферног троугла, то јест такозвани сферни ексцес.

9. $A^0 + B^0 + C^0 = 80^0 + 70^0 + 60^0 = 210^0$;

значи, за сферни ексцес имаћемо, у овом случају, $\varepsilon = 30^0 = \frac{\pi}{6}$. Према томе за површину сферног троугла налазимо

$$p = \frac{30^0}{180^0}\pi = \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{24},$$



Сл. 11.

што ће рећи двадесетчетврти део површине сфере полупречника једнака јединици.

10. Спуштањем из темена C лука великог круга нормално на страну c сферног троугла ABC (в. сл. 11) добивају се два правоугла сферна троугла, зваћемо их леви и десни. Стране левога су b, h, c_1; стране деснога су h, c_2, a. При томе је

$$c_1 + c_2 = c, \qquad \text{или} \qquad c_2 = c - c_1.$$

За леви правоугли сферни троугао имамо

$$\cos b = \cos h \cdot \cos c_1 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg} c_1 = \operatorname{tg} b \cdot \cos A.$$

Десни правоугли сферни троугао даје, опет,

$$\cos a = \cos h \cdot \cos c_2 = \cos h \cdot \cos(c - c_1).$$

Поделимо ли ову једначину првом од горњих двеју једначина, имаћемо

$$\cos a = \cos b \cdot \sec c_1 \cdot \cos(c - c_1) = \cos b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \operatorname{tg} c_1.$$

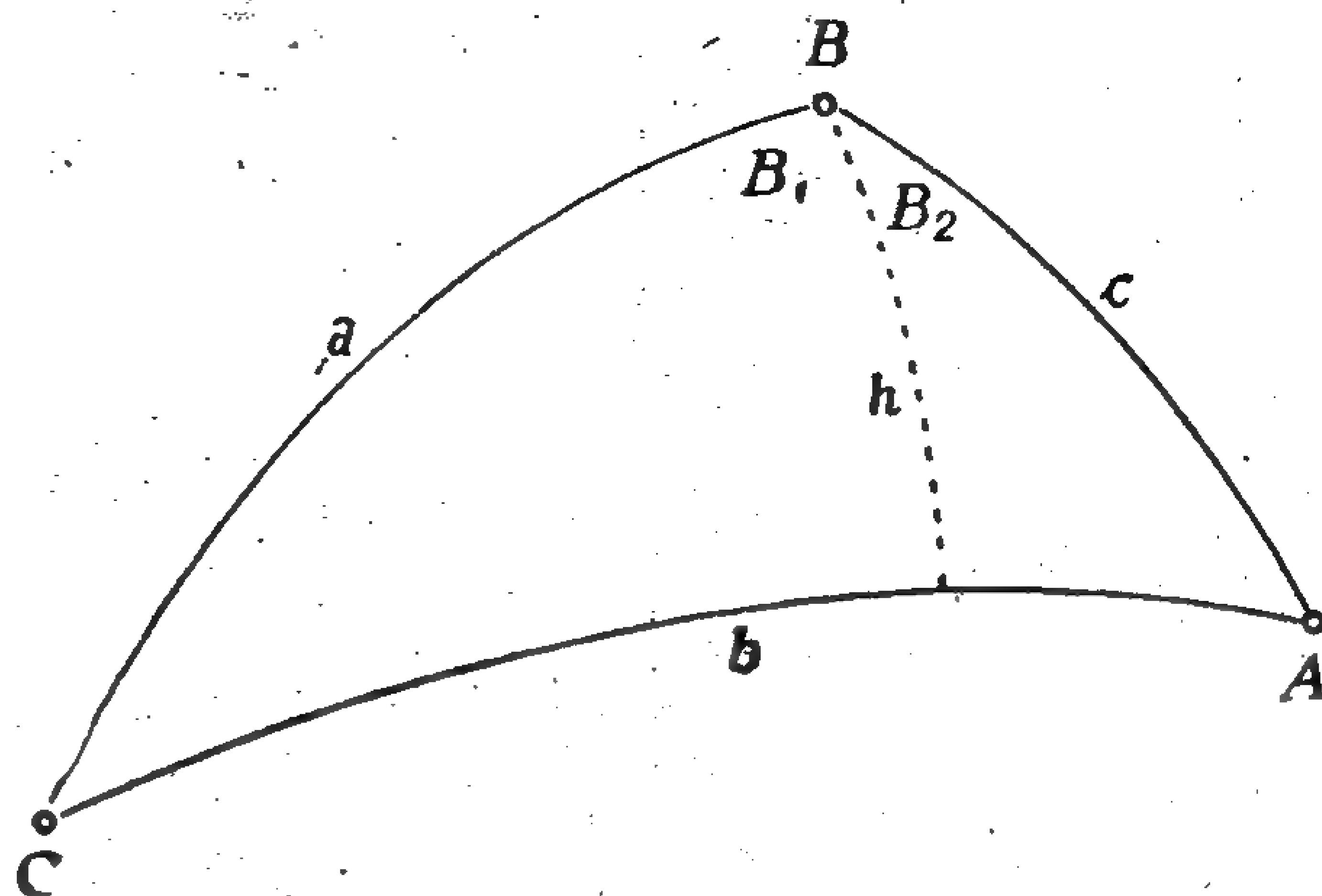
Сменимо ли још у другом члану, на десној страни, $\operatorname{tg} c_1$ његовом напред датом вредношћу, добивамо

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

а то је тражени основни образац Сферне тригонометрије.

11. Спуштањем из темена B лука великог круга нормално на страну b сферног троугла ABC (в. сл. 12) добивају се два правоугла сферна троугла; зваћемо их леви и десни. За ове, као што са сл. 6 видимо, имамо

$$\cos h = \cos A \cdot \operatorname{cosec} B_2 = \\ = \cos C \cdot \operatorname{cosec} B_1.$$



Сл. 12.

Са сл. 12 видимо, даље, да је $B_1 + B_2 = B$, то јест $B_2 = B - B_1$. Према томе

$$\cos A \cdot \sin B_1 = \cos C \cdot \sin B \cdot \cos B_1 - \\ - \cos C \cdot \cos B \cdot \sin B_1,$$

или $$\cos A = \cos C \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} B_1 - \\ - \cos C \cdot \cos B.$$

За леви правоугли сферни троугао имамо, међутим,

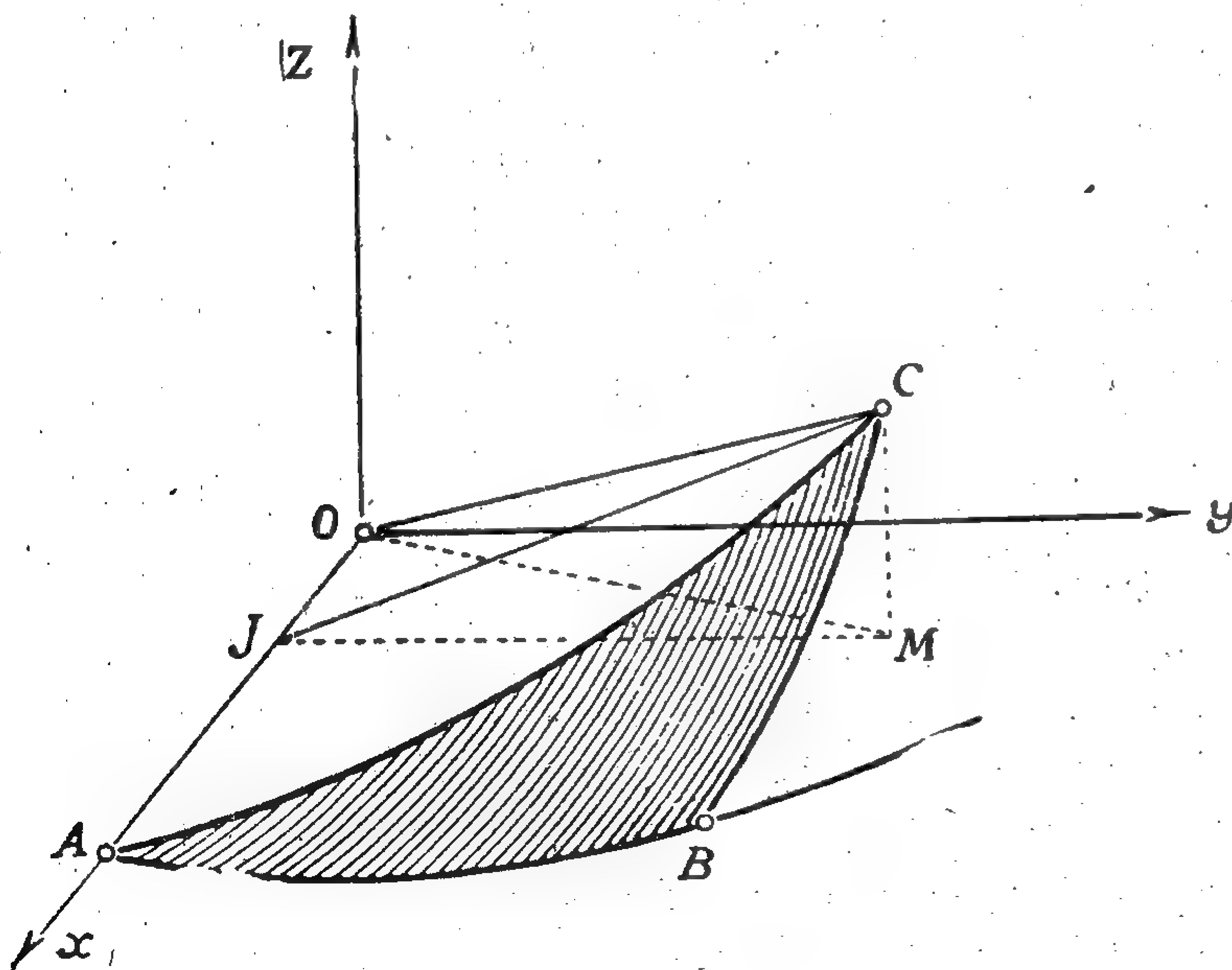
$$\cos a = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} B_1, \qquad \text{или} \qquad \operatorname{ctg} B_1 \cdot \cos C = \cos a \cdot \sin C.$$

Извршимо ли замену у једначини за $\cos A$, добивамо

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

а то је тражени образац IV групе (в. Преглед на стр. 8).

Треба, међутим, напоменути да је извођење овог обрасца непосредније ако се примени основни образац, из претходног задатка, на поларни троугао датог сферног троугла, па користе везе што постоје међу елементима тих троуглова.

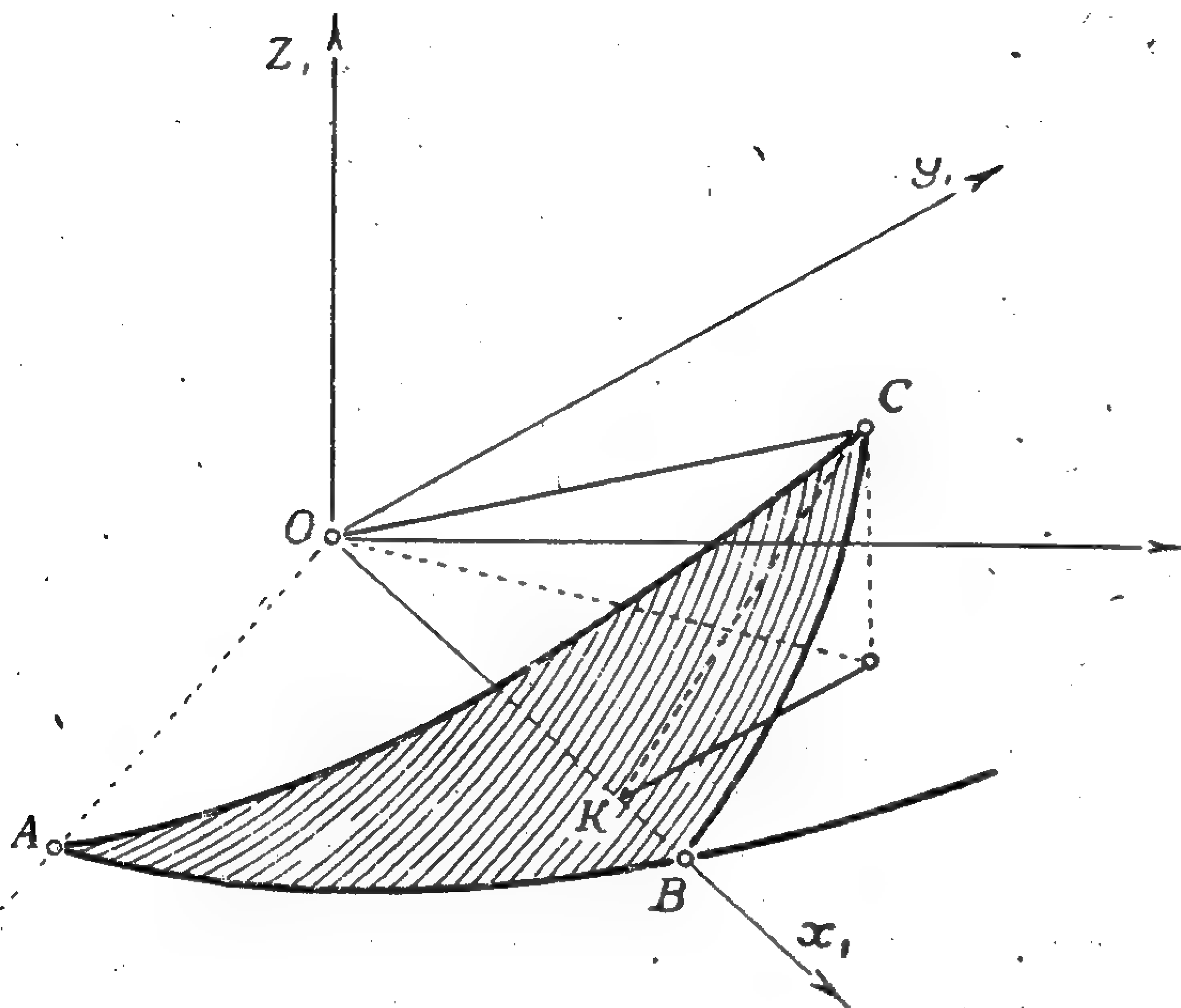


Сл. 13.

12. Нека ја дат, на сфери са полупречником ($OA = OB = OC = 1$) једнаким јединици и средиштем у O, сферни троугао ABC (в. сл. 13). Из средишта, као почетка, повуцимо троосни координатни систем $OXYZ$, са OAB равни као основном, правцем OA као x-осом и смером од A ка B као позитивним у основној равни. У том координатном систему имаћемо за координате темена C, пошто је $OC = 1$,

$$x = OJ = \cos b, \qquad y = JM = \sin b \cdot \cos A, \qquad z = MC = \sin b \cdot \sin A.$$

Обрнимо сад тај координатни систем око осе OZ, у позитивном смеру, за угао $AOB=c$, тако да сад OB буде нова x-оса; нова y-оса биће за $+\frac{\pi}{2}$ од ове; док z-оса остаје непромењена.



Сл. 14.

У овом координатном систему биће координате темена C (в. сл. 14).

$x_1=OK=\cos a,$

$y_1=KM=\sin a\cdot\cos(\pi-B),$

$z_1=MC=\sin a\cdot\sin(\pi-B).$

С друге стране, на основи теореме о пројекцијама, имамо за прелаз од једних ка другим координатама

$$x_1=x\cos c+y\sin c,$$
$$y_1=-x\sin c+y\cos c,$$
$$z_1=z.$$

Унесимо сад у ове једначине горе дате вредности координата и добивамо

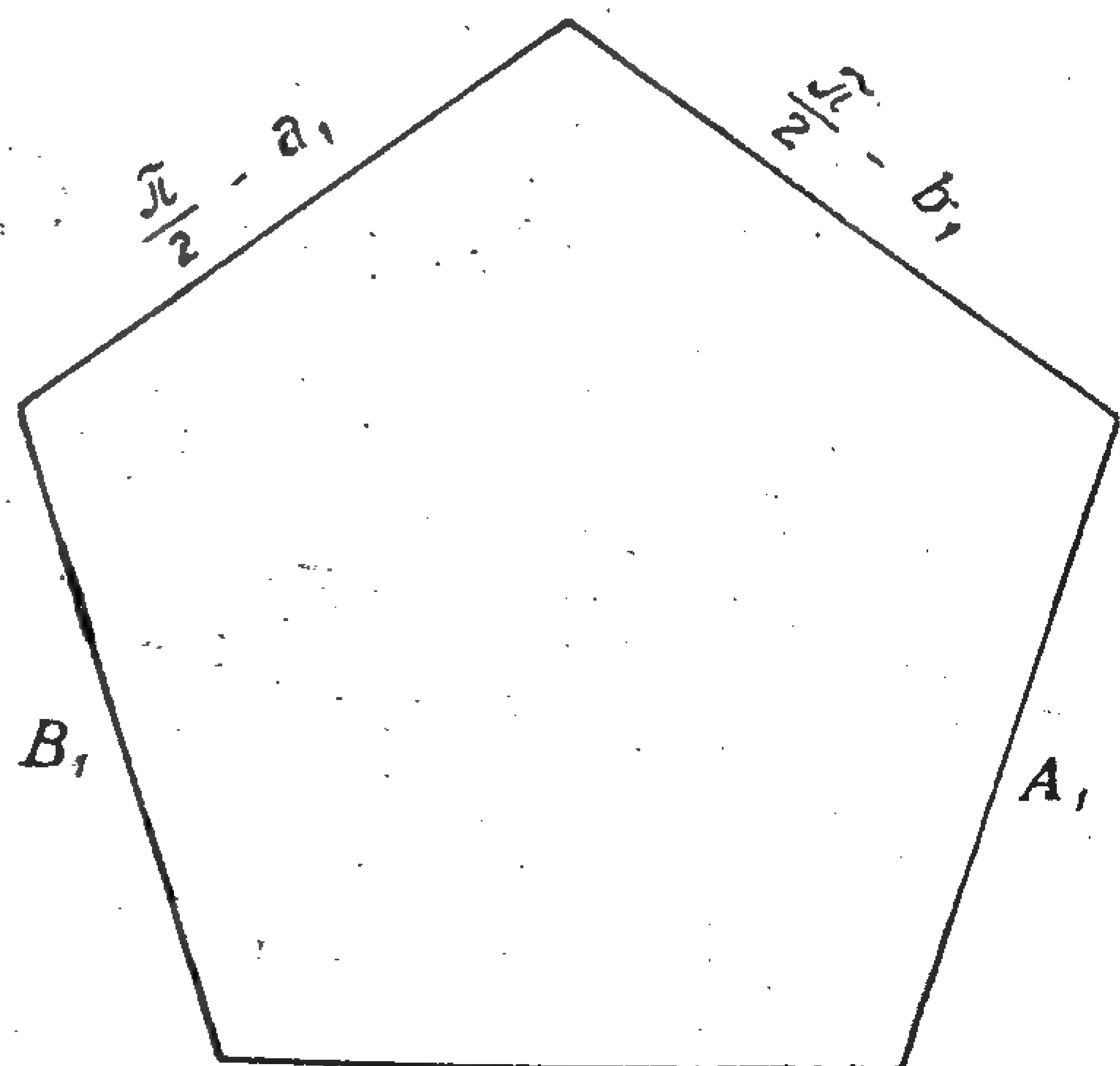
$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A,$$
$$\sin a\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A,$$
$$\sin a\cdot\sin B=\sin b\cdot\sin A;$$

а то је тражена Гаусова група образаца Сферне тригонометрије.

13. Познато је да је квадрантни сферни троугао поларни — правоуглог сферног троугла, и обратно. Према томе, ако су елементи квадрантног сферног троугла ABC: a, b, 90^0; A, B, C — његов поларни, правоугли сферни троугао, $A_1B_1C_1$, имаће за елементе

(1) $a_1=\pi-A,\quad b_1=\pi-B,\quad c_1=\pi-C;$

$A_1=\pi-a,\quad B_1=\pi-b,\quad C_1=\frac{\pi}{2}.$



Сл. 15.

Сетимо се сад Неперова мнемоничког правила за правоугле сферне троугле. Оно гласи: косинус било које стране петоугаоника на сл. 15 једнак је: производу котан-

генса налеглих страна; производу синуса наспрамних страна. Па унесимо одмах, место a_1, b_1,c_1, A_1 и B_1, елементе квадрантног сферног троугла, имаћемо

$$\cos(\pi - C) = \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(\pi - a)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - a)\cdot\sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - b)\cdot\sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - b),$$

$$\cos(\pi - a) = \sin(\pi - b)\cdot\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - C),$$

$$\cos(\pi - b) = \sin(\pi - a)\cdot\sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - C).$$

Ако ове обрасце напишемо нешто само једноставније

$$\cos(\pi - C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin a\cdot\sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\cdot\operatorname{ctg} b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin b\cdot\sin(\pi - C) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\operatorname{ctg} b,$$

$$\cos a = \sin b\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - C),$$

$$\cos b = \sin a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi - C).$$

Другим речима, и за квадрантни сферни троугао вреди Неперово мнемоничко правило, под условом да стране петоугаоника буду узете оне и распоређене онако како је приказано на сл. 16.

14. Дати образац,

$$\operatorname{ctg} a\cdot\sin b = \operatorname{ctg} A\cdot\sin C + \cos b\cdot\cos C,$$

написаћемо у облику

$$\operatorname{ctg} a\cdot\sin b\cdot\sin A = \cos A\cdot\sin C + \cos b\cdot\sin A\cdot\cos C.$$

Ако уведемо помоћне величине m и M, дефинисане једначинама

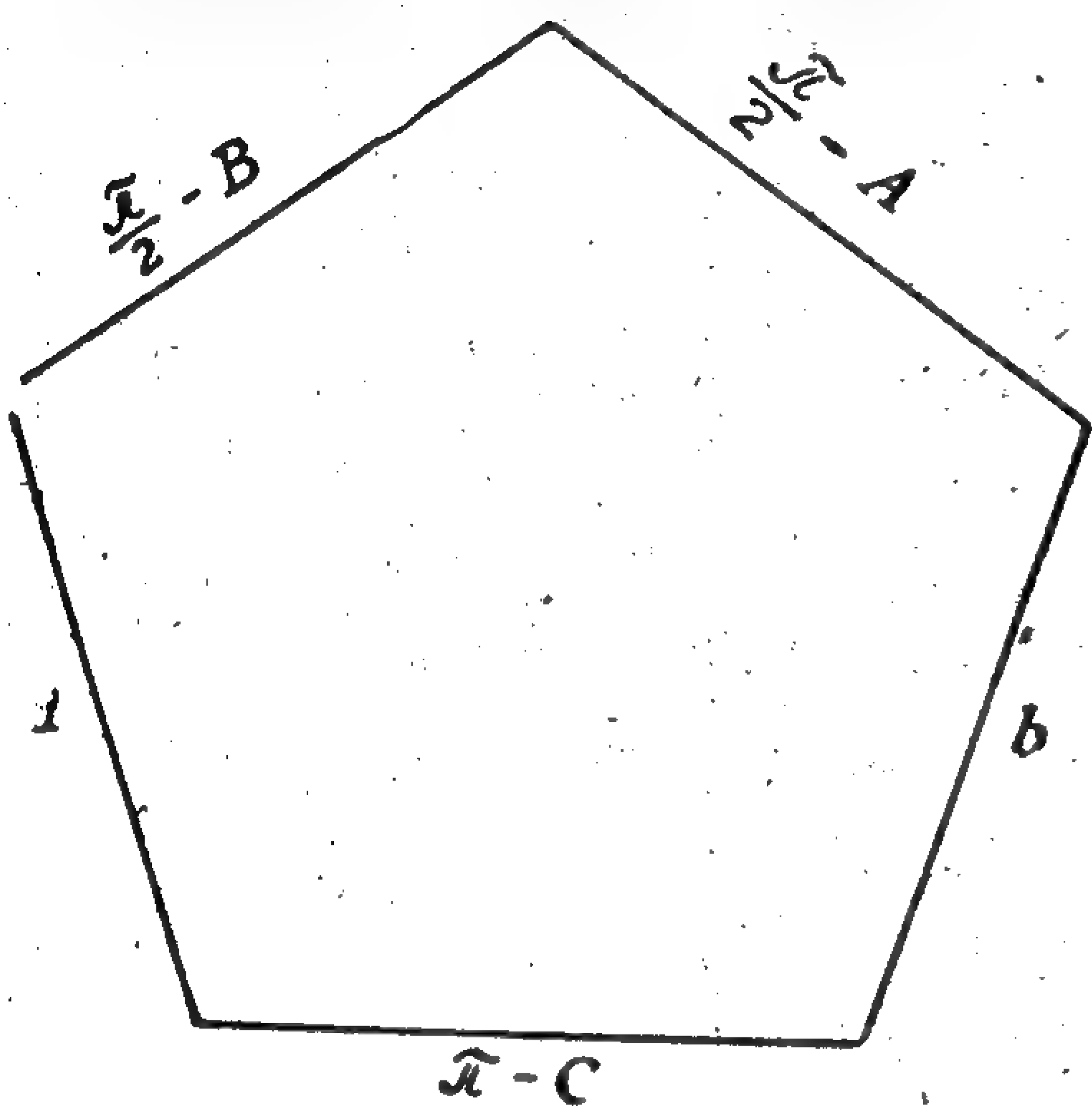
$$\cos A = m\cdot\sin M,$$

$$\cos b\cdot\sin A = m\cdot\cos M, \quad \text{са } m > 0,$$

последњи образац постаје

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \sin A = m \cdot \cos (M - C).$$

Или, ако из једне од претходних једначина, рецимо из друге, одредимо m и унесемо у ову, налазимо, пошто скратимо,



Сл. 16.

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos (M - C) \cdot \sec M;$$

и тако за одређивање угла C добивамо образац

$$\cos (M - C) = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos M,$$

са углом M одређеним из

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{ctg} A \cdot \sec b,$$

а квадрантом из двеју горњих једначина.

15. 1) Кад су у сферном троуглу дате две стране, b и c, и угао међу њима, A, трећа страна, a, и један од налеглих углова, рецимо C, израчунавају се помоћу Гаусове групе образаца, и то, у овом случају, помоћу

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A.$$

Ови се подешавају за логаритамско рачунање стављајући

$$\cos c = m \cdot \cos M,$$

$$\sin c \cdot \cos A = m \cdot \sin M, \qquad \text{са } m > 0,$$

што даје

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} c \cdot \cos A \qquad \text{и} \qquad m = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M.$$

Према томе, за израчунавање угла C имамо, из

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = m \cdot \sin (b - M) = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M \cdot \sin (b - M),$$

ако поделимо прву једначину другом,

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \sin M \cdot \operatorname{cosec} (b - M).$$

Пошто тако одредимо угао C, страну a можемо наћи из

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} C,$$

но не са свом потребном нумеричком тачношћу. Боље је последњу једначину комбиновати са

$$\cos a = \sin c \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} M \cdot \cos (b - M),$$

тако да се добије

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \cdot \sin M \cdot \operatorname{cosec} C \cdot \sec (b - M).$$

За проверавање нумеричког рада могу се користити једначине

$$m \cdot \sin M = \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin a \cdot \cos C = m \cdot \sin (b - M),$$

из којих добивамо множењем

$$\sin M \cdot \sin a \cdot \cos C = \sin c \cdot \cos A \cdot \sin (b - M).$$

Дати елементи: $b = 37^{\circ}\,47'\,18''$, $c = 74\;51\;50$, $A = 44\;10\;40$.

				Проверавање:	
[tg c]	0·56 784	[cosec $(b-M)$]	0·28 133 n	[sin M]	9·97 112
[cos A]	9·85 563	[tg A]	9·98 754	[sin a]	9·88 995
[tg M]	0·42 347	[sin M]	9·97 112	[cos C]	9·69 789 n
$M =$	$69^{\circ}\,20'\;\;8''$	[cosec C]	0·06 212	$\Sigma_{(I)}$	9·55 896 n
$b - M =$	$-31\;\;32\;\;50$	[sec $(b-M)$]	0·06 946	[sin c]	9·98 467
$C =$	119 55 6	[tg C]	0·23 999 n	[cos A]	9·85 563
$a =$	50 54 37	[tg a]	0·09 024	[sin $(b-M)$]	9·71 867 n
				$\Sigma_{(II)}$	9·55 897 n

2) Ако треба, кад су дате две стране и угао међу њима, израчунати све остале елементе троугла, може се опет применити горњи поступак, то јест Гаусова група образаца, и, пошто се одреде a и C, други угао, B, одредити на исти начин као и C. У овом случају би се добило $B = 33^{\circ}\,22'\,41''$.

Непосреднији је, међутим, поступак и нумерички тачнији, кад се траже сви елементи, да се користе Неперове аналогије. Како треба из b, c и A одредити a, B и C, користићемо обрасце

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}(b - c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A \cdot \sec \frac{1}{2}(b + c),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C) = \sin \frac{1}{2}(b - c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(b + c),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(B + C) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(B - C),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c) \cdot \cos \frac{1}{2}(B + C) \cdot \sec \frac{1}{2}(B - C).$$

Радићемо са седам децимала, да бисмо тачније проверили резултате претходног рада.

Дати елементи: $\begin{cases} b = 37^0\,47'\,18''{\cdot}00, \\ c = 74\;\;51\;\;50\;{\cdot}00, \\ A = 44\;\;10\;\;40\;{\cdot}00; \end{cases}$ $\quad b+c = 112^0\,39'\,08''{\cdot}00,$ $\quad b-c = -37\;\;4\;\;32\;{\cdot}00;$

$$\frac{1}{2}(b+c) = 56^0\,19'\,34''{\cdot}00,$$

$$\frac{1}{2}(b-c) = -18\;\;32\;\;16\;{\cdot}00.$$

$\left[\sec\frac{1}{2}(b+c)\right]$	0·256 1257
$\left[\cos\frac{1}{2}(b-c)\right]$	9·976 8606
$\left[\mathrm{ctg}\frac{1}{2}A\right]$	0·391 6537
$\left[\sin\frac{1}{2}(b-c)\right]$	9·502 3313 n
$\left[\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(b+c)\right]$	0·079 7687
$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B+C)\right]$	0·624 6400
$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B-C)\right]$	9·973 7537 n

$$\frac{1}{2}(B+C) = 76^0\,38'\,55''{\cdot}62,$$

$$\frac{1}{2}(B-C) = -43\;\;16\;\;11\;{\cdot}05,$$

$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(b-c)\right]$	9·525 4706 n
$\left[\sin\frac{1}{2}(B+C)\right]$	9·988 1007
$\left[\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(B-C)\right]$	0·164 0345 n
$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(b+c)\right]$	0·176 3570
$\left[\cos\frac{1}{2}(B+C)\right]$	9·363 4607
$\left[\sec\frac{1}{2}(B-C)\right]$	0·137 7881
$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}a\right]$	9·677 6058 9·677 6058

$$\frac{1}{2}a(1) = 25^0\,27'\,15''{\cdot}80,$$

$$\frac{1}{2}a(2) = 25\;\;27\;\;15\;{\cdot}80.$$

Резултати:

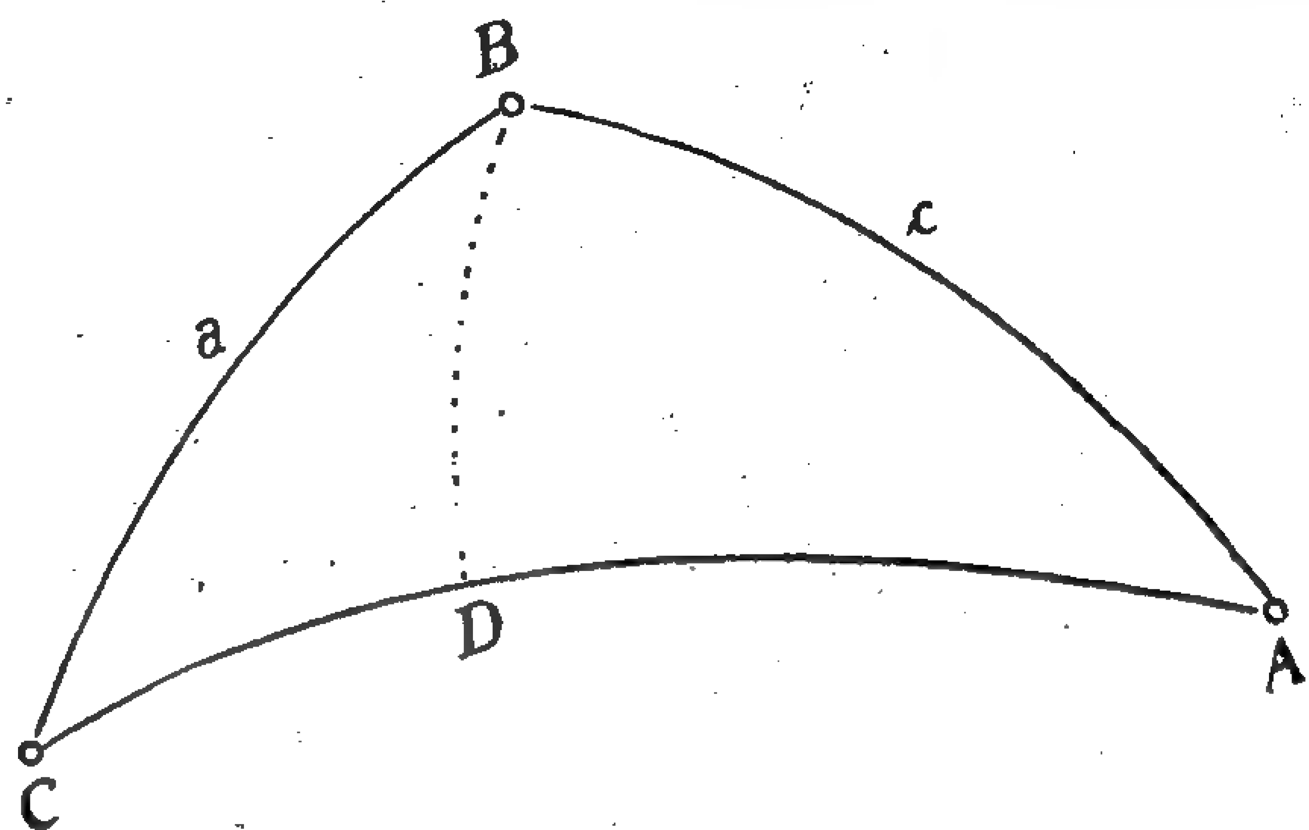
$a = 50^0\,54'\,31''{\cdot}60,\quad B = 33^0\,22'\,44''{\cdot}58,\quad C = 119^0\,55'\,06''{\cdot}67.$

16. Геометриско значење помоћних величина m и M, дефинисаних у последњем задатку 1), помоћу једначина

$$m \cdot \cos M = \cos c,$$

$$m \cdot \sin M = \sin c \cdot \cos A,$$

постаје очигледно ако из темена B сферног троугла ABC (в. сл. 17) спустимо лук великог круга BD нормално на страну $b=AC$. Косоугли сферни троугао ABC биће на тај начин подељен у два правоугла сферна троугла: BCD и DAB.



Сл. 17.

Применимо на други од ових троуглова обрасце за правоугле сферне троугле. Добићемо

$$\cos c = \cos BD \cdot \cos DA$$

и

$$\sin c \cdot \cos A = \cos BD \cdot \sin DA.$$

Упоредимо ли ове са горњим једначинама, налазимо

$$\cos BD = m, \qquad DA = M,$$

то јест геометриска значења помоћних величина.

17. Узимајући да се промене о којима је овде реч могу сматрати као диференцијали, до израза за промене тражених, da и dC, у функцији датих промена, db, dc и dA и елемената, долазимо диференцирањем једначина Гаусове групе. Тако из прве налазимо

$$-\sin a \cdot da = (-\sin b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \cos A) \cdot db +$$
$$+ (-\cos b \cdot \sin c + \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A) \cdot dc - \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA,$$

или, ако место израза у заградама ставимо величине које они, према Гаусовим обрасцима, претстављају, налазимо

$$-\sin a \cdot da = -\sin a \cdot \cos C \cdot db - \sin a \cdot \cos B \cdot dc - \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot dA,$$

то јест, пошто поделимо величином $\sin a \neq 0$,

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA.$$

Израз за промену dC добићемо диференцирањем једначине

$$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A.$$

И налазимо

$$\cos a \cdot \sin C \cdot da + \sin a \cos C \cdot dC = \cos c \cdot \sin A \cdot dc + \sin c \cdot \cos A \cdot dA.$$

Унесемо ли, место da, горе нађену вредност и средимо ли имаћемо

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot db + (\cos c \cdot \sin A -$$
$$- \cos a \cdot \cos B \cdot \sin C) \cdot dc + (\sin c \cdot \cos A - \cos a \cdot \sin b \cdot \sin^2 C) \cdot dA.$$

За косоугли и његов поларни сферни троугао имамо, међутим, обрасце, опет Гаусове групе,

$$\sin A \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a,$$
$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C.$$

Користећи ове једначине, добићемо на десној страни горње једначине

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin \cdot C \cos C \cdot db + \cos C \cdot \sin B \cdot dc +$$
$$+ (\cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C - \cos a \cdot \sin b \cdot \sin^2 C) \cdot dA.$$

Или, ако приметимо да се израз у загради, у трећем члану на десној страни, може написати

$$\cos a \cdot \sin b\,(1-\sin^2 C) - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C = -\cos C\,(\cos b \cdot \sin a -$$
$$- \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C) = -\cos C \cdot \sin c \cdot \cos B,$$

имаћемо

$$\sin a \cdot \cos C \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot db + \sin B \cdot \cos C \cdot dc - \sin c \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot dA,$$

односно, пошто поделимо величином $\cos C \neq 0$, имаћемо

$$\sin a \cdot dC = -\cos a \cdot \sin C \cdot db + \sin B \cdot dc - \sin c \cdot \cos B \cdot dA.$$

За тражену промену угла налазимо одавде

$$dC = -\operatorname{ctg} a \cdot \sin C \cdot db + \operatorname{cosec} a \cdot \sin B \cdot dc - \operatorname{cosec} a \cdot \sin c \cdot \cos B \cdot dA.$$

Примећујемо код ових израза за промене елемената да садрже не само дате елементе, то јест b, c и A, већ и елементе које је требало одредити, дакле a и C, шта више и B, који није (у задатку) ни дат, ни тражен. То значи да се за израчунавање промена елемената мора претходно потпуно решити сферни троугао, то јест морају израчунати сви његови елементи.

Према томе, за сферни троугао одређен елементима датим у Зад. 15 и променама истих елемената датим у овом задатку, имаћемо, према горњим обрасцима, рачунајући све у угловној мери:

Дати елементи и промене	$b = 37^\circ 47' 18''$,	$db = +10''$,	израчунати елементи:	$a = 50^\circ 54' 37''$,
	$c = 74\ 51\ 50$,	$dc = +20$,		$B = 33\ 22\ 41$,
		$dA = +30$;		$C = 119\ 55\ 6$.

$\operatorname{ctg} a = 0{\cdot}812$,	$\sin C = 0{\cdot}867$,	$\cos C \cdot db = -\ 4''{\cdot}99$
$\operatorname{cosec} a = 1{\cdot}288$,	$\cos C = -0{\cdot}499$,	$\cos B \cdot dc = +16{\cdot}70$
$\sin b = 0{\cdot}613$,	$\sin b \sin C = F = 0{\cdot}531$,	$F \cdot dA = +15{\cdot}93$
$\sin c = 0{\cdot}965$,	$\operatorname{ctg} a \cdot \sin C = G = 0{\cdot}704$,	$da = +27{\cdot}64$
$\sin B = 0{\cdot}550$,	$\operatorname{cosec} a \cdot \sin B = H = 0{\cdot}709$,	$-G \cdot db = -\ 7{\cdot}04$
$\cos B = 0{\cdot}835$;	$\operatorname{cosec} a \cdot \sin c \cdot \cos B = J = 1{\cdot}039$;	$H \cdot dc = +14{\cdot}18$
		$-J \cdot dA = -31{\cdot}17$
		$dC = -24{\cdot}03.$

18. Да бисмо могли израчунати висину, $AD = h$ (в. сл. 18), треба да је познат још бар један од углова, B или C. А да бисмо израчунали

медијану, $AE=\mu$, треба да знамо страну a. Стога је најједноставније одредити с в е непознате елементе: a, B и C, дакле помоћу Неперових аналогија. А пошто је у решењу Зад. 15 дата већ шема за примену Неперових аналогија, нећемо је понављати већ дати готове резултате. За непознате елементе налазимо:

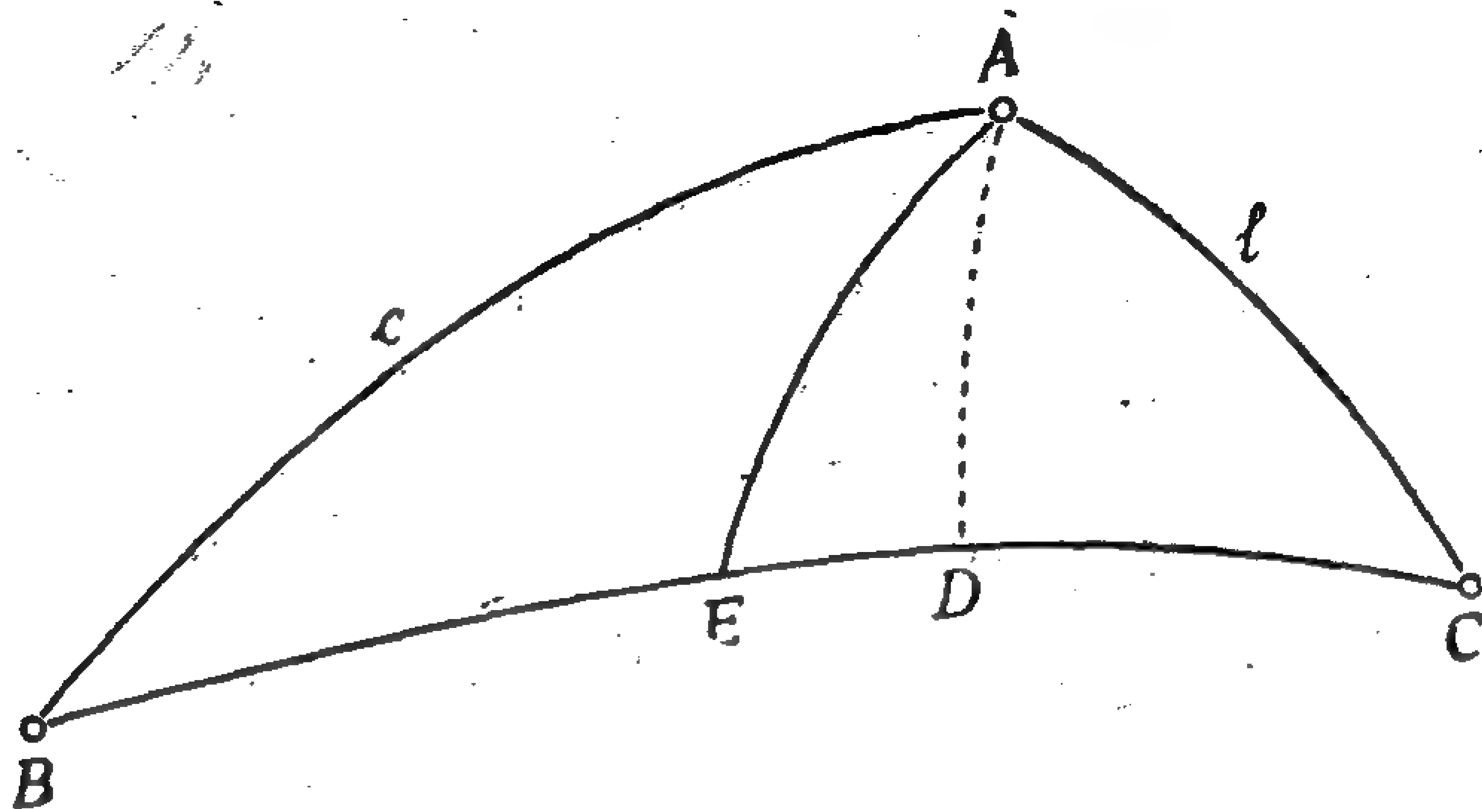
$$a=62^0\,28'\,12'',$$

$$B=\ 8^0\,27'\ \ 9'',$$

$$C=22^0\ \ 2'\,47''.$$

За висину, $AD=h$, имамо из троуглова ABD и ADC:

$$\sin h=\sin b\cdot\sin C=\sin c\cdot\sin B.$$



Сл. 18.

А за медијану, $AE=\mu$, имаћемо, ако означимо $BE=EC=\frac{a}{2}=\overline{a}$, из троугла ABE,

$$\cos c=\cos\mu\cdot\cos\overline{a}+\sin\mu\cdot\sin\overline{a}\cdot\cos E,$$

а из троугла AEC,

$$\cos b=\cos\mu\cdot\cos\overline{a}-\sin\mu\cdot\sin\overline{a}\cdot\cos E.$$

Сабирањем ових двеју једначина добивамо

$$\cos b+\cos c=2\cos\mu\cdot\cos\overline{a},$$

дакле

$$\cos\mu=\frac{1}{2}(\cos b+\cos c)\cdot\sec\overline{a},$$

или

$$\cos\mu=\cos\frac{1}{2}(b+c)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-c)\cdot\sec\overline{a}.$$

Но да бисмо μ нумерички тачније одредили, то јест да бисмо га добили (место преко cos) помоћу tg, ставићемо на десној страни

$$\cos\frac{1}{2}(b+c)\cdot\cos\frac{1}{2}(b-c)=\cos\psi,$$

тако да ће сад бити

$$\cos\mu=\cos\psi\cdot\sec\overline{a},$$

при чему треба имати на уму да је $0<\mu<\pi$.

Из последње једначине добивамо

$$1-\cos\mu=2\sin^2\frac{1}{2}\mu=(\cos\overline{a}-\cos\psi)\cdot\sec\overline{a},$$

$$1+\cos\mu=2\cos^2\frac{1}{2}\mu=(\cos\overline{a}+\cos\psi)\cdot\sec\overline{a}.$$

Дељењем ових двеју једначина добивамо

$$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}\mu = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\bar{a}+\psi)\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\psi-\bar{a}).$$

Овде ваља напоменути да помоћни угао ψ није горњом једначином, којом је дефинисан, и једнозначно одређен. Али је медијана, μ, приближно одређена ако су у сферном троуглу познати сви елементи. Према томе, за помоћни угао ψ, који служи искључиво да се μ нумерички тачније одреди, узеће се она од добивених вредности са којом се μ добива оно које треба.

$[\sin b]$	9·45 864,	$[\sin c]$	9·86 578,
$[\sin C]$	9·57 444,	$[\sin B]$	9·16 729,
$[\sin h]$	9·03 308;	$[\sin h]$	9·03 307;

$\frac{1}{2}(b+c) =$	$31^\circ 58' 17''$,	$\left[\cos\frac{1}{2}(b+c)\right]$	9·92 856,
$\frac{1}{2}(b-c) =$	$-15 \quad 15 \quad 47$;	$\left[\cos\frac{1}{2}(b-c)\right]$	9·98 441,
		$[\cos\psi]$	9·91 297.

И тако добивамо:

за висину $h = 6^\circ 11' 42''$; за $\psi = \pm 35^\circ 4' 27''$.

Како друга од двеју могућих вредности ψ не даје реално решење за μ, биће:

$\bar{a} = 31^\circ 14' \; 6''$,	$\frac{1}{2}(\bar{a}+\psi) = 33^\circ \; 9' 17''$,	$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\bar{a}+\psi)\right]$	9·81 508
$\psi = 35 \quad 4 \; 27$;			
$\bar{a}+\psi = 66^\circ 18' 33''$,	$\frac{1}{2}(\psi-\bar{a}) = \; 1 \; 55 \; 11$;	$\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\psi-\bar{a})\right]$	8·52 528,
$\psi-\bar{a} = \; 3 \; 50 \; 21$;			
		$2\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}\mu\right]$	18·34 036.

Према томе је $\left[\mathrm{tg}\frac{1}{2}\mu\right]$ 9·17 018, дакле:

$$\frac{1}{2}\mu = 8^\circ 25' 1'', \text{ или } \mu = 16^\circ 50' 2''.$$

19. Кад су дате три стране сферног троугла углове му одређујемо помоћу Бординих образаца. Ако ставимо $a+b+c=2s$, ти обрасци [illegible] гледају

$$[illegible]\; b)\cdot \sin(s-c)\cdot \mathrm{cosec}\, s\cdot \mathrm{cosec}\,(s-a)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = +[\sin (s-c) \cdot \sin (s-a) \cdot \operatorname{cosec} s \cdot \operatorname{cosec} (s-b)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = +[\sin (s-a) \cdot \sin (s-b) \cdot \operatorname{cosec} s \cdot \operatorname{cosec} (s-c)]^{\frac{1}{2}}.$$

А ако још ставимо

$$S = +[\sin (s-a) \cdot \sin (s-b) \cdot \sin (s-c) \cdot \operatorname{cosec} s]^{\frac{1}{2}},$$

Бордини обрасци добивају облик

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = S \cdot \operatorname{cosec} (s-a), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = S \cdot \operatorname{cosec} (s-b), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = S \cdot \operatorname{cosec} (s-c)$$

Према томе ћемо имати:

$a = 50^\circ 54' 32''$,	$[\sin (s-a)]$ 9·71 021,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} A\right]$ 9·60 835,
$b = 37\ 47\ 18$,	$[\sin (s-b)]$ 9·84 171,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} B\right]$ 9·47 685,
$c = 74\ 51\ 50$,	$[\sin (s-c)]$ 9·08 072,	$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} C\right]$ 0·23 784;
$2s = 163\ 33\ 40$,	$[\operatorname{cosec} s]$ 0·00 448,	$\frac{1}{2} A = 22^\circ\ 5' 20''$,
$s = 81\ 46\ 50$;	$2[S]$ 8·63 712,	$\frac{1}{2} B = 16\ 41\ 22$,
	$[S]$ 9·31 856;	$\frac{1}{2} C = 59\ 57\ 31$.
$s - a = 30^\circ 52' 18''$,		
$s - b = 43\ 59\ 32$,		
$s - c = 6\ 55\ 0$,		
$\Sigma = s = 81\ 46\ 50$;		

И тако за углове добивамо:

$$A = 44^\circ 10' 40'', \quad B = 33^\circ 22' 44'', \quad C = 119^\circ 55' 2''.$$

Нумерички рад можемо проверити помоћу синусних образаца:

$[\sin a]$ 9·88 994,	$[\sin b]$ 9·78 728,	$[\sin c]$ 9·98 466,
$[\sin A]$ 9·84 317,	$[\sin B]$ 9·74 050,	$[\sin C]$ 9·93 789,
Δ 0·04 677;	Δ 0·04 678;	Δ 0·04 677.

За одређивање промена углова у функцији промена трију страна и елемената сферног троугла можемо поћи од основног обрасца. Ако га диференцирамо добивамо, после извесних смена, образац који смо већ у решењу Зад. 17 извели

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA.$$

Из њега, цикличким померањем елемената, налазимо за одређивање тражених промена обрасце:

$$\sin b \cdot \sin C \cdot dA = da - \cos C \cdot db - \cos B \cdot dc,$$

$$\sin c \cdot \sin A \cdot dB = db - \cos A \cdot dc - \cos C \cdot da,$$

$$\sin a \cdot \sin B \cdot dC = dc - \cos B \cdot da - \cos A \cdot db.$$

Те ће бити:

$\sin a = 0{\cdot}776,$	$\sin A = 0{\cdot}697,$	$\cos A = \quad 0{\cdot}717,$	$\operatorname{cosec} b \cdot \operatorname{cosec} C = 1{\cdot}883,$
$\sin b = 0{\cdot}613,$	$\sin B = 0{\cdot}550,$	$\cos B = \quad 0{\cdot}835,$	$\operatorname{cosec} c \cdot \operatorname{cosec} A = 1{\cdot}486,$
$\sin c = 0{\cdot}965;$	$\sin C = 0{\cdot}867;$	$\cos C = -0{\cdot}500;$	$\operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{cosec} B = 2{\cdot}342.$

$da = +6''{\cdot}00,$	$db = +6''{\cdot}00,$	$dc = +6''00,$
$-\cos C \cdot db = +3\ {\cdot}00,$	$-\cos A \cdot dc = -4\ {\cdot}32,$	$-\cos B \cdot da = -5\ {\cdot}04,$
$-\cos B \cdot dc = -5\ {\cdot}04,$	$-\cos C \cdot da = +3\ {\cdot}00,$	$-\cos A \cdot db = -4\ {\cdot}32,$
$\Sigma = +3\ {\cdot}96,$	$\Sigma = +4\ {\cdot}68,$	$\Sigma = -3\ {\cdot}36,$
$dA = +7''{\cdot}\ 5;$	$dB = +7''{\cdot}0;$	$dC = -7''{\cdot}9.$

20. Користићемо, из Гаус—Деламброве групе, образац

$$\cos \frac{1}{2}(B+C) \cdot \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{1}{2}(b+c) \cdot \sin \frac{1}{2} A.$$

Како су елементи у Ајлеровим сферним троуглима, на које смо се ми ограничили, сваки поједини мањи од 180^0, значи да су $\frac{a}{2}$ и $\frac{1}{2}A$ мањи од 90^0; према томе $\cos\frac{a}{2}$ и $\sin\frac{1}{2}A$ позитивни. А како је, према задатку, $b+c=180^0$, то јест $\frac{1}{2}(b+c)=90^0$, значи $\cos\frac{1}{2}(b+c)=0$, мора бити

$$\cos \frac{1}{2}(B+C) = 0, \qquad \text{то јест} \qquad \frac{1}{2}(B+C) = 90^0,$$

дакле, доиста, $B+C=180^0$.

21. Користићемо, из Гаус—Деламброве групе, обрасце

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2} C.$$

Ако у ове једначине унесемо сад услов $a+b+c=180^0$, то јест $a+b=$ $=180^0-c$, имаћемо

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{c}{2}=\sin\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{c}{2}=\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}C.$$

Помножимо ли ове две једначине добићемо, пошто поделимо обе стране са $\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}$,

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A-B)=\sin^2\frac{1}{2}C,$$

или

$$\cos A+\cos B=1-\cos C,$$

или, коначно, што је и требало показати,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1.$$

22. Како је дати сферни троугао једнакостран, што ће рећи код њега је $a=b=c$, послужићемо се Бординим обрасцима који одређују углове у функцији странâ сферног троугла, дакле

$$\sin^2\frac{1}{2}A=\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)\cdot\operatorname{cosec}b\cdot\operatorname{cosec}c,$$

где је $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Према услову задатка видимо да је $s=\frac{3}{2}a$, и

$$s-b=s-c=s-a=\frac{a}{2}.$$

И тако добивамо да је

$$\sin^2\frac{1}{2}A=\sin^2\frac{a}{2}\operatorname{cosec}^2 a,\quad \text{или}\quad \sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\sec\frac{a}{2}.$$

23. Пошто су дате стране a и b, користићемо, из групе Неперових аналогија, образац

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{1}{2}(a+b).$$

А одавде, на основи дате везе међу угловима, добивамо

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{1}{2}(a+b).$$

Како сад знамо и угао C, то јест, према задатку, збир непознатих двају углова, из обрасца

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$$

моћи ћемо израчунати разлику непознатих двају углова. Према томе моћи ћемо наћи и сваки од углова A и B. И, напослетку, страну c добићемо из

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A-B).$$

24. *Први начин.* Ако у образац из групе Неперових аналогија

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$$

унесемо услов из задатка, добићемо

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C,$$

или

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)=\cos\frac{1}{2}(a-b).$$

Но како је

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C=\frac{1-\cos C}{1+\cos C},$$

место горње једначине добивамо

$$(1-\cos C)\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)=(1+\cos C)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

то јест

$$\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)=\cos C\cdot\left[\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}(a-b)\right].$$

А како је

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}(a-b)}=-\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2},$$

добивамо да је, доиста,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\cos C=0.$$

Други начин. Ако напишемо Бордине обрасце за стране a и b

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=+[\sin S\cdot\sin(A-S)\cdot\operatorname{cosec}(B-S)\cdot\operatorname{cosec}(C-S)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=+[\sin S\cdot\sin(B-S)\cdot\operatorname{cosec}(C-S)\cdot\operatorname{cosec}(A-S)]^{\frac{1}{2}},$$

где је $$S=\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{\pi}{2},$$

па унесемо услов из задатка, то јест $A+B=C$, што даје

$$S=C-\frac{\pi}{2},\qquad \text{или}\qquad C-S=\frac{\pi}{2},$$

горње две једначине постају

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=+[-\cos C\cdot\sin(A-S)\cdot\operatorname{cosec}(B-S)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=+[-\cos C\cdot\sin(B-S)\cdot\operatorname{cosec}(A-S)]^{\frac{1}{2}}.$$

Помножимо ли ове две једначине, добивамо, доиста,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\cos C=0.$$

25. Поћи ћемо од Бординих образаца за стране,

$$\sin^2\frac{a}{2}=\sin S\cdot\sin(A-S)\cdot\operatorname{cosec}B\cdot\operatorname{cosec}C,$$

$$\sin^2\frac{b}{2}=\sin S\cdot\sin(B-S)\cdot\operatorname{cosec}C\cdot\operatorname{cosec}A,$$

$$\sin^2\frac{c}{2}=\sin S\cdot\sin(C-S)\cdot\operatorname{cosec}A\cdot\operatorname{cosec}B,$$

где је

$$S=\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{\pi}{2},$$

$$A-S=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(B+C-A)\qquad \text{и}\qquad B-S=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(A+C-B).$$

Унесемо ли у ове изразе услов из задатка, имаћемо

$$S=C-\frac{\pi}{2},\qquad A-S=\frac{\pi}{2}-B,\qquad B-S=\frac{\pi}{2}-A.$$

А извршимо ли замену у горњим једначинама, имаћемо

$$\sin^2\frac{a}{2} = -\cos C\cos B\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C = -\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} B,$$

$$\sin^2\frac{b}{2} = -\cos C\cos A\operatorname{cosec} C\operatorname{cosec} A = -\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A,$$

$$\sin^2\frac{c}{2} = -\cos C\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B.$$

Саберемо-ли прве две добићемо

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} = -\operatorname{ctg} C(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A) = -\operatorname{ctg} C\sin(A+B)\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B.$$

Како је, према услову задатка,

$$A + B = C,$$

последња једначина, после замене и пошто се скрати на десној страни, постаје

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} = -\cos C\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B = \sin^2\frac{c}{2},$$

што је и требало показати.

26. Нацртајмо правоугли сферни троугао ABC, са правим углом у темену C (в. сл. 19), и обележимо му елементе како је то на слици учињено.

Из правоуглог сферног троугла CDB имамо

$$\cos B = \operatorname{ctg} a\operatorname{tg} c_a,$$

а из правоуглог сферног троугла ABC имамо, опет,

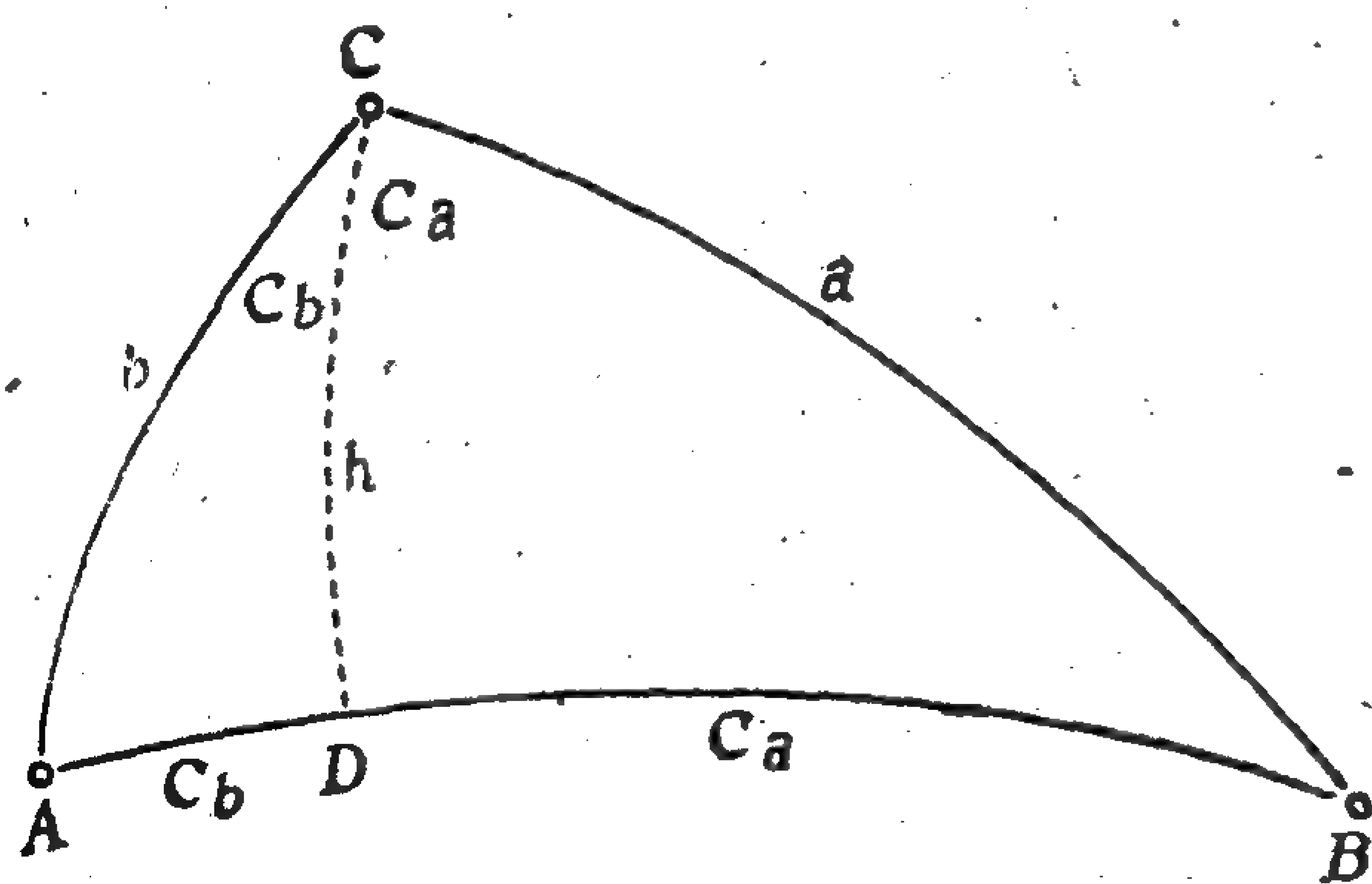
$$\cos B = \operatorname{tg} a\operatorname{ctg} c.$$

Поделимо ли прву другом једначином имаћемо

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c\operatorname{tg} c_a.$$

На исти начин можемо извести и други тражени образац, то јест

$$\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c\operatorname{tg} c_b.$$



Сл. 19.

Ако из сваког од добивених правоуглих сферних троуглова одредимо страну $CD = h$, имаћемо

$$\sin h = \operatorname{tg} c_a\operatorname{ctg} C_a \quad \text{и} \quad \sin h = \operatorname{tg} c_b\operatorname{ctg} C_b.$$

Измножимо ли обе стране ових једначина добивамо

$$\sin^2 h = \operatorname{tg} c_a\operatorname{tg} c_b\operatorname{ctg} C_a\operatorname{ctg} C_b.$$

Како је, међутим, $C_a + C_b = 90^0$, дакле $C_a = 90^0 - C_b$, то је

$$\mathrm{ctg} C_a \cdot \mathrm{ctg}\, C_b = 1,$$

те је тако, доиста,

$$\sin^2 h = \mathrm{tg}\, c_a \cdot \mathrm{tg}\, c_b.$$

27. Дата веза је, уствари, као што се лепо види, један од образаца квадрантног сферног троугла ABC, у којем је $a = 90^0$. Доиста, из једначине

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$

ако ставимо $\cos a = 0$, дакле узмемо $a = 90^0$, добивамо

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C,$$

то јест дату везу, само друкчије написану. Према томе, видимо да ће геометриско место темена C датог сферног троугла ABC бити — велики круг чији је пол теме B.

28. *Први начин.* Из Гаусове групе образаца имамо

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C,$$

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C.$$

Међутим, ове једначине можемо и овако написати

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b + 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C,$$

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a + 2 \sin b \cdot \cos a \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Саберемо ли сад ове једначине, добићемо, пошто скратимо,

$$(\cos A + \cos B) \cdot \sin c = 2 \sin (a + b) \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

А ако још израз у загради на левој страни напишемо у облику производа, добивамо

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin c = \sin (a + b) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Други начин. Ако из Гаус—Деламброве групе узмемо косинусне обрасце,

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} C,$$

помножимо их један другим и скратимо, добивамо

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B) \cdot \sin c = \sin (a + b) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

29. *Први начин.* Ако пођемо од обрасца синусне групе

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin A}{\sin B},$$

видимо да га можемо написати

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

А ако бројиоце и имениоце на обема странама ове једначине напишемо у облику производа, после дељења добивамо лако

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A-B).$$

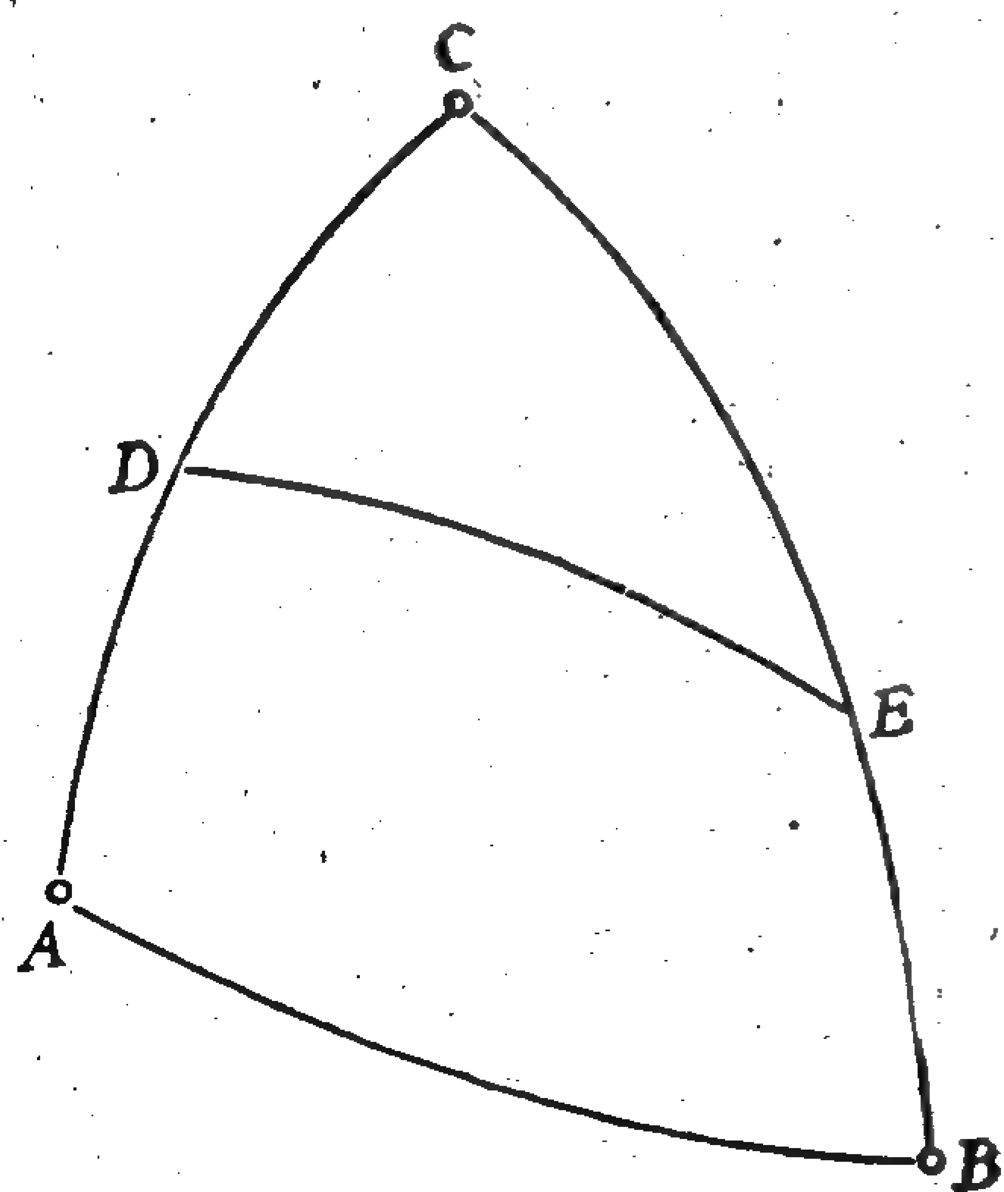
Други начин. Ако узмемо из Неперових аналогија обрасце за тангенсе стране, па поделимо, добивамо одмах

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A-B).$$

30. Из датог сферног троугла (в. сл. 20) имамо

$$\cos\eta=\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos C,$$

$$=\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\left(\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}C\right)+\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\left(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C\right).$$



Сл. 20.

Из ове једначине, опет, добивамо

$$\cos\eta=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+$$

$$+\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\cos^2\frac{1}{2}C.$$

А ако из Гаус—Деламброве групе узмемо обрасце

$$\cos\frac{1}{2}(a+b)=\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{c}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(a-b)=\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{c}{2}\cdot\sec\frac{1}{2}C,$$

па ове вредности унесемо у претходну једначину, добићемо

$$\cos\eta = \cos\frac{c}{2}\left[\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}C\right],$$

или $\cos\eta = \cos\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{1}{2}(A+B+C)$,

дакле, доиста,

$$\cos\eta = \cos\frac{c}{2}\cdot\sin S.$$

31. У решењу Зад. 18 показано је да за медијану, μ, повучену из темена C имамо

$$\cos\mu = (\cos a + \cos b)\cdot\sec\frac{1}{2}c.$$

С друге стране, имамо везу у задатку

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mu = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

Треба из ових двеју једначина елиминисати μ.

Примећујемо, међутим, да је

$$\cos\mu = \cos^2\frac{1}{2}\mu - \sin^2\frac{1}{2}\mu = \cos^2\frac{1}{2}\mu\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mu\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mu}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mu}.$$

Према томе, на основи дате везе добивамо

$$\cos\mu = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.$$

А ако, опет, у првој једначини изразимо збир на десној страни у облику производа, имаћемо

$$\cos\mu = 2\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{1}{2}c.$$

Изједначимо ли десне стране последњих двеју једначина, добивамо

$$2\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\sec\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.$$

А одавде, пошто скратимо,

$$2\cos^2\frac{1}{2}(a-b)=\cos\frac{1}{2}c,$$

или

$$\cos\frac{1}{2}(a-b)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}c},$$

дакле

$$(a-b)=2\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}c}\right).$$

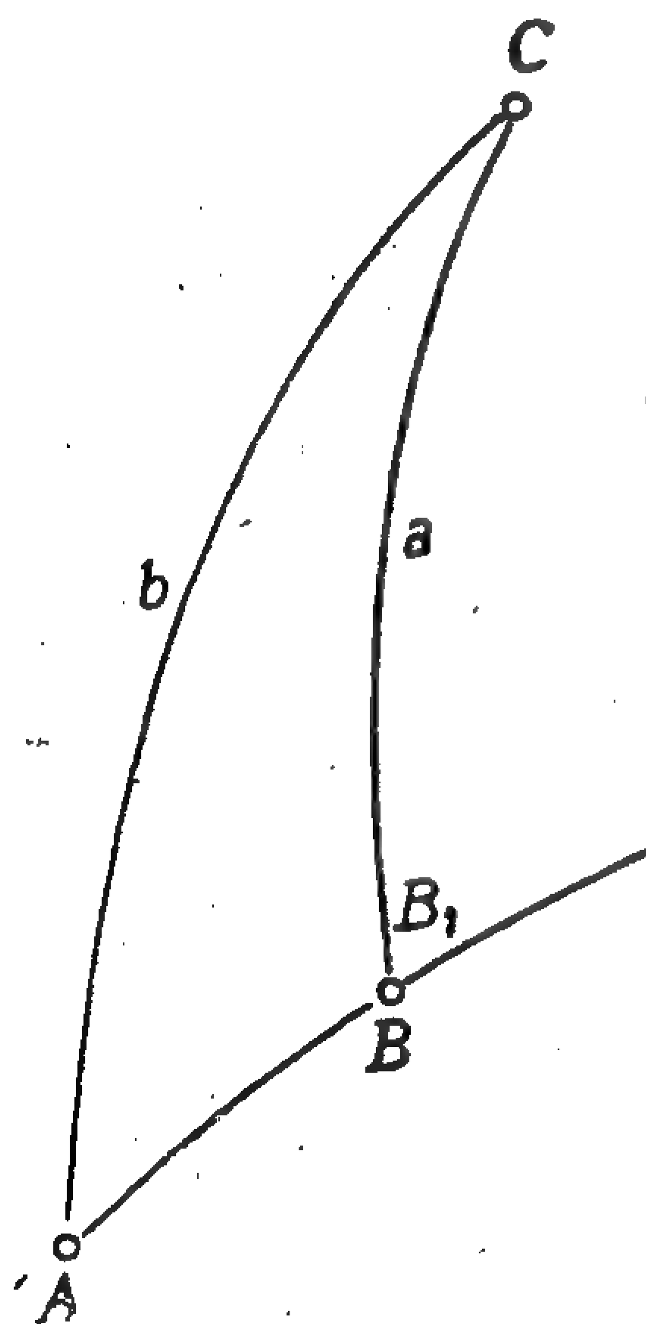
32. Ако помножимо познате основне обрасце

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A,$$

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a,$$

први са $\cos A$, а други са $\cos a$, па други одузмемо од првог, имаћемо

$$\cos b\cdot\cos c\cdot\cos A+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos^2 A+\cos B\cdot\cos C\cdot\cos a-\sin B\cdot\sin C\cdot\cos^2 a=0.$$



Сл. 21.

А ако унесемо, место квадратâ косинуса, квадрате синуса и приметимо да је, према синусним обрасцима,

$$\sin b\cdot\sin c\cdot\sin^2 A=\sin B\cdot\sin C\cdot\sin^2 a,$$

(каткад корисна шестоелементна веза, помоћу које се проверава нумерички рад), добивамо Кањолиев образац,

$$\sin b\cdot\sin c+\cos b\cdot\cos c\cdot\cos A=$$

$$=\sin B\cdot\sin C-\cos B\cdot\cos C\cdot\cos a.$$

33. Са сл. 21 видимо да је

$$B_1-A=\Delta A=\pi-B-A=\pi-(A+B).$$

Применимо сад на троугао ABC петоелементни образац Гаусове групе, но за углове (који се добива примењујући онај за стране на поларни троугао датог сферног троугла)

$$\cos b\cdot\sin C=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B\cdot\cos c.$$

Применимо сад, у овом обрасцу, углове постављене у задатку, и имаћемо, пошто је $\cos c=1$,

$$C\cdot\cos b=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B,$$

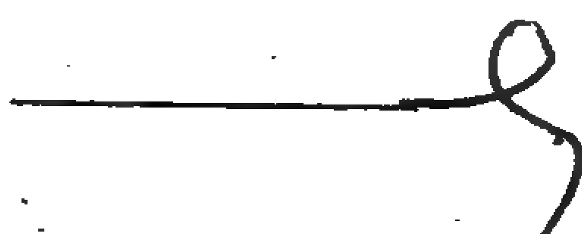
$$=\sin(A+B)=\sin\Delta A=\Delta A.$$

Дакле, доиста је

$$\Delta A=C\cdot\cos b \text{ (у радијанима)},$$

или

$$\Delta A''=C''\cdot\cos b.$$



191

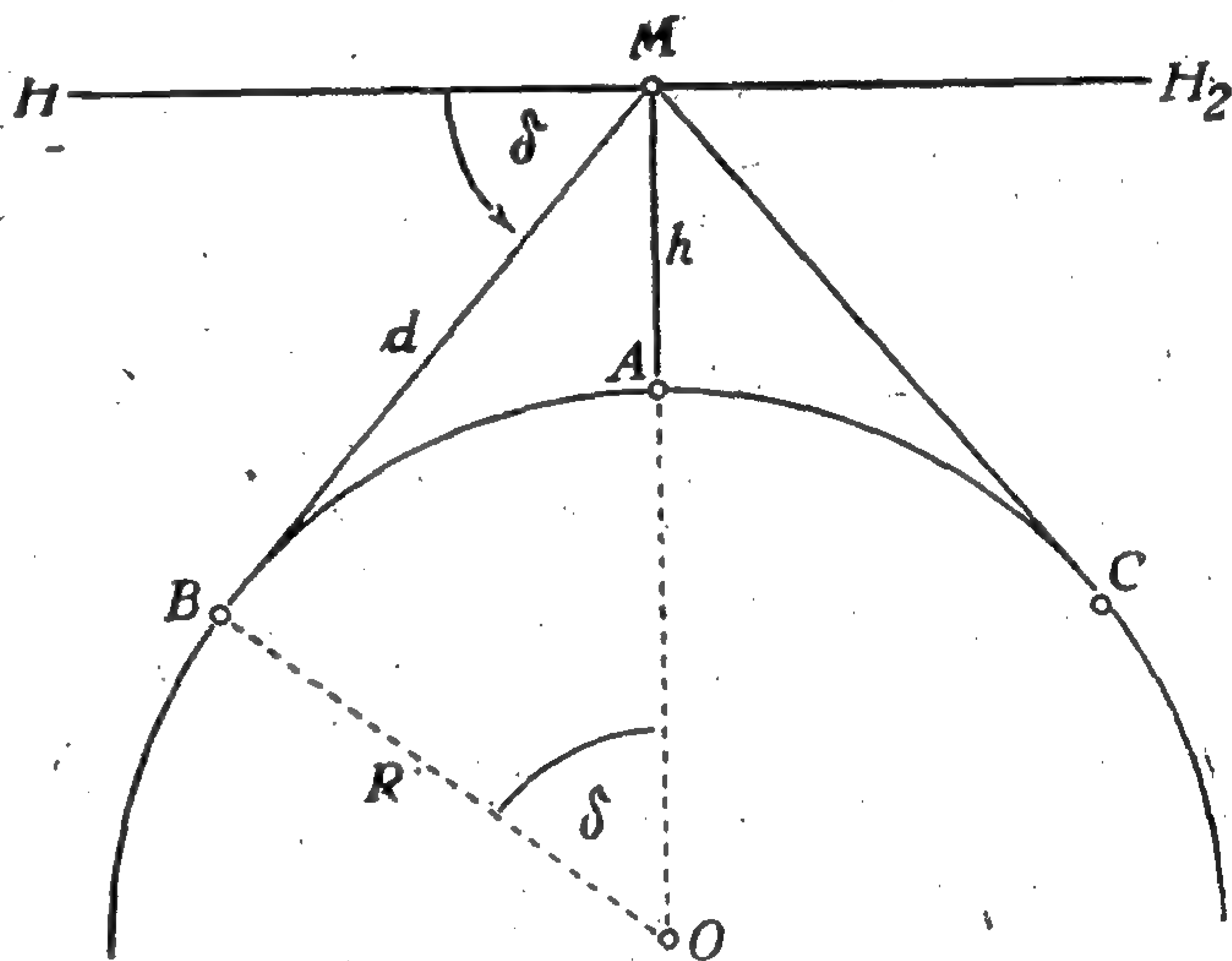
103

II ЗЕМЉА КАО НЕБЕСКО ТЕЛО

34. Означићемо са δ депресију хоризонта посматрача M (в. сл. 22), који се налази на узвишењу $AM=h$ над морском површином, а са $d=MB$ даљину вида. Означимо са $R=OB$ полупречник Земљин, коју сматрамо као сферу. Онда, као што са слике лако видимо, имамо

$$d^2=(R+h)^2-R^2=2Rh+h^2=$$

$$=2Rh\left(1+\frac{h}{2R}\right).$$



Сл. 22.

Док узвишења h остају ограничена на неколико десетина метара свега, други члан у загради, на десној страни, практично неће утицати на вредност даљине вида. Према томе можемо тај члан занемарити, то јест за даљину вида узети

$$d=\sqrt{2Rh}.$$

С друге стране, са слике видимо да имамо

$$p=R\cdot\operatorname{tg}\delta, \qquad \text{дакле и} \qquad \sqrt{2Rh}=R\cdot\operatorname{tg}\delta.$$

А одатле је

$$\operatorname{tg}\delta=\sqrt{\frac{2h}{R}},$$

односно, са ограничењем које смо горе учинили, добивамо за депресију изражену у минутама

$$\delta'=\sqrt{\frac{2h}{R}}\cdot\frac{1}{\operatorname{arc}1'}.$$

Ако за Земљин полупречник узмемо $R=6370$ км, за радијан (приближно) 3438′, а узвишење, h, на којем се налази посматрач над морском пучином, изразимо у метрима, добивамо

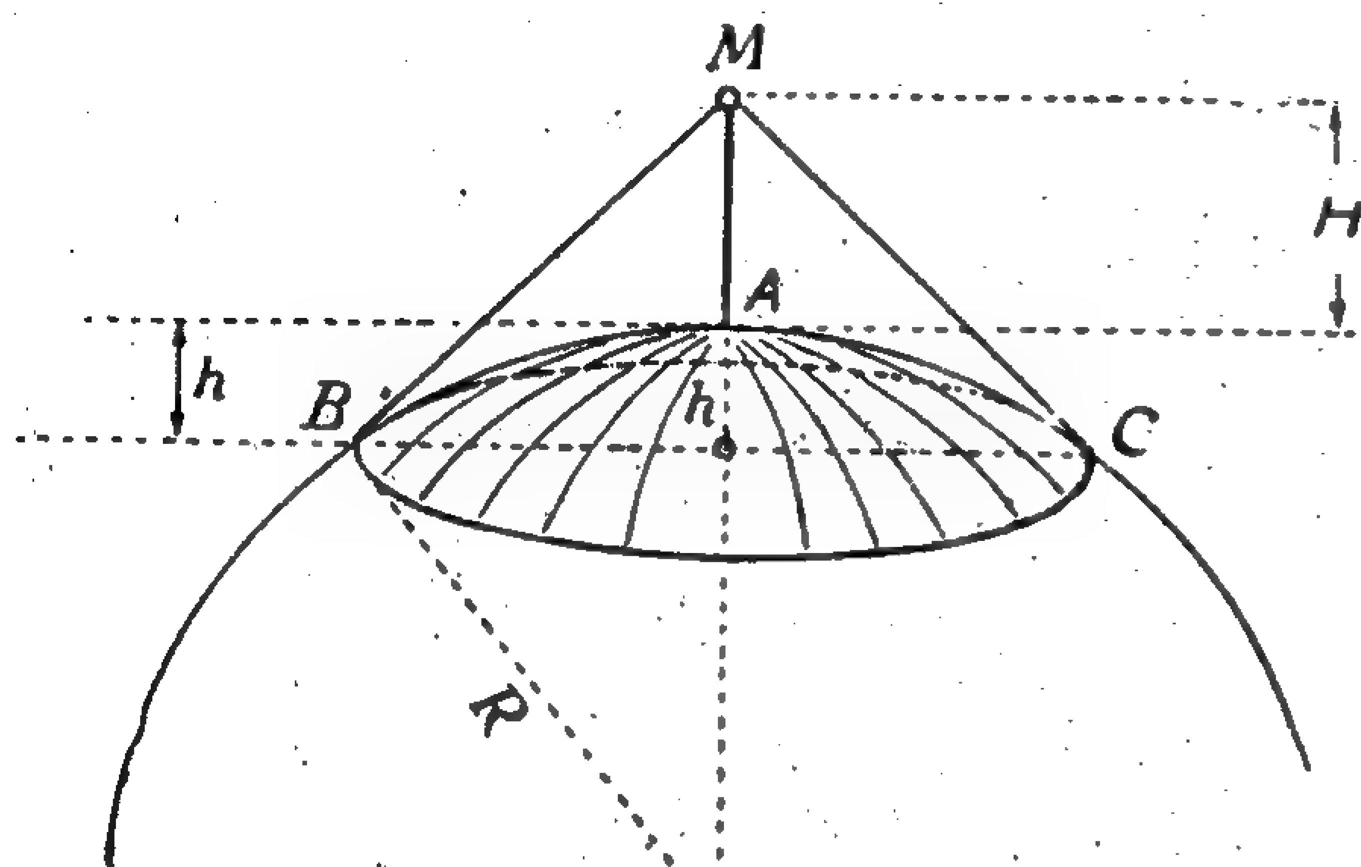
за даљину виду $d\approx 3{\cdot}57\sqrt{h}$ километара;

за депресију хоризонта $\delta\approx 1'{\cdot}93\sqrt{h}$.

Према томе, за посматрача на узвишењу $h=30$ м, биће

$$d \approx 19{\cdot}6\ \text{км}; \qquad \delta \approx 10'{\cdot}6.$$

35. Означимо са H узвишење AM над морском површином, на којем се налази посматрач; полупречник Земље (сфере) са R; површину посматрачева видика (за који се претпоставља да је потпуно слободан), који је, у том случају претстављен површином сферне капе ABC, висине h, означимо са S. Онда је, као што знамо,



Сл. 23.

$$S=2\pi Rh.$$

Висина h, међутим, није нам позната. Али ако приметимо да је

$$R^2=(R+H)(R-h)=$$
$$=R^2+RH-h(R+H),$$

добивамо за h, изражено величинама које су, обично, дате

$$h=\frac{RH}{R+H}=\frac{H}{1+\frac{H}{R}}=H\left(1-\frac{H}{R+H}\right).$$

По последњем од ових израза за h видимо да је разлика

$$H-h=H\cdot\frac{H}{R+H},$$

што ће рећи, док узвишење посматрача над морском површином не премаша, рецимо, 100 м, разлика $H-h$ остаје мања од 2 мм. Према томе, за узвишења у тим границама можемо сматрати да је $H=h$, тако да за површину видика добивамо довољно тачно

$$S=2\pi RH.$$

Према томе је, за $H=30$ м,

$$S=6{\cdot}28\,318\times 6\,370\,000\times 30\ \text{м}^2\approx 1200{\cdot}7\ \text{км}^2.$$

За $H=6$ км, горњи, приближни образац даје

$$S=240\,000\ \text{км}^2,$$

тачан рачун, међутим, даје

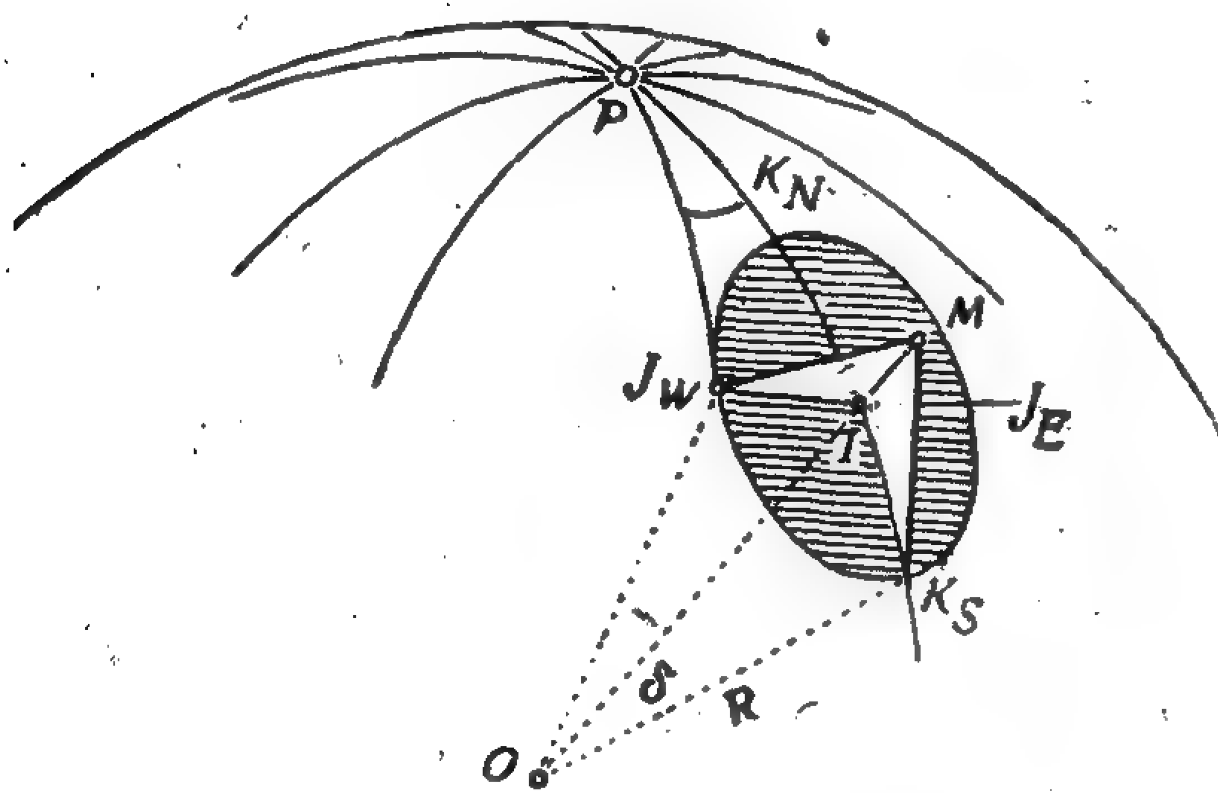
$$S=239\,917{\cdot}2\ \text{км}^2,$$

што приближно претставља 1200-ти део Земљине површине.

а одавде, доиста

$$R=\left(\frac{\sqrt{2h_2}-\sqrt{2h_1}}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2.$$

39. Претпостављамо да Земља има облик сфере. Слободни видик посматрачев, који се налази на извесном узвишењу, $IM=h$, биће ограничен кружном линијом, малим кругом $J_E K_S J_W K_N$ (в. сл. 26), сферна полупречника једнака депресији његова хоризонта. Депресију, δ, можемо израчунати или из приближног обрасца



Сл. 26.

$$\delta=1'{\cdot}93\sqrt{h},$$

стављајући $h=12\,000$ м; или из правоуглог (равног) троугла MK_SO:

$$\cos\delta=\frac{R}{R+h}=\frac{6370}{6382}=0{\cdot}99\,812.$$

У првом случају налазимо $\delta=3^0\,31'{\cdot}3$, у другом налазимо $\delta=3^0\,31'{\cdot}0$. Ако задржимо ову другу вредност, за координате најјужније и најсеверније тачке посматрачева видика, то јест тачака K_S и K_N, добивамо:

$$L_S=0,\ \varphi_S=\varphi-3^0\,31'{\cdot}0=+56^0\,29'{\cdot}0 \text{ и } L_N=0,\ \varphi_N=\varphi+3^0\,31'{\cdot}0=+63^0\,31'{\cdot}0,$$

где је φ географска ширина посматрачева подножја, I, то јест $\varphi=+60^0$.

Најисточнија и најзападнија тачка посматрачева видика су тачке паралела J_E и J_W, чије су сферне даљине од посматрачева подножја, I, једнаке депресији хоризонта, δ. Према томе, географске ширине тих тачака једнаке су посматрачевој географској ширини, $\varphi=+60^0$.

Географске дужине њихове добићемо из једнакокраког сферног троугла $J_W PI$. Ако угао IPJ_W означимо са ΔL, имаћемо

$$\cos\delta=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cdot\cos\Delta L,$$

а одатле

$$\cos\Delta L=(\cos\delta-\sin^2\varphi)\cdot\sec^2\varphi.$$

Да се не би у нумеричком раду губило у тачности, извршићемо претходно познате трансформације, како бисмо вредност ΔL добили преко тангенса. Из последње једначине имамо

$$1-\cos\Delta L=(1-\cos\delta)\cdot\sec^2\varphi=2\sin^2\frac{\delta}{2}\cdot\sec^2\varphi;$$

$$1+\cos\Delta L=(\cos 2\varphi+\cos\delta)\cdot\sec^2\varphi=2\cos\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)\cdot\sec^2\varphi.$$

Одавде налазимо

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Delta L=\sin^2\frac{\delta}{2}\cdot\sec\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\sec\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right).$$

36. Ако површину слободног видика који посматрач види са узвишења H означимо са S, и напишемо је у облику

$$S = 2\pi R^2 \frac{H}{R+H},$$

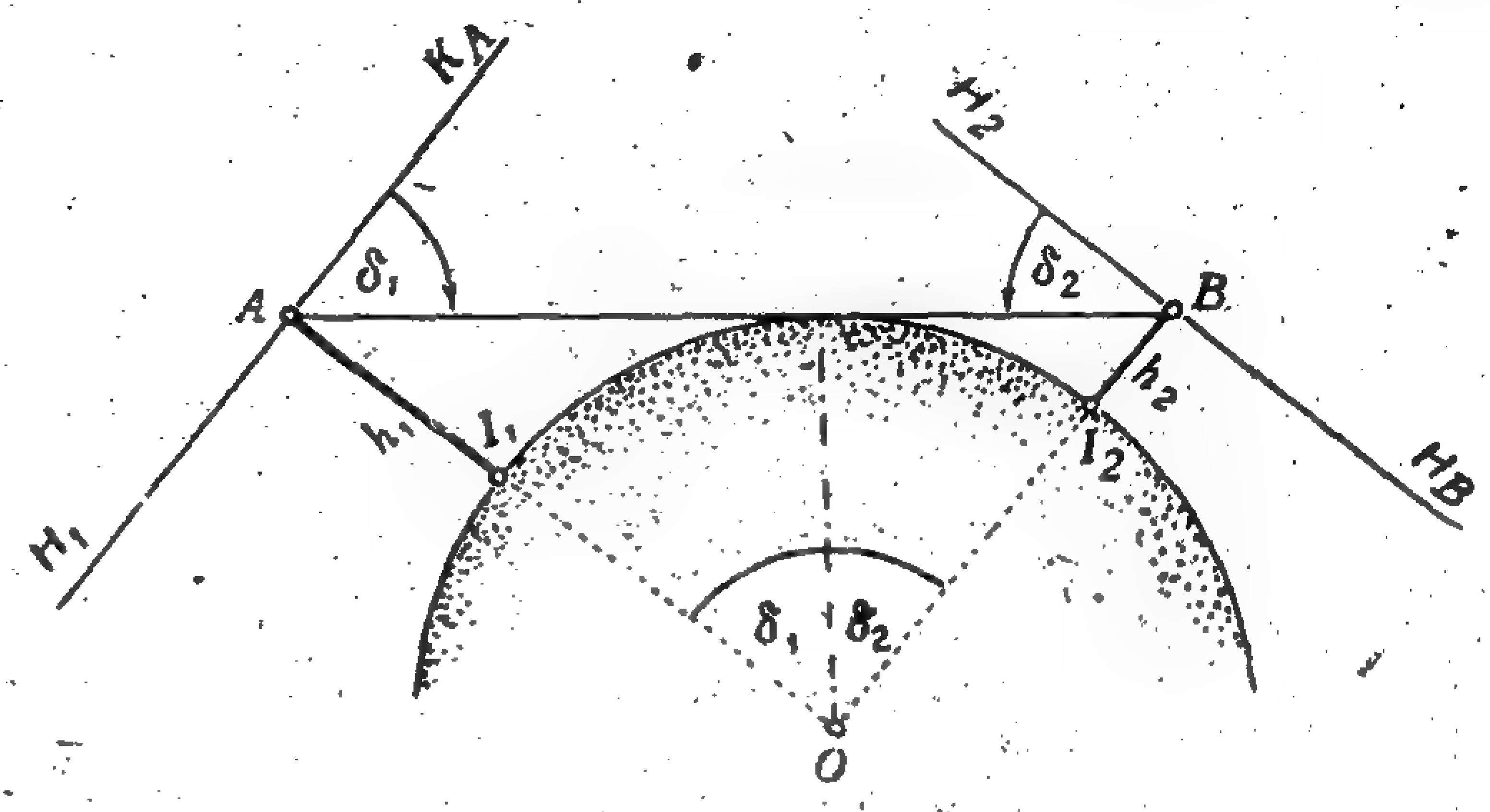
и сетимо се да је површина сфере, у овом случају Земље, $4\pi R^2$, онда је, према задатку,

$$2\pi R^2 \cdot \frac{H}{R+H} = \frac{4\pi R^2}{100},$$

или, пошто скратимо,

$$50H = R + H, \text{ то јест } H = \frac{R}{49};$$

значи, ако за Земљин полупречник узмемо $R = 6370$, налазимо $H = 130$ км.



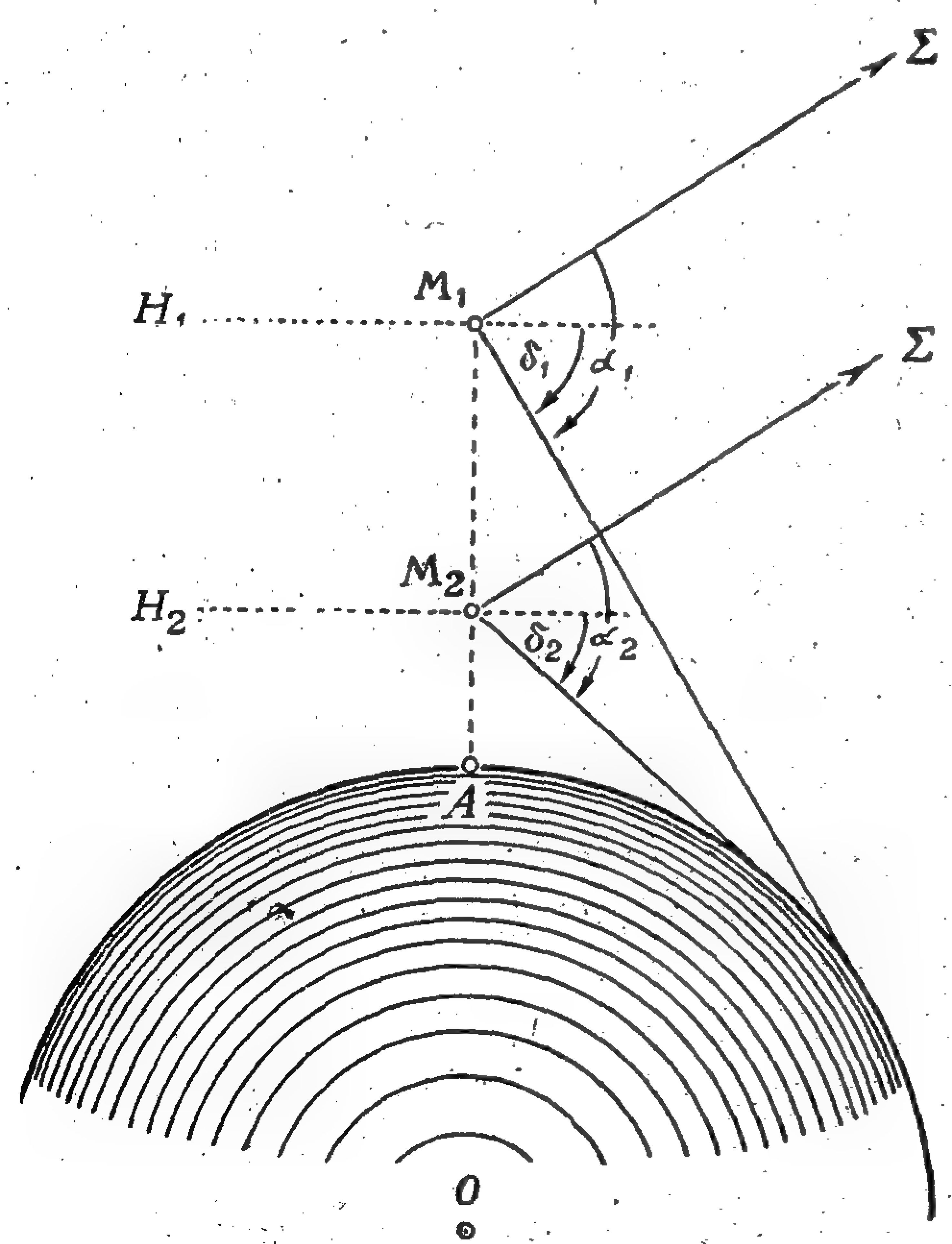
Сл. 24.

37. Посматрачи A и B, на узвишењима h_1, односно h_2 (в. сл. 24), таман ће још моћи видети један другог ако даљина вида једнога, AC, буде била продужетак даљине вида другога, BC, и обратно. А приметимо ли, уједно, да је угао између вертикалâ посматрачâ

$$\alpha = \delta_1 + \delta_2,$$

за тражени услов у задатку налазимо

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{R}}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$



Сл. 25.

38. Како се, према задатку, посматрачи, M_1 и M_2 (в. сл. 25), налазе на истој вертикали, правци ка некретници Σ (коју сматрамо неизмерно далеко), $M_1\Sigma$ и $M_2\Sigma$, паралелни су; дакле биће

$$\alpha_1 - \delta_1 = \alpha_2 - \delta_2.$$

А како су, опет,

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{R}} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{R}},$$

на основи горње једначине добивамо

$$\sqrt{2h_2} - \sqrt{2h_1} = \sqrt{R}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

Према томе ће бити:

$$\frac{\delta}{2} = 1^0\,45'{\cdot}5, \qquad \left[\sin\frac{\delta}{2}\right] \quad 8{\cdot}48\,691, \qquad \left[\sec\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\right] \quad 0{\cdot}32\,496,$$

$$\varphi+\frac{\delta}{2} = 61\;\;45{\cdot}5, \qquad 2\left[\sin\frac{\delta}{2}\right] \quad 6{\cdot}97\,382; \qquad \left[\sec\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)\right] \quad 0{\cdot}27\,874,$$

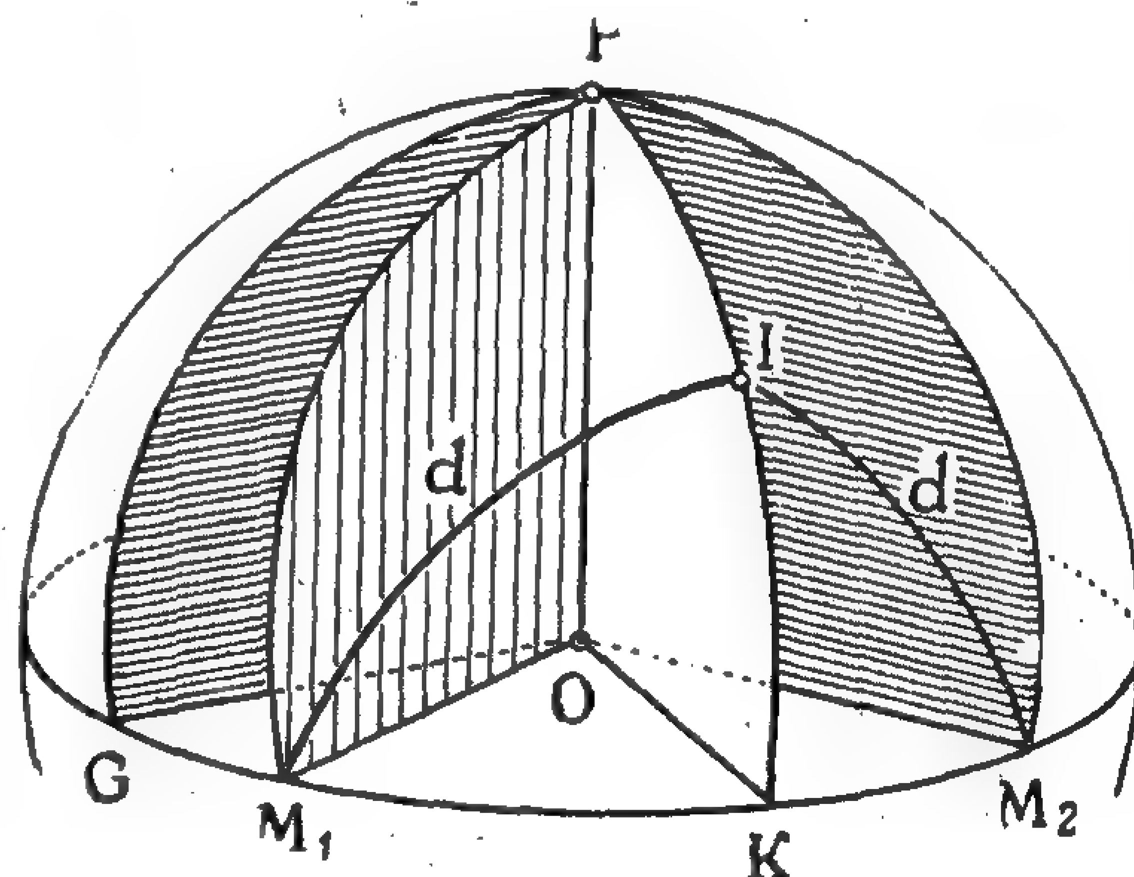
$$\varphi-\frac{\delta}{2} = 58\;\;14{\cdot}5; \qquad\qquad 2\left[\sin\frac{\delta}{2}\right] \quad 6{\cdot}97\,382,$$

$$2\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta L\right] \quad 7{\cdot}57\,752;$$

према томе је $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta L\right]$ 8·78 876; $\frac{1}{2}\Delta L = 3^0\,31'{\cdot}1$.

И тако добивамо за координате најисточније тачке посматрачева видика, то јест J_E: $L_E = -7^0\,2'{\cdot}2$, $\varphi_E = +60^0$; а за координате најзападније тачке, то јест J_W: $L_W = +7^0\,2'{\cdot}2$, $\varphi_W = +60^0$.

40. Нека сл. 27 претставља један део Земље-сфере, полупречника једнака јединици, и I тачку на њој чије су географске координате L и φ. Географска дужина је при том рачуната од гриничког меридијана, који је на слици претстављен са PG. На сферној даљини d од те тачке, то јест I, постоје на екватору две тачке. Претставићемо их на слици са M_1 и M_2. Како се ове налазе на екватору, географске ширине су им 0^0. Географске дужине њихове, које ћемо означити са L_1 и L_2, одредићемо из правоуглих сферних троуглова IM_1K и IKM_2, у којима су нам познати елементи: $KI = \varphi$, $M_1I = M_2I = d$ Из њих добивамо:



Сл. 27.

$$\cos d = \cos\varphi \cdot \cos(L - L_1),$$

и

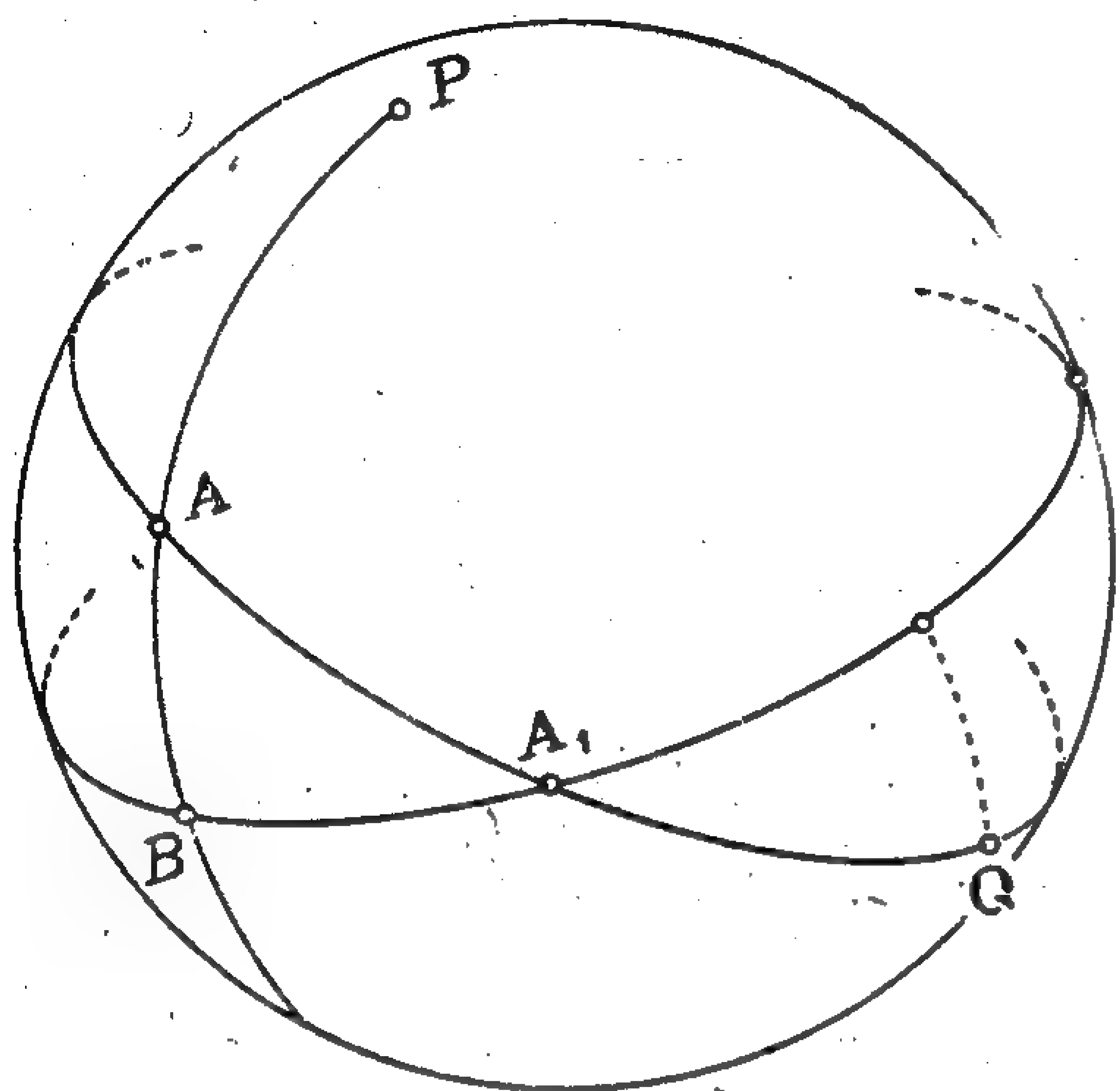
$$\cos d = \cos\varphi \cdot \cos(L_2 - L),$$

а одавде налазимо

$$L_1 = L - \arccos(\cos d \cdot \sec\varphi) \quad \text{и} \quad L_2 = L + \arccos(\cos d \cdot \sec\varphi).$$

41. Означимо са A_1 место на екватору Земље-сфере; са A друго место, на паралелу φ; са Q најјужнију тачку великог круга AA_1. Но онда је $A_1Q = \frac{\pi}{2}$, или A_1 је пол меридијана што пролази кроз Q. Како

је, према задатку, географска ширина тачке Q: φ_S, то угао код пола A_1, па дакле и код темена A_1 у правоуглом сферном троуглу ABA_1, износи φ_S. У том сферном троуглу позната је, међутим, и страна $AB=\varphi$. Дакле можемо му одредити катету BA_1, која претставља тражену разлику у географским дужинама тачака A и A_1. Ако је означимо са ΔL, имаћемо



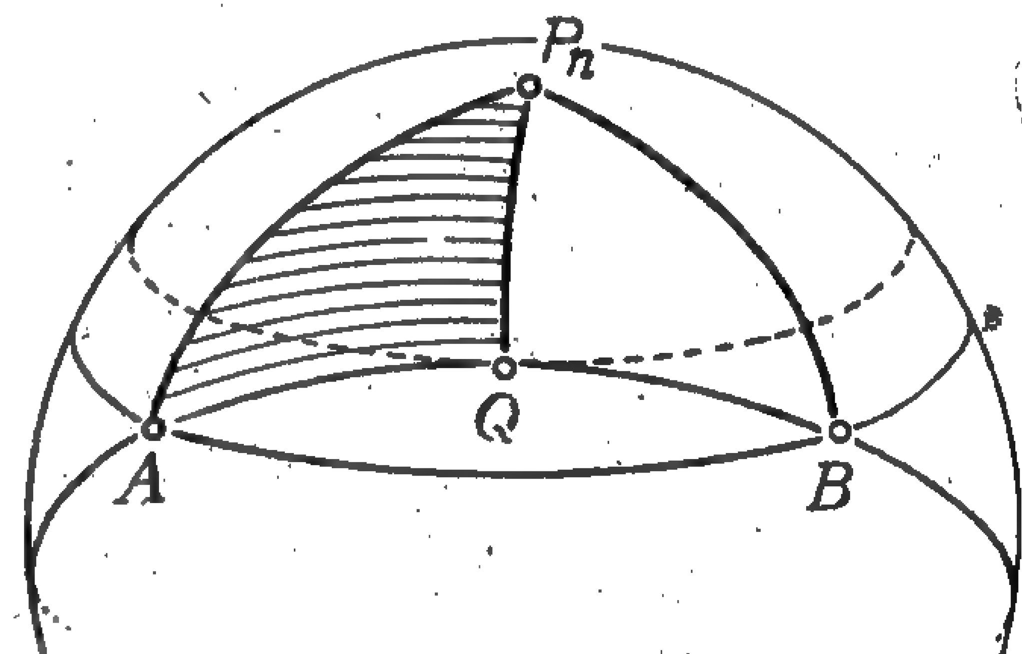
Сл. 28.

$$\sin \Delta L = \operatorname{ctg} \varphi_S \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$\Delta L = \arcsin (\operatorname{ctg} \varphi_S \cdot \operatorname{tg} \varphi).$$

42. Повуцимо кроз места A и B (в. сл. 29) на Земљи-сфери лук великог круга AQB. Нека Q буде његова најсевернија тачка. Означимо јој географску ширину са φ_m. Но тако је сферни троугао P_nAB подељен у два једнака правоугла сферна троугла, AQP_n и P_nQB. У сваком од њих познати су нам по једна страна, то јест $AP_n = BP_n = \frac{\pi}{2} - \varphi$ и по један угао, половина разлике географских дужина места A и B, то јест угао $AP_nQ = QP_nB = \frac{L}{2}$. Према томе, географску ширину најсеверније тачке добивамо из



Сл. 29.

$$\cos \frac{L}{2} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi_m,$$

одакле налазимо

$$\varphi_m = \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \varphi \cdot \sec \frac{L}{2} \right).$$

Да бисмо одредили разлику у дужинама путања, означимо са s_φ дужину лука паралела AB, а са s дужину лука великог круга AB. Ако са L' означимо у минутама изражену разлику географских дужина тачака A и B, имамо да је

$$s_\varphi = L' \cos \varphi \text{ наутичких миља} = 1{\cdot}852\, L' \cos \varphi \text{ км.}$$

Лук великог круга AB, опет, добивамо из правоуглог сферног троугла AQP_n (или P_nQB), јер имамо

$$\sin \frac{s}{2} = \sin \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi,$$

а одатле

$$s = 2 \arcsin \left(\sin \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi \right).$$

s изражено у минутама претстављаће у наутичким миљама дужину пута AB по великом кругу, то јест најкраћи пут од A до B.

Ако за прво место, дакле A, узмемо Лисабон, а за друго, то јест B, Вашингтон, и претпоставимо да се они налазе на истом паралелу, $\varphi = +38^0 50'$ (што није сасвим тачно, али ћемо узети да јесте), а географске дужине да им се разликују за $L = 4^h 31^m 31^s = 67^0 52'\cdot 8$, биће:

$[\text{tg}\,\varphi]$	9·90 578,	$L' = 4072'\cdot 8$,		$\left[\sin\frac{L}{2}\right]$	9·74 689,
$\left[\sec\frac{L}{2}\right]$	0·08 112,	$\cos\varphi = 0\cdot 77\,897$,		$[\cos\varphi]$	9·89 152,
$\Sigma = [\text{tg}\,\varphi_m]$	9·98 690,	$s_\varphi = 3172\cdot 6$ н. м.,		$\left[\sin\frac{s}{2}\right]$	9·63 841,

$$\varphi_m = +44^0\, 8'\cdot 2; \qquad s_\varphi = 5875\cdot 7 \text{ км}; \qquad \frac{s}{2} = 25^0\, 46'\cdot 8;$$

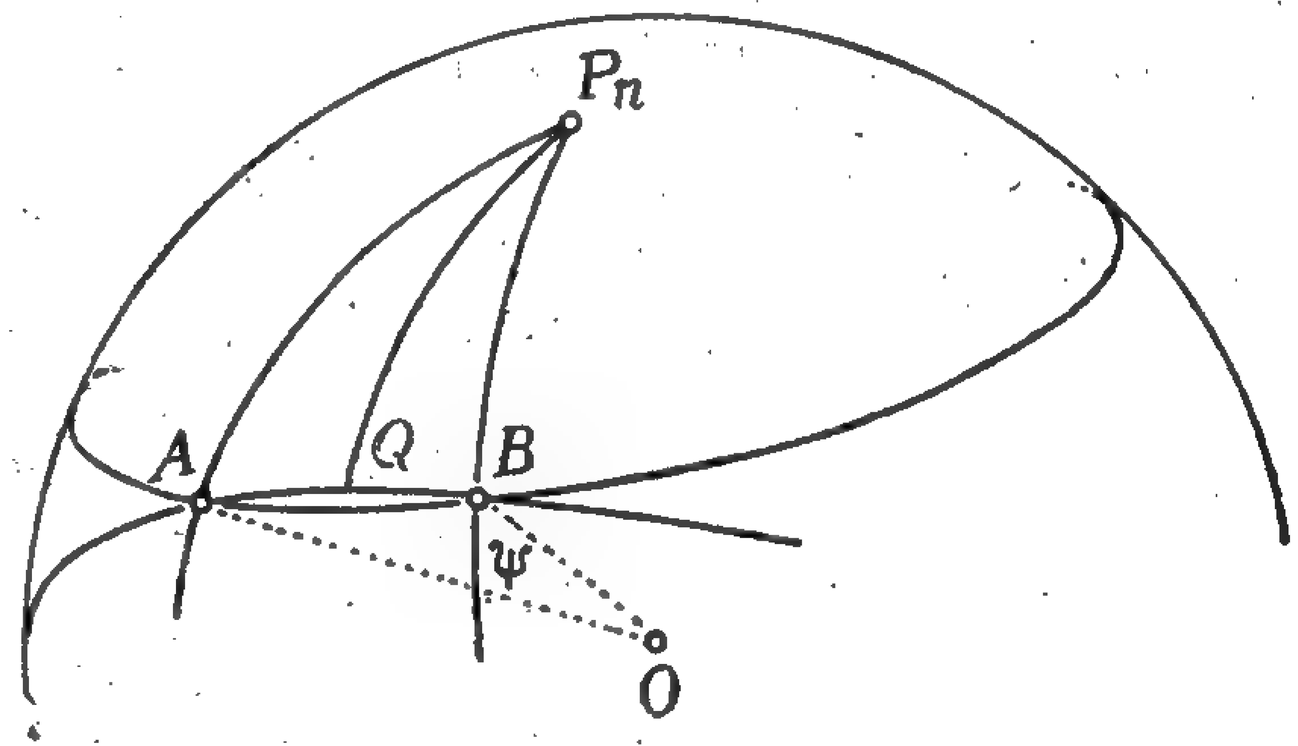
дакле $s = 51^0\, 33'\cdot 6$ или $s = 3093\cdot 6$ н. м. $= 5729\cdot 3$ км.

Вредност $\frac{s}{2} = 154^0\, 13'\cdot 2$, то јест $s = 308^0\, 26'\cdot 4$ претставља други лук, то јест, дужи пут AB.

Тако видимо да је пут по великом кругу од Лисабона до Вашингтона краћи од пута по паралелу за 146·4 км.

43. Даљини $AB = l$ (в. сл. 30) од 261 км на Земљи-сфери полупречника $R = 6370$ км одговара у средишту великог круга AB угао

$$\psi = \frac{l}{R} = \frac{261}{6370} = 0\cdot 0041, \text{ или } \psi = 2^0\, 20'\cdot 9.$$



Сл. 30.

Значи, дакле, у сферном троуглу ABP_n познати су елементи: страна $AB = \psi$ и угао $AP_nB = \Delta L$. Да бисмо одредили географску ширину паралела AB, коју ћемо означити са φ, спустимо из P_n, нормално на AB, лук великог круга P_nQ. Тако смо добили два једнака правоугла сферна троугла. У сваком од њих познати су нам по страна $AQ = QB = \frac{1}{2}\psi$ и по угао $AP_nQ = QP_nB = \frac{1}{2}\Delta L$. Из њих добивамо

$$\cos\varphi = \sin\frac{1}{2}\psi \cdot \text{cosec}\frac{1}{2}\Delta L.$$

Према подацима задатка биће:

$$\frac{1}{2}\psi = 1^0\, 10'\cdot 5, \qquad \left[\sin\frac{1}{2}\psi\right] \quad 8\cdot 31\,189,$$

$$\frac{1}{2}\Delta L = 1\ \ 42{\cdot}0; \quad \left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\Delta L\right]\ 1{\cdot}52\,774,$$

$$[\cos\varphi] \qquad 9{\cdot}83\,963, \text{ то јест } \varphi = \pm 46^{0}16'{\cdot}3.$$

Напомињемо да би, са нумеричког гледишта, био тачнији поступак да је φ одређено било помоћу тангенса, место помоћу косинуса.

44. Пошто је брод пловио брзином од 12 чворова, то јест 12 н. м. на час, пловидба је трајала

$$4500 : 12 = 375 \text{ часова, или } 15 \text{ дана и } 15 \text{ часова.}$$

Превањеном путу од 4500 н. м. по паралелу $\varphi = -28^{0}0'$, опет, одговара лук екватора од

$$(4500 \sec\varphi) \text{ н. м.} = 4500 \times 1{\cdot}13\,257 \text{ н. м.} = 5096{\cdot}57 \text{ н. м.},$$

односно од оволико исто минута, што износи $84^{0}\,56'{\cdot}6$. А како је брод пловио ка истоку, из места географске дужине $L_1 = -16^{0}\,30'$, географска дужина тачке у коју је стигао износила је $L_2 = -101^{0}\,26'{\cdot}6$.

45. Како први брод плови брзином од 15 чворова, по паралелу $\varphi_1 = +48^{0}\,20'$, часовна промена његове географске дужине, изражена у угловним минутама, износиће

$$\Delta L_1 = 15 \sec\varphi_1 .$$

Ако брзину у чворовима другог брода означимо са v, часовна промена његове географске дужине, пошто плови по паралелу $\varphi_2 = -15^{0}\,15'$, износиће, у угловним минутама,

$$\Delta L_2 = v{\cdot}\sec\varphi_2 .$$

Бродови ће се налазити стално на истом меридијану ако буде било

$$\Delta L_1 = \Delta L_2, \text{ то јест } 15{\cdot}\sec\varphi_1 = v{\cdot}\sec\varphi_2,$$

$$\text{или } v = 15{\cdot}\sec\varphi_1{\cdot}\cos\varphi_2 = 15 \times 1{\cdot}504 \times 0{\cdot}965 \approx 21{\cdot}8 \text{ чворова.}$$

46. Означимо са t (у часовима) трајање пловидбе бродова до њихова сусрета на истом меридијану. За то време први брод је превалио пут од $12\,t$ н. м., а други од $15\,t$ н. м. Превањеном путу првог брода одговара промена у географској дужини, изражена у угловним минутама,

$$\Delta L_1 = (12 \sec\varphi_1){\cdot}t = 24'\,t,$$

а превањеном путу другог брода одговара промена

$$\Delta L_2 = (15 \sec\varphi_2){\cdot}t = 17'{\cdot}32\,t.$$

Како је разлика у географским дужинама износила

$$L_2 - L_1 = 45^{0} = 45 \times 60' = 2700',$$

за трајање пловидбе налазимо

$$t = 2700 : 41{\cdot}32 = 65^{h}{\cdot}34 \approx 65^{h}\,20^{m} = 2\text{д}\,17^{h}\,20^{m}.$$

Пошто су бродови кренули 27 фебруара 1952 г., у 12^h гриничког времена, срели су се на истом меридијану 29 фебруара у $29^h 20^m$, то јест 1. марта 1952 г. у $5^h 20^m$ гриничког грађанског времена.

Први брод, који је пловио ка западу, променио је, према томе, своју географску дужину за:

$$\Delta L_1 = 24' t = 24' \times 65{\cdot}34 = 1568'{\cdot}2 = 26^0\,8'{\cdot}2;$$

други брод, који је пловио ка истоку, променио је своју географску дужину за

$$\Delta L_2 = 17'{\cdot}32\,t = 17'{\cdot}32 \times 65{\cdot}34 = 1131'{\cdot}7 = 18^0\,51'{\cdot}7.$$

Значи, срели су се на меридијану чија је географска дужина L:

$$L_1 = -18^0\,24', \qquad L_2 = +26^0 36',$$

$$\Delta L_1 = \underline{+26\quad 8{\cdot}2}, \qquad \Delta L_2 = \underline{-18\;51{\cdot}7},$$

$$\underline{L\; = +\;7\;\;44{\cdot}2}; \qquad \underline{L = +\;7\;44{\cdot}3}.$$

47. Разлици у географској дужини од 4^m, то јест $1^0 = 60'$, одговара на екватору даљина од 60 н. м., или $60 \times 1{\cdot}852$ км $= 111{\cdot}112$ км. Овој даљини на екватору одговара на паралелу $\varphi = +60^0$ даљина од

$$(111{\cdot}112 \times \cos\varphi) \text{ км} = 55{\cdot}56 \text{ км}.$$

Оволико износи ц пут који су пешаци превалили. Значи, сваки је од њих превалио по 27·78 км. А пошто су пешачили по 5 часова, брзина свакога је износила око 5·6 км.

48. Траже се приближне промене ΔL и $\Delta\varphi$, координата тачке A (в. сл. 31), кад се тачка A помери за $AC = s$, по великом кругу, који са меридијаном места A образује угао $PAC = q$.

Ако се тачка A не налази у близини пола P, и ако је померање s довољно малено, тако да се његов квадрат и виши степени могу занемарити, може се мали троугао на сфери ABC, који за стране има:

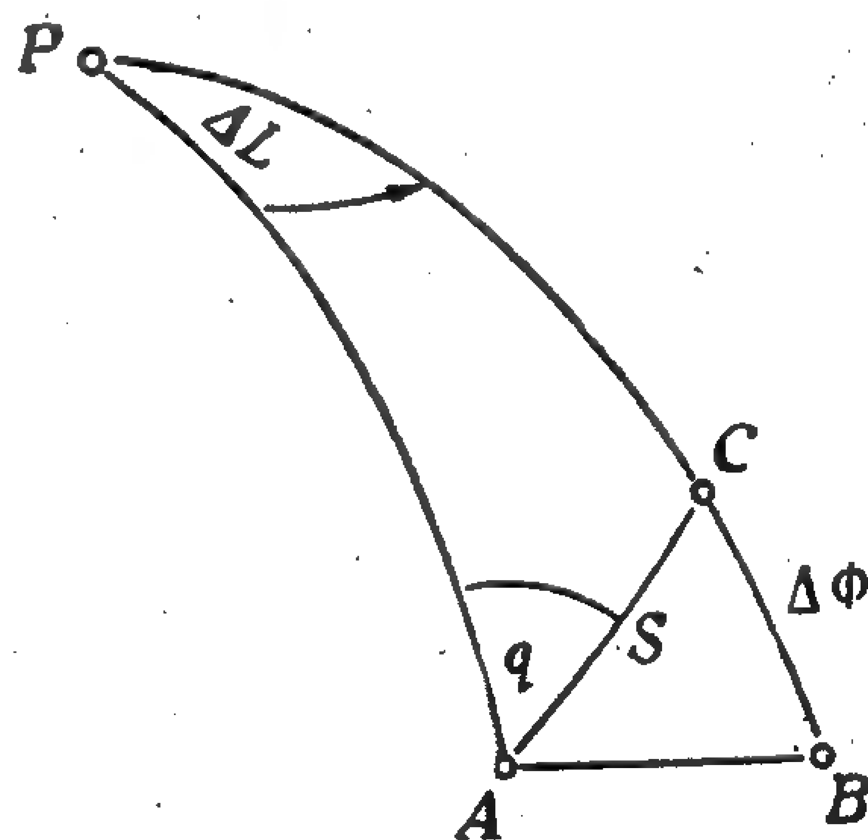
$$AB = \Delta L \cos\varphi, \qquad BC = \Delta\varphi, \qquad AC = s,$$

сматрати као равни правоугли троугао. И имаћемо, као што са слике видимо,

$$AB = AC{\cdot}\sin q, \text{ или } \Delta L \cos\varphi = s{\cdot}\sin q,$$

дакле $\Delta L = s{\cdot}\sin q{\cdot}\sec\varphi$,

$$BC = AC{\cdot}\cos q, \text{ или } \Delta\varphi = s{\cdot}\cos q.$$



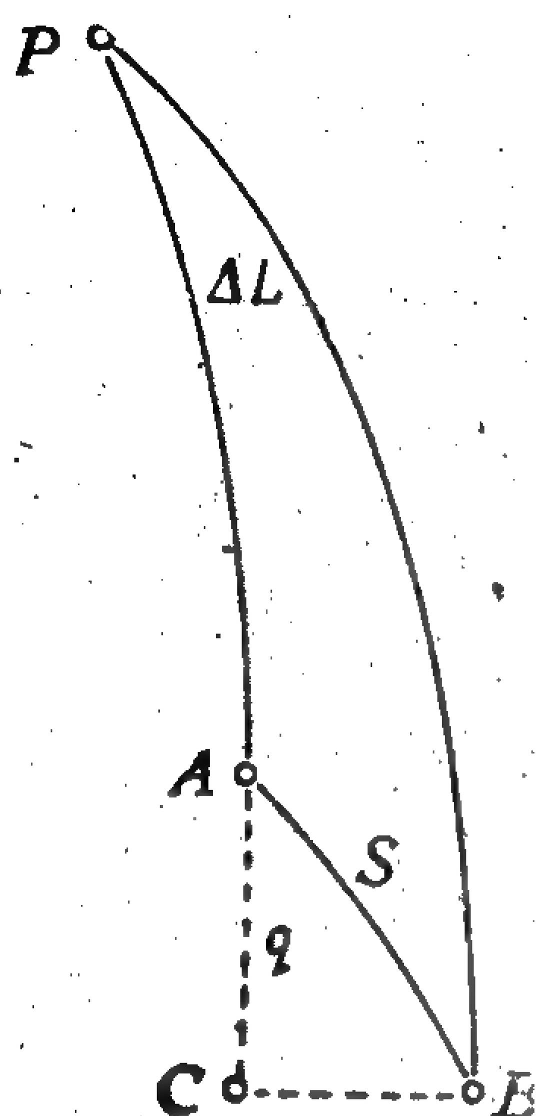
Сл. 31.

Према задатку је: $q = 45^0$, $s = 50$ км $= 27$ н. м. $= 27'$.

А како је $\varphi = +44^0\,48'$, дакле $\sec\varphi = 1{\cdot}409$; $\sin q = \cos q = 0{\cdot}707$, налазимо за тражене часовне промене координата воза:

$$\underline{\Delta L} = 27' \times 0{\cdot}707 \times 1\,409 = \underline{26'{\cdot}9} \quad \text{и} \quad \underline{\Delta\varphi} = 27' \times 0{\cdot}707 = \underline{19'{\cdot}1}.$$

49. Како се посматрачи налазе један од другог на удаљењу $l=278$ км, толикој дужини лука меридијана на Земљи-сфери, полу-пречника $R=6370$ км, одговарала би разлика у географским ширинама



Сл. 32.

$$\Delta\varphi=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{l}{R}=57^{0}{\cdot}29\overline{6}\times 0{\cdot}04\ 364=2^{0}{\cdot}50=2^{0}\ 30'.$$

Међутим, према задатку, разлика њихових географских ширина износи $2^{0}\,15'$. Према томе, посматрачи се не налазе на истом меридијану.

Тражену промену географске дужине ΔL могли бисмо израчунати из сферног троугла PAB (в. сл. 32), чије су нам све стране познате. Но можемо и једноставније, помоћу малог правоуглог троугла на сфери ACB, у којем знамо стране $AB=s=2^{0}{\cdot}50$ и $AC=\Delta\varphi=2^{0}{\cdot}25$. Ако га сматрамо као равни правоугли троугао, моћи ћемо одредити угао q. Имамо, доиста,

$$AC=AB{\cdot}\cos q,$$

то јест ако се вратимо на угловну меру,

$$\Delta\varphi=s{\cdot}\cos q, \qquad \text{што даје} \quad q=25^{0}\,51'.$$

Знајући, опет, угао q, из равног правоуглог троугла имамо

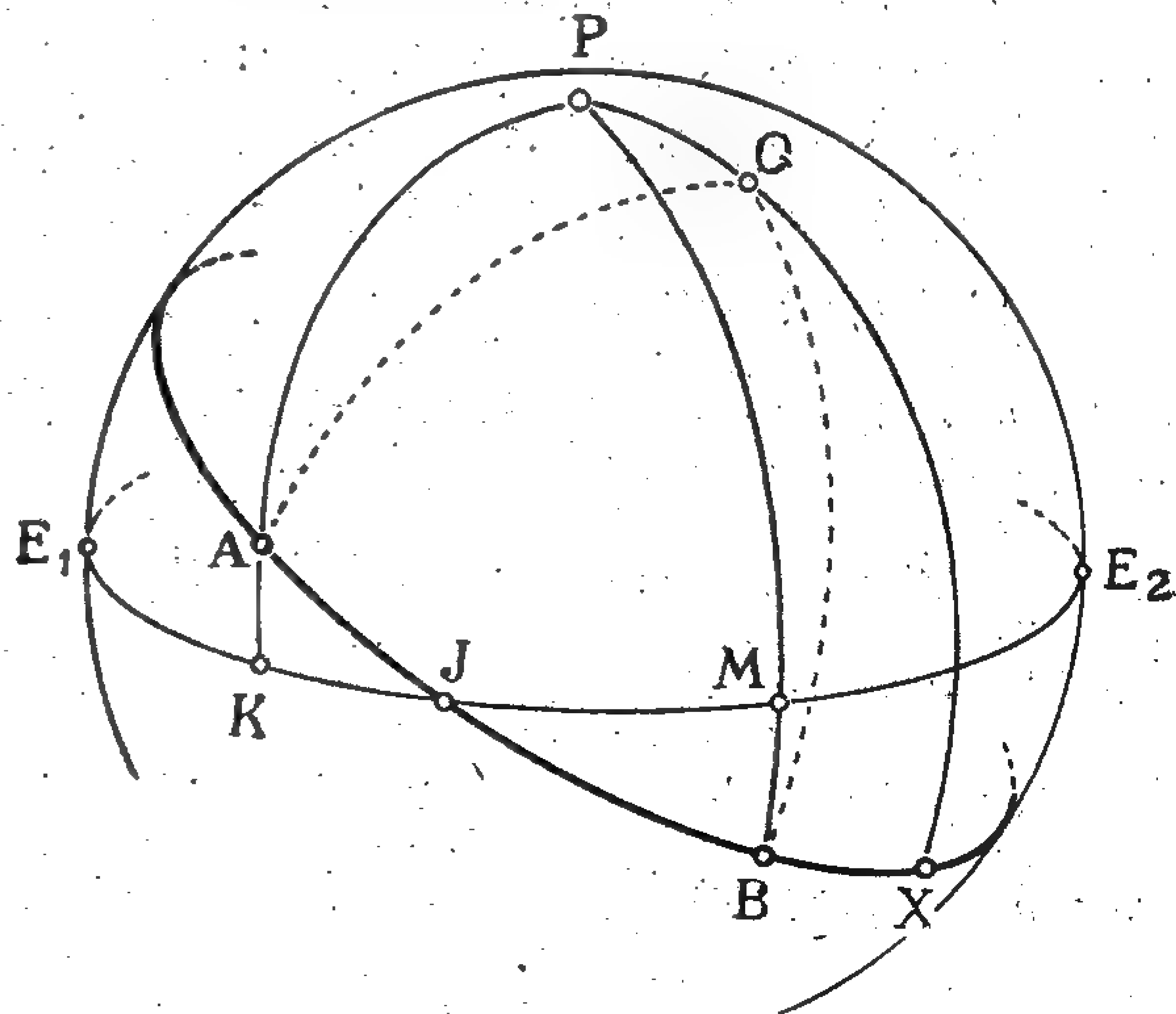
$$BC=AB{\cdot}\sin q,$$

то јест ако пређемо на угловну меру,

$$\Delta L\cos\varphi_2=s{\cdot}\sin q, \quad \text{или} \quad \Delta L=s{\cdot}\sin q{\cdot}\sec\varphi_2=2^{0}{\cdot}50\times 0{\cdot}436\times 1{\cdot}110=1^{0}{\cdot}12'{\cdot}6.$$

50. Означимо најјужнију тачку пута са X (в. сл. 33), а њене координате, које треба одредити, са L_x, φ_x. Означимо са Q пол великог круга ABX, којим брод плови. Онда је

$$AQ=BQ=XQ=\frac{\pi}{2}.$$



Сл. 33

Из сферних троуглова PAQ и PBQ, који имају стране $\frac{\pi}{2}-\varphi_1$, $\frac{\pi}{2}$, и $-\varphi_x$, односно $\frac{\pi}{2}-\varphi_2$, $\frac{\pi}{2}$, и $-\varphi_x$, имамо

$$\sin\varphi_1{\cdot}\cos\varphi_x-$$
$$-\cos\varphi_1{\cdot}\sin\varphi_x{\cdot}\cos(L_1-L_x)=0,$$
$$\sin\varphi_2{\cdot}\cos\varphi_x-$$
$$-\cos\varphi_2{\cdot}\sin\varphi_x{\cdot}\cos(L_2-L_x)=0,$$

или

$$\cos(L_1-L_x)=\operatorname{tg}\varphi_1{\cdot}\operatorname{ctg}\varphi_x,$$
$$\cos(L_2-L_x)=\operatorname{tg}\varphi_2{\cdot}\operatorname{ctg}\varphi_x,$$

дакле, две једначине из којих ћемо израчунати непознате координате L_x и φ_x.

Из ових двеју једначина добивамо

$$\frac{\cos(L_1 - L_x) - \cos(L_2 - L_x)}{\cos(L_1 - L_x) + \cos(L_2 - L_x)} = \operatorname{tg}\left[L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2)\right] \operatorname{tg}\frac{1}{2}(L_1 - L_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2},$$

а одавде, после очигледних трансформација,

$$\operatorname{tg}\left[L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2)\right] = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\operatorname{cosec}(\varphi_1 + \varphi_2)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(L_1 - L_2).$$

Из ове једначине израчунавамо L_x.

Географску ширину, φ_x, најјужније тачке добивамо, пошто израчунамо њену географску дужину, из било које од двеју полазних једначинâ.

Датум и тренутак када ће стићи брод у најјужнију тачку моћи ћемо израчунати ако знамо трајање пловидбе. Да бисмо могли израчунати трајање пловидбе, треба да знамо превађени пут, AX. А овај је одређен углом AQX, јер је Q пол великог круга ABX. Угао AQX је, као што видимо, суплемент угла $AQP = Q$, који можемо израчунати из сферног троугла AQP. Имамо, наиме,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)\cdot\sin(L_1 - L_x) = \sin Q,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \sin\varphi_x\cdot\cos Q.$$

Поделимо ли прву једначину другом имаћемо

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{ctg}\varphi_1 \sin(L_1 - L_x)\cdot\sin\varphi_x,$$

то јест једначину из које израчунавамо Q, па онда и $AX = \pi - Q$.

Часовне промене координата брода, у свакој тачки пута, моћи ћемо израчунати ако нам је познат, сем брзине брода, и смер пловидбе у дотичној тачки. Смер је, рецимо у тачки A, одређен углом $KAJ = A$. Имамо, наиме, ако означимо са L_i географску дужину тачке пресека (J) пута са екватором

$$\operatorname{ctg} A = \sin\varphi_1\cdot\operatorname{ctg}(L_1 - L_i).$$

Ову разлику у географским дужинама тачака A и J одређујемо из правоуглог сферног троугла AKJ, помоћу обрасца

$$\sin(L_1 - L_i) = \operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{ctg} J.$$

Тако је, дакле, одређен смер пловидбе у тачки A. Ако сад мали правоугли троугао на сфери, чије су катете $\Delta\varphi_1$ и $\Delta L_1 \cos\varphi_1$, а хипотенуза $s=20'$, — сматрамо као равни троугао, имаћемо

$$\Delta L_1 = s \sin A \cdot \sec\varphi_1 \qquad \text{и} \qquad \Delta\varphi_1 = s\cos A.$$

Пошто је смер пловидбе познат, одређени су и знаци ових часовних промена̑.

Према томе ћемо имати:

$$\text{Дате величине:}\left\{\begin{array}{lll} \varphi_1 = +\ \ 2^\circ 15', & L_1 = +51^\circ 04'{\cdot}5, & \frac{1}{2}(L_1 - L_2) = 42^\circ 07'{\cdot}5, \\ \varphi_2 = -18\ \ 46, & L_2 = -33\ \ 10{\cdot}5, & \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \ \ 21\ \ 01, & L_1 - L_2 = \ \ 84\ \ 15{\cdot}0, & \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = \ \ 8\ \ 57{\cdot}0. \\ \varphi_1 + \varphi_2 = -16\ \ 31; & L_1 + L_2 = \ \ 17\ \ 54{\cdot}0; & \end{array}\right.$$

Израчунавање координата L_x и φ_x.

$$\begin{array}{ll} [\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] & 9{\cdot}55\,466, \\ [\operatorname{cosec}(\varphi_1 + \varphi_2)] & 0{\cdot}54\,623\,n, \\ \left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(L_1 - L_2)\right] & 0{\cdot}04\,366, \\ \hline \left[\operatorname{tg}\left\{L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2)\right\}\right] & 0{\cdot}14\,455\,n; \end{array} \qquad \begin{array}{rl} L_x - \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = & -54^\circ 21'{\cdot}8, \\ \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = & \ \ 8\ \ 57{\cdot}0, \\ \hline L_x = & -45\ \ 24{\cdot}8; \end{array}$$

$$L_1 - L_x = 96^\circ 29'{\cdot}3,$$
$$L_2 - L_x = 12\ \ 14{\cdot}3;$$

$$\begin{array}{ll} [\cos(L_1 - L_x)] & 9{\cdot}05\,308\,n, \\ [\operatorname{ctg}\varphi_1] & 1{\cdot}40\,572, \\ \hline [\operatorname{ctg}\varphi_x] & 0{\cdot}45\,880\,n; \end{array} \qquad \begin{array}{ll} [\cos(L_2 - L_x)] & 9{\cdot}99\,001, \\ [\operatorname{ctg}\varphi_2] & 0{\cdot}46\,880\,n, \\ \hline [\operatorname{ctg}\varphi_x] & 0{\cdot}45\,881\,n, \end{array}$$

$$\varphi_x = -19^\circ 10'{\cdot}3; \qquad \varphi_x = -19^\circ 10'{\cdot}3.$$

Израчунавање трајања пловидбе:

$$\begin{array}{ll} [\operatorname{ctg}\varphi_1] & 1{\cdot}40\,572, \\ [\sin(L_1 - L_x)] & 9{\cdot}99\,721, \\ [\sin\varphi_x] & 9{\cdot}51\,629, \\ \hline [\operatorname{tg} Q] & 0{\cdot}91\,922; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ Q = 83^\circ 08', \\ AX = 180^\circ - Q = 96^\circ 52', \\ AX = 5812' \quad = 5812 \text{ н. м.} \end{array}$$

Пошто је брзина брода била 20 чворова, пловидба је трајала 290·6 часова, или 12 дана $2^h 36^m$. Према томе, брод је прошао кроз најјужнију тачку свога пута 27 априла у $12^h 36^m$ гриничког грађанског времена.

Израчунавање часовних промена координата за тачке A и B:

$[\operatorname{tg}\varphi_1]$	8·59 428,	$L_1 - L_i = 6^\circ 29'{\cdot}3$,	$L_2 - L_i = -77^\circ 45'{\cdot}5$,
$[\operatorname{ctg}\varphi_x]$	0·45 881,	$L_1 = 51\ \ 04{\cdot}5$,	$L_2 = -33\ \ 10{\cdot}5$,
$[\operatorname{tg}\varphi_2]$	9·53 120 n,	$L_i = +44\ \ 35{\cdot}2$;	$L_i = +44\ \ 35{\cdot}0$;
$[\sin(L_1 - L_i)]$	9·05 309,		
$[\sin(L_2 - L_i)]$	9·99 001 n;		

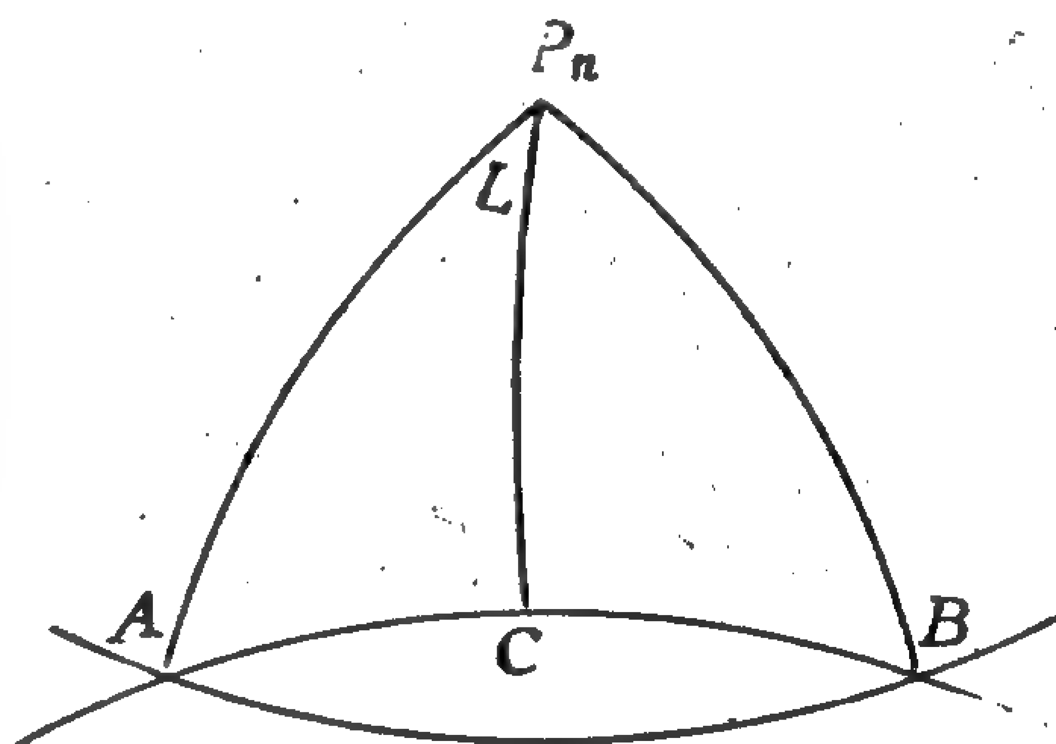
	A:	B:		A:	B:
$[\sin\varphi]$	8·59 395,	9·50 747 n,	$[\cos A;\ \cos B]$	9·51 363,	8·84 068,
$[\operatorname{ctg}(L - L_i)]$	0·94 413,	9·33 639 n,	$[s]$	1·30 103,	1·30 103,
$[\operatorname{ctg}A;\ \operatorname{ctg}B]$	9·53 808,	8·84 386,	$[\sin A;\ \sin B]$	9·97 555,	9·99 896,
A, одн. B.	$70^\circ 57'{\cdot}3$;	$86^\circ 01'{\cdot}6$;	$[\sec\varphi]$	0·00 033,	0·02 372,
			$[\Delta\varphi]$	0·81 466,	0·14 171,
			$[\Delta L]$	1·27 691;	1·32 371;

Тако за часовне промене координата налазимо:

у тачки A: $\quad \Delta L_1 = -19'$ и $\Delta\varphi_1 = -7'$;

у тачки B: $\quad \Delta L_2 = -21$ и $\Delta\varphi_2 = -1.$

51. Прво ћемо испитати за које ће тачке, A и B, на **истом** паралелу на Земљи-сфери, разлика између пута по паралелу и пута по великом кругу бити највећа. А затим ћемо испитати на којем ће од свих могућих паралела та разлика, то јест скраћење пута између двеју тачака, бити највеће, и колико.



Сл. 34.

Узмимо у ту сврху, на паралелу географске ширине φ, две тачке, A и B (в. сл. 34), чија разлика географских дужина износи $2L$. Означимо дужине лукова: по паралелу са s_φ, по великом кругу са s. Ако још Земљин полупречник означимо са R, онда ћемо имати:

$$s_\varphi = 2RL\cos\varphi \qquad \text{и} \qquad s = 2R\arcsin(\cos\varphi\cdot\sin L).$$

Нас занима питање како се понаша разлика

$$s_\varphi - s = \Delta_\varphi = 2R[L\cos\varphi - \arcsin(\cos\varphi\cdot\sin L)],$$

као функција разлике географских дужина тачака A и B; специјално, кад та разлика достиже своје екстремне вредности. Услов је за то

$$\frac{d\Delta_\varphi}{dL}=2R\left(\cos\varphi-\frac{\cos\varphi\cdot\cos L}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\cdot\sin^2 L}}\right)=0.$$

Одавде добивамо

$$\sqrt{1-\cos^2\varphi\cdot\sin^2 L}=\cos L,$$

или

$$1-\cos^2\varphi\cdot\sin^2 L=\cos^2 L,$$

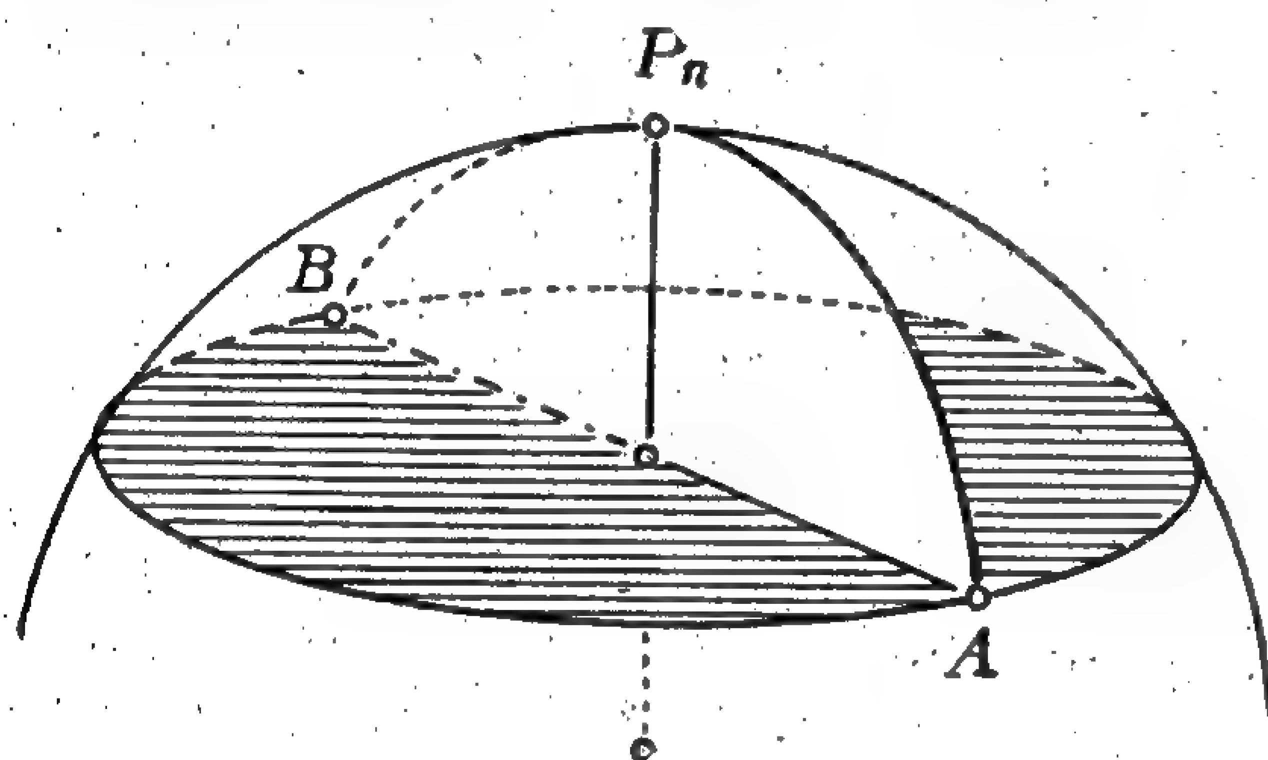
или

$$1-\cos^2\varphi=(1-\cos^2\varphi)\cdot\cos^2 L,$$

то јест

$$\cos^2 L=1,\ \text{односно}\ L_1=0\ \text{и}\ L_2=\pi.$$

Очигледно је да прва вредност одговара минимуму, друга — максимуму. Другим речима, највећа ће бити разлика у дужинама путева AB, дакле и скраћење пута AB, кад се тачке A и B налазе на крајевима истог пречника паралела (в. сл. 35). Разлика географских дужина тачака A и B тада износи π. Дужина лука паралела, географске ширине φ, биће у том случају



Сл. 35.

$$s_\varphi=R\pi\cos\varphi.$$

Лук великог круга AB је, у том случају, лук меридијана; према томе он прелази преко пола P_n. То је, значи, лук над углом у средишту $2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, чија ће дужина бити онда

$$s=R(\pi-2\varphi).$$

Услов да разлика

$$s_\varphi-s=\Delta_\varphi=R\pi\cos\varphi-R(\pi-2\varphi)$$

буде највећа јесте да

$$\frac{d\Delta_\varphi}{d\varphi}=-R\pi\sin\varphi+2R=0,$$

или

$$\sin\varphi=\frac{2}{\pi},\qquad \text{дакле}\ \varphi=39^0\,32'\cdot4.$$

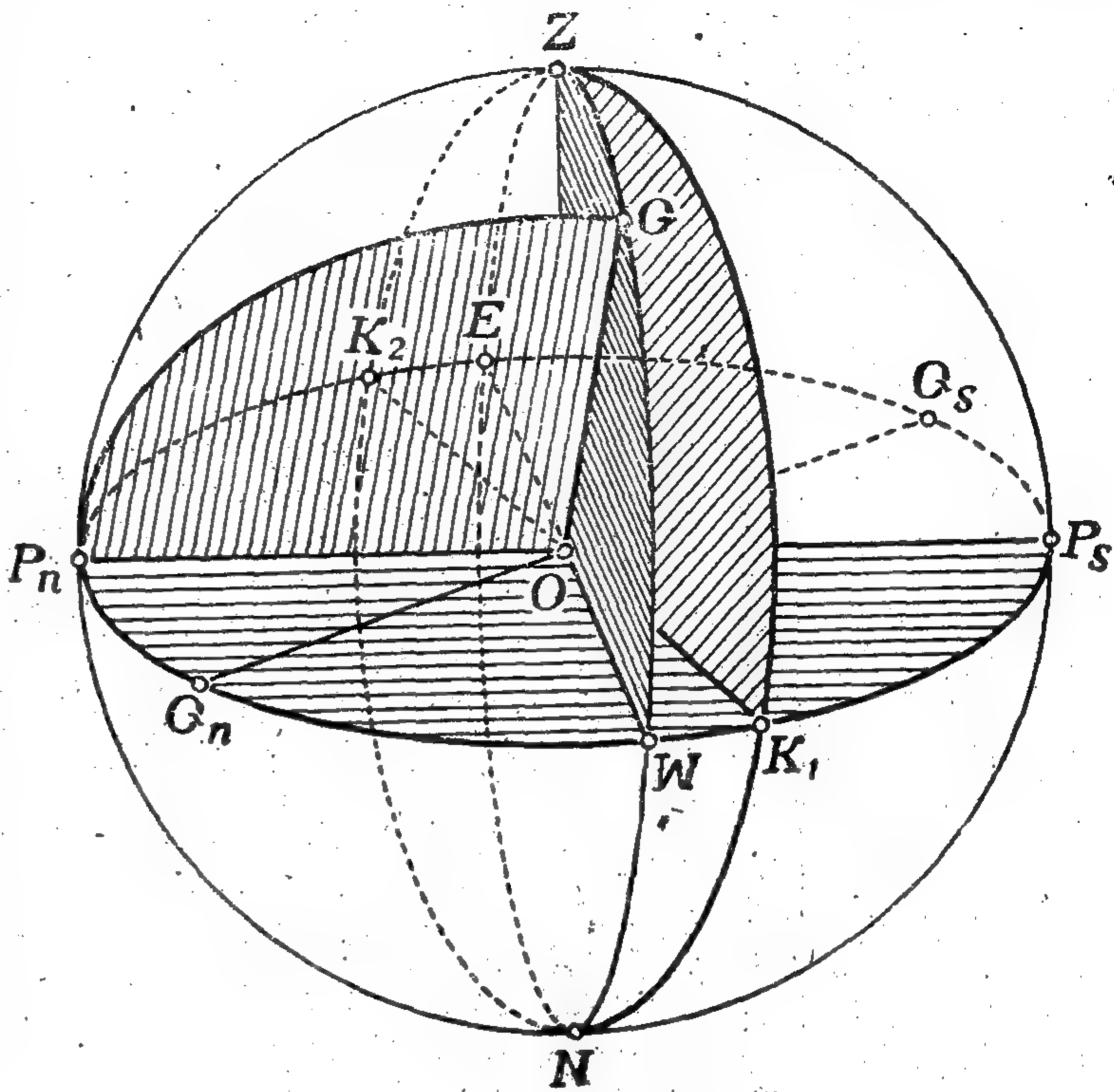
Ако узмемо $R=6370$ км, и приметимо да је $\cos\varphi=0\cdot77\,118$, налазимо

за дужину лука паралела: $s_\varphi=15\,432\cdot8$ км,

а за дужину лука великог круга: $s=11\,219\cdot9$ км.

Према томе највећа вредност коју разлика $s_\varphi-s$ може достићи, дакле и највеће скраћење пута између тачака A и B, износи $\Delta_\varphi=4\,213$ км.

52. Претставимо за Z (в. сл. 36) посматрачев зенит, у равни екватора $ZWNE$; са P_nWP_s — посматрачев хоризонт; са ZP_sN — његов меридијан; са ZK_1N — вертикал азимута $P_sZK_1=A$. Овим вертикалом дефинисан је велики круг ZK_1NK_2. Означимо му полове са Q_n, односно са Q_s. Пречник, $Q_n\,Q_s$ нормалан је онда на равни великог круга ZK_1NK_2. А нормалан је и на тангентним равнима на сфери у тачкама Q_n и Q_s, то јест на хоризонтским равнима тачака Q_n и Q_s, које су, према томе, паралелне са равни вертикала Z_1KN, азимута A. Тражене тачке на Земљи су, дакле, Q_n и Q_s, то јест полови великог круга дефинисана вертикалом датог азимута. Треба још одредити географске координате тих тачака.



Сл. 36.

Притом ће довољно бити да одредимо координате само, рецимо, пола Q_n; координате другог пола, Q_s, биће одређене као координате антипода пола Q_n.

Географска ширина пола Q_n једнака је, као што се са слике види, углу $WOQ_n=$ углу $P_sOK_1=A$. За географску дужину налазимо, опет, ако приметимо да P_nG претставља гринички меридијан, да је једнака углу $WOG=-L+90^0$.

Координате оне друге тачке, Q_s, то јест антипода прве, Q_n, биће:

географска ширина: једнака углу $EOQ_s=-A$;

географска дужина: једнака углу $GOK_2=-L-90^0$.

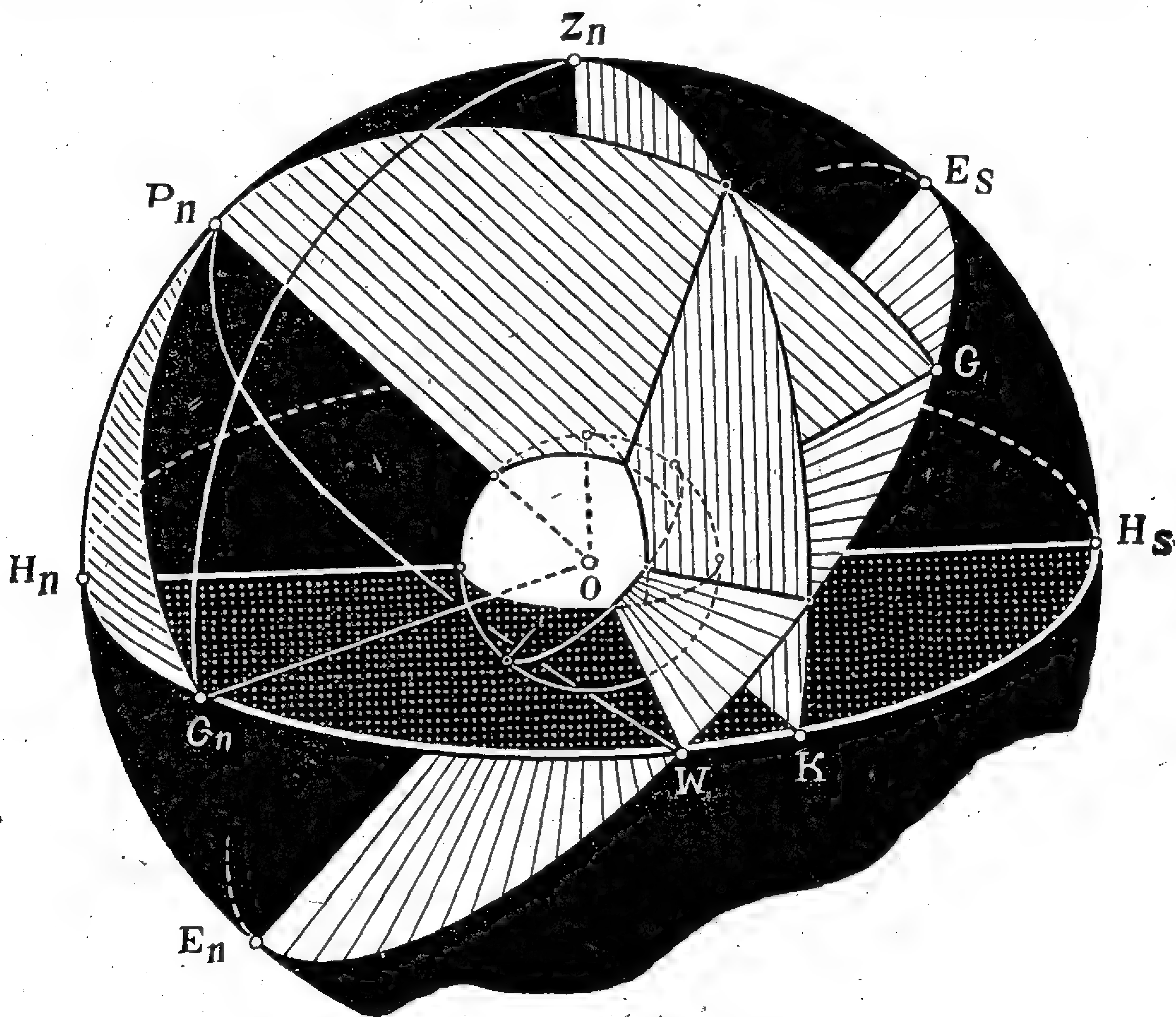
Ако унесемо вредности дате у задатку, $L=-20^0$ и $A=70^0$, добивамо за координате тачака на Земљи-сфери чије су хоризонтске равни паралелне равни вертикала $A=70^0$, у месту на екватору чија је географска дужина $L=-20^0$:

за Q_n, то јест северну тачку: $L_n=+70^0$, $\varphi_n=+70^0$;

за Q_s, то јест јужну тачку: $L_s=-110^0$, $\varphi_s=-70^0$.

53. Нека на сл. 37 претставља: Z_n зенит посматрача који се налази у Београду; OZ_nK његов вертикал азимута $A=70^0$; Q_n пол тог вертикала (и то онај ближи северном небеском полу), то јест зенит посматрача чија је хоризонтска раван паралелна са равни овог вертикала. То је, другим речима, једна од двеју тачака чије географске координате треба одредити.

Означимо географске координате посматрача у Београду са L и φ, а посматрача чији је зенит Q_n са L_n и φ_n. Са слике видимо онда да је $\sphericalangle Q_n Z P_n = \pi - \sphericalangle H_n P Q_n = \pi - (\sphericalangle H_s Z K + \sphericalangle K Z Q_n) = \pi - \left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - A$. Значи, и страна $H_n Q_n$, у правоуглом сферном троуглу $P_n H_n Q_n$, једнака је $\frac{\pi}{2} - A$. У овом сферном троуглу познате су нам, према томе, две стране, те из њега можемо одредити све остале његове елементе. За трећу ње-



Сл. 37.

гову страну, $P_n Q_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$, имамо

$$\sin \varphi_n = \cos \varphi \cdot \sin A,$$

одакле одређујемо тражену географску ширину φ_n. Сем тога имамо и

$$\sin \varphi = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} P_n, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} P_n = \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} A;$$

одавде налазимо угао $P_n = \pi - \sphericalangle E_s P_n Q_n = \pi - (L_n + L)$, другим речима, налазимо L_n.

Према подацима задатка имаћемо, дакле:

$[\cos\varphi]$	9·85 097,	$[\sin\varphi]$	9·84 799,
$[\sin A]$	9·97 299,	$[\mathrm{tg}\, A]$	0·43 893,
$[\sin\varphi_n]$	9·82 396,	$[\mathrm{ctg}\, P_n]$	0·28 692,
$\varphi_n = +41^\circ 49'{\cdot}0$		$P_n =$	$27^\circ 19'{\cdot}0$;

$$L_n + L = 152^\circ 41'{\cdot}0, \quad \text{дакле,} \quad L_n = +132^\circ 10'{\cdot}2.$$

Према томе координате антипода овог посматрача биће:

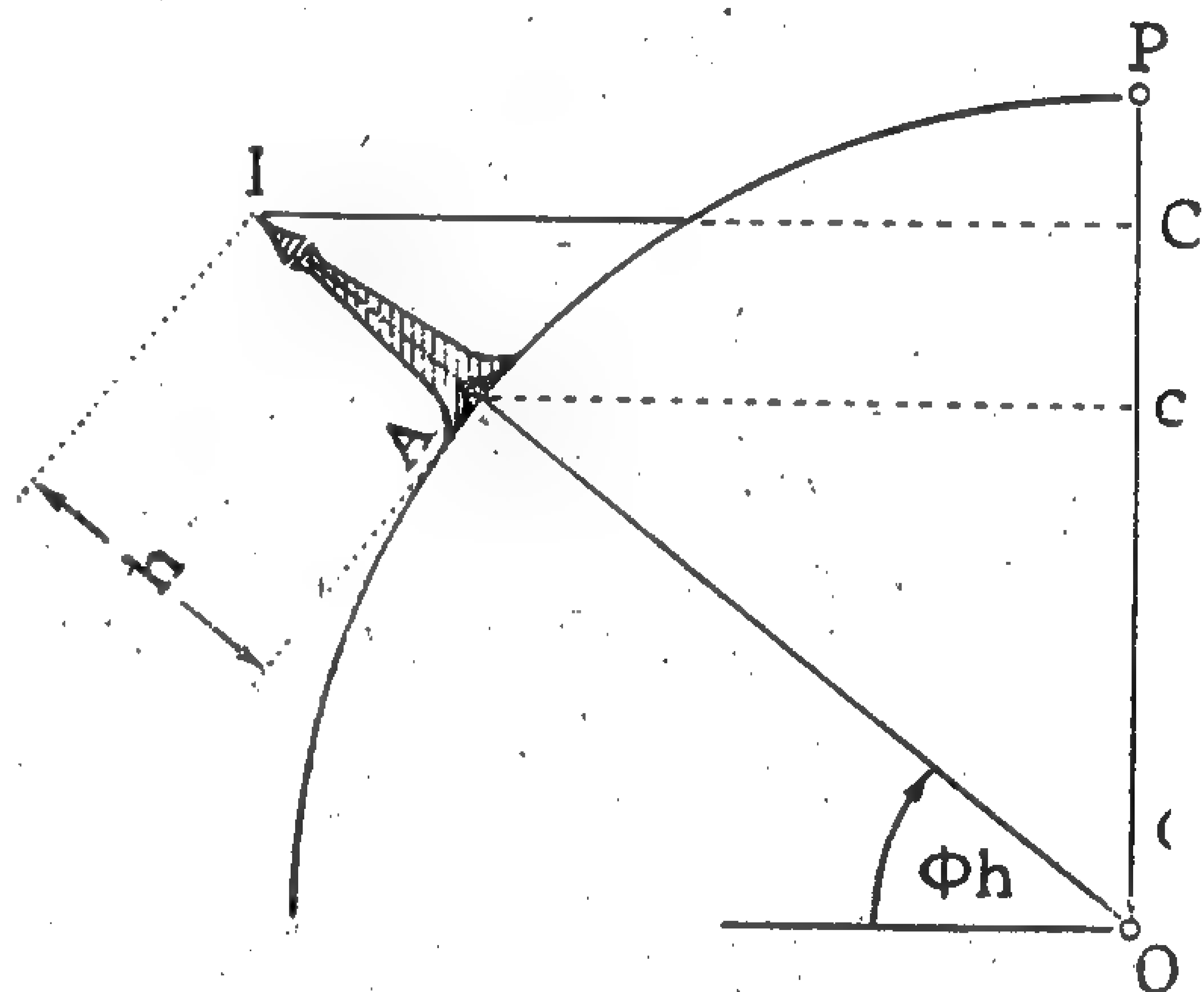
$$\varphi_s = -41^\circ 49'{\cdot}0 \quad \text{и} \quad L_s = -47^\circ 49'{\cdot}8.$$

54. На Земљи-сфери, полупречника R, врх неког торња AI (в. сл. 38), висине h, на географској ширини φ_h, описиваће, услед Земљина обртног кретања, кружну путању полупречника

$$CI = r_h = (R+h)\cos\varphi_h,$$

док ће подножје торња описивати кружну путању полупречника

$$cA = r = R\cos\varphi_h.$$



Сл. 38.

Означимо са ω угловну брзину Земљина обртног кретања. Онда ће линеарна брзина, v_h, врха торња бити

$$v_h = (R+h)\,\omega\cos\varphi_h.$$

А означимо ли са v линеарну брзину тачке на Земљи, на непознатој географској ширини, $\varphi_h + \Delta\varphi$, чија је линеарна брзина једнака брзини врха торња имаћемо

$$(R+h)\,\omega\cos\varphi_h = R\,\omega\cos(\varphi_h + \Delta\varphi).$$

Како је $\Delta\varphi$, очигледно, мали угао, ову једначину можемо написати, пошто развијемо и скратимо,

$$h\cos\varphi_h = -R\,\Delta\varphi\sin\varphi_h, \quad \text{то јест} \quad \Delta\varphi = -\frac{h}{R}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_h,$$

или, у секундама угла

$$\Delta\varphi'' = -\frac{h}{R\,\mathrm{arc}\,1''}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_h.$$

Према задатку је: $h = 300$ м, $\varphi_h = +48^\circ 50' 11''$. Ако узмемо $R = 6370$ км и приметимо да је $(\mathrm{arc}\,1'')^{-1} = 206\,265''$, добивамо $\Delta\varphi = -8''{\cdot}5$.

Тражена тачка налази се, дакле, $8''{\cdot}5$ јужније од торња. Како углу од $1''$ одговара дужина лука меридијана од 30·88 м, нађеној разлици географске ширине одговара даљина тачке од подножја торња од 262 м.

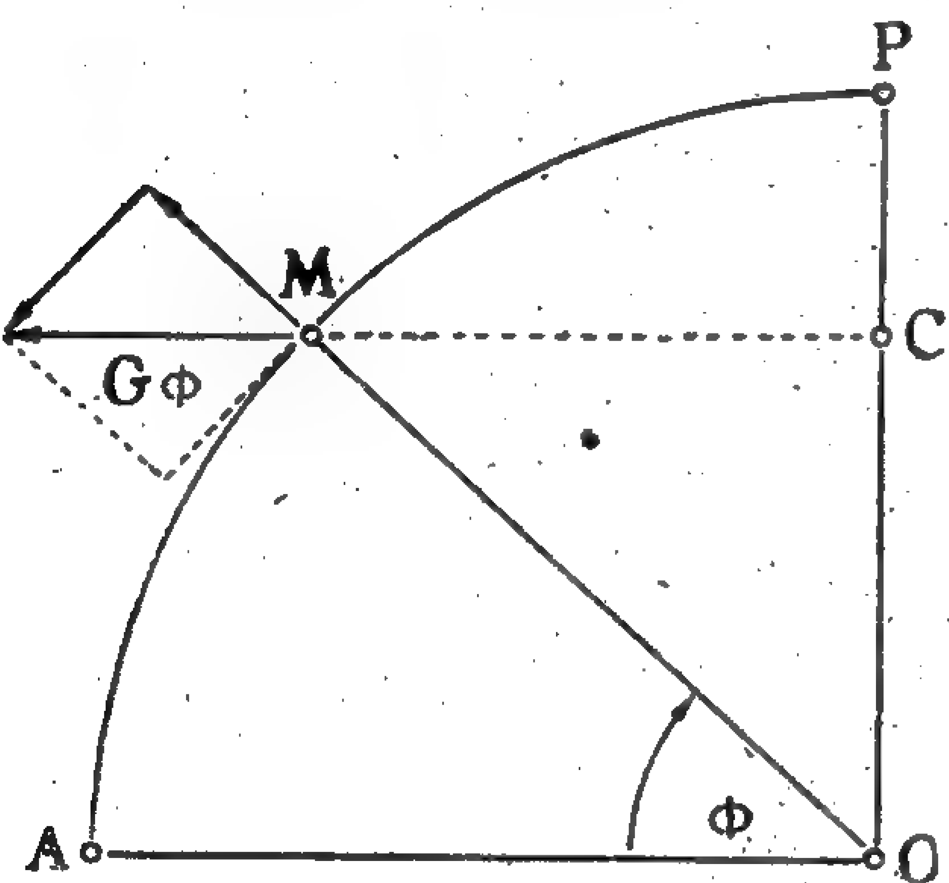
55. Износ скретања ка истоку материјалне честице, пуштене да слободно пада, рецимо са висине h, дата је, ако се занемаре отпор

ваздуха и промене убрзања силе теже услед висине, изразом (који прет постављамо као познат)

$$\sigma_{\varphi}=\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}\omega\sqrt{\frac{2}{g_{\varphi}}}\cos\varphi .$$

Према задатку је: $\varphi=0^0$; $h=300$ м; $g_0=978{\cdot}03$ цм сек$^{-2}$. Како је Земљина угловна брзина $\omega=73\times10^{-6}$, налазимо за скретање $\sigma_{\varphi}=114$ мм.

56. Означимо: са ω угловну брзину Земљина обртног кретања; са r_{φ} полупречник, CM (в. сл. 39), кружне путање што је тачка M на Земљиној површини описује при обртању; са T трајање у секундама (средњег времена) једног обрта; са R полупречник Земље-сфере; са φ географску ширину тачке M. Онда имамо за аксифугално убрзање, које ћемо означнти са G_{φ},



Сл. 39.

$$G_{\varphi}=\omega^2 r_{\varphi}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{\varphi}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi .$$

Бројне вредности величина које се овде јављају су $T=86\,164^s{\cdot}09$ и $R=6370\times10^5$ цм. Према томе, за аксифугална убрзања на траженим географским ширинама имаћемо:

$[2\pi]$	0·79 818,	$[2\pi:T]$	5·86 285 – 10,	$[R]$	8·80 414,
$[T]$	4·93 533;	$2[2\pi:T]$	1·72 570 – 10;	$\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\right]$	0·52 984;

За	$\varphi=0^0$:	$\varphi=30^0$:	$\varphi=90^0$:
$[\cos\varphi]$	–	9·93 753,	9·69 897,
$[G_{\varphi}]=\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi\right]$	0·52 984,	0·46 737,	0·22 881,
$G_{\varphi}=$	3·39 цм сек$^{-2}$;	2·93 цм сек$^{-2}$;	1·69 цм сек$^{-2}$.

Разложимо ово убузање, чији је смер од C ка M, у радијалну и тангенцијалну компоненту. Радијална компонента, чији је смер супротан смеру убрзања Земљине привлачне силе, има за израз $G_{\varphi}{\cdot}\cos\varphi$. На екватору је, међутим, смер самог аксифугалног убрзања супротан смеру Земљине привлачне силе. Према томе, знајући износ аксифугалног убрзања, G_e, на екватору, ако измеримо убрзање силе теже, g_e, на екватору, — моћи ћемо одредити убрзање Земљине привлачне силе (под претпоставком да Земља не ротира). Тако налазимо да је

$$G=g_e+G_e.$$

Ако за g_e унесемо нађену вредност убрзања силе теже на екватору, $g_e=978{\cdot}0$ цм сек$^{-2}$, како је за G_e нађено $G_e=3{\cdot}4$ цм сек$^{-2}$, добивамо $G=981{\cdot}4$ цм сек$^{-2}$.

Видимо дакле да масе на Земљиној површини услед аксифугалног убрзања бивају лакше но што би биле да Земља не ротира, и то за $\left(\frac{G_\varphi}{G}\cdot\cos\varphi\right)$-ти део своје тежине на мирној Земљи-сфери. Значи, на географским ширинама: $\varphi=0^0$, $\varphi=30^0$, $\varphi=60^0$, где је

$G_\varphi \cos\varphi$: 3·39 цм сек$^{-2}$, односно 2·54 цм сек$^{-2}$, односно 0·845 цм сек$^{-2}$,

биће масе лакше за: 1/289-ти, односно 1/386-ти, односно 1/1161-и део своје тежине на Земљи-сфери која не ротира.

57. У решењу Зад. 56 показано је да тежине маса на Земљину екватору постају мање, дакле тела лакша за $\frac{G_e}{G}=1/289$ своје тежине коју би имала кад Земља не би ротирала. Одатле закључујемо да ће масе на Земљину екватору потпуно изгубити тежине кад буде било $G_e=G$, то јест кад аксифугално убрзање буде достигло вредност убрзања Земљине привлачне силе. Другим речима, кад би аксифугално убрзање на екватору постало 289-пута веће. А то би могло наступити кад би ω^2, то јест квадрат угловне брзине Земљина обртног кретања постао 289-пута већи, или само ω постало $\sqrt{289}=17$-пута веће од стварне вредности. То значи, кад би угловна брзина достигла вредност

$$17\cdot\omega=17\times72{\cdot}92\times10^{-6}\approx1240\times10^{-6}, \text{ или } \omega=255''{\cdot}7;$$

то јест кад би се Земља, место за 86 164^s, једанпут обртала за:

$$86\,164^s:17\approx5068^s=1^h\,24^m\,28^s.$$

58. 1. За силу теже имамо израз

$$P=m\cdot g,$$

где m означава масу тела, а g убрзање које тело стиче под дејством силе теже. Како је ова сила, коју зовемо и тежином тела, само специјалан случај опште гравитације, која је дата познатим изразом

$$F=k^2\cdot\frac{m\cdot M}{r^2},$$

где m и M означавају масе двају тела, r даљину међу њима, а k^2 константу гравитације, — видимо да је убрзање силе теже

$$g=k^2\frac{M}{r^2},$$

где сад M претставља Земљину масу, а r даљину масе m од Земљина средишта.

Кад би Земљина маса испунила равномерно простор до Месечеве даљине, тежина масе m на њеној површини постала би тада

$$P_{☾}=m\cdot g_{☾},$$

где је
$$g_{\leftmoon}=k^2\cdot\frac{M}{r^2_{\leftmoon}}.$$

Упоређењем вредности за убрзања g и $g_{\leftmoon}$ налазимо

$$g_{\leftmoon}=\left(\frac{r}{r_{\leftmoon}}\right)^2\cdot g.$$

Како је, према задатку, $r_{\leftmoon}=60{\cdot}27\,r$, добићемо да је

$$g_{\leftmoon}\approx\frac{1}{3632}\,g,\quad \text{или}\quad g_{\leftmoon}=0{\cdot}27\ \text{цм сек}^{-2}.$$

2. Из овога видимо да убрзања, $g_{\leftmoon}$ и g, стоје у обрнутој размери са квадратима полупречника стварне и замишљене увећане Земљине сфере. Према томе ћемо имати, ако означимо:

са γ убрзање масе m на Сунчевој површини;

са $\gamma_{\odot}$ убрзање масе m на површини Сунчеве сфере кад би полупречник ове достигао астрономску јединицу;

са R полупречник Сунчев, који износи 695 300 км;

са $R_{\odot}$ полупречник једнак астрономској јединици, то јест 149 450 000 км;

$$\gamma_{\odot}=\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2\cdot\gamma=\left(\frac{1}{215}\right)^2\gamma=\frac{1}{46\,225}\,\gamma.$$

Узмемо ли у обзир да је

$$\gamma=27{\cdot}89\,g,\ \text{добивамо да је}\ \gamma_{\odot}=\frac{1}{1657}\,g,$$

где g означава убрзање силе теже на Земљину екватору.

59. Ако је звездани часовник са секундним клатном у Паризу показивао тачно време, дакле у току звезданог дана откуцавао 86 400 секунада, а пренесен у Кајену (место у близини Земљина екватора) закашњавао за по $2^m\,28^s=148^s$ дневно, — значи да је у Кајени оволико секунада мање откуцавао у току звезданог дана него у Паризу. Према томе, у Кајени је часовник, у току звезданог дана, откуцавао свега 86 252 секунде. Ово, другим речима, значи да су секунде овог часовника у Кајени постале, у односу према секундама у Паризу, дуже за

$$148^s:86\,252\approx 0^s{\cdot}0017.$$

Познато је, међутим, да је трајање малих осцилација клатна, дужине l, дато изразом

$$t^2=\pi^2\frac{l}{g},$$

из којега се види да је, при непромењеној дужини клатна, трајање његове осцилације функција само убрзања силе теже.

Из последњег израза добивамо одмах

$$\frac{2\,dt}{t} = -\frac{dg}{g}.$$

Стављајући овде $t = 1^s$, за g вредност убрзања силе теже у Паризу, то јест $g = 980{\cdot}94$ цм сек$^{-2}$, а за dt нађену промену у трајању секунде услед преноса часовника из Париза у Кајену, добивамо за промену убрзања силе теже:

$$dg = -2 \times 0{\cdot}0017 \times 980{\cdot}94 \text{ цм}{\cdot}\text{сек}^{-2} = -3{\cdot}34 \text{ цм}{\cdot}\text{сек}^{-2}.$$

60. Док код часовника са клатном трајања осцилација (t), која су дата изразом,

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g},$$

зависе и од дужине (l) клатна и од убрзања силе теже (g), дотле код хронометра то није случај. Трајање осцилације спиралне опруге код хронометра не зависи од дејства силе теже, дакле ни од положаја хронометра на Земљи. Ако хронометар показује тачно време на извесном месту, он ће показивати тачно време, под истим осталим условима, и на сваком другом месту. Часовник са клатном, међутим, у којега је дужина (l) клатна била подешена да на месту географске ширине, рецимо, φ_1, избија секунде, — пренесен на неко место географске ширине φ_2 неће више избијати секунде, дакле ни показивати тачно време. Да би, и после промене положаја, часовник показивао тачно време, треба, за нову вредност убрзања силе теже, подесити дужину клатна.

Ако хронометар и часовник са клатном, одређене дужине (l), показују тачно време, рецимо, у Београду, на $\varphi = +44^0\,48'{\cdot}1$, при $g_\varphi = 980{\cdot}61$ цм сек$^{-2}$, па их пренесемо на екватор, где је убрзање силе теже $g_e = 978{\cdot}03$ цм сек$^{-2}$, — трајања осцилација часовника ће се променити: између хронометра и часовника појавиће се неслагања. Можемо им оценити и приближан износ, ако диференцирамо горњи израз за трајања осцилација,

$$\frac{2\,dt}{t} = -\frac{dg}{g},$$

па у исти унесемо величине и промене дате у задатку, то јест

$$t = 1^s; \qquad g = 980{\cdot}61 \text{ цм сек}^{-2}; \qquad dg = -2{\cdot}58 \text{ цм сек}^{-2};$$

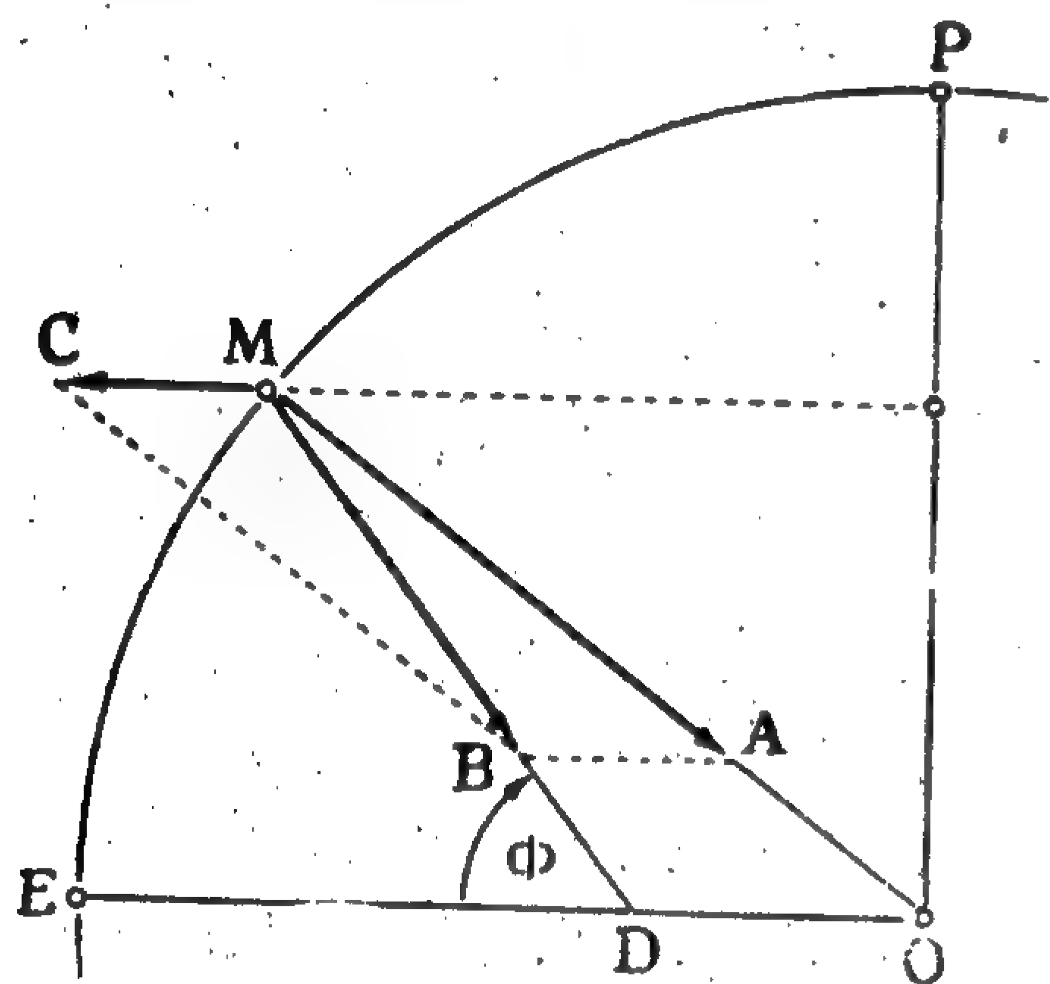
добивамо за промену у трајању осцилације

$$dt = -\frac{t}{2}\cdot\frac{dg}{g} = \frac{2{\cdot}58}{2 \times 980{\cdot}61} = +0^s{\cdot}0013.$$

За оволико би, дакле, на екватору, осцилација часовникова клатна дуже трајала, што значи да би часовник, за дан, заостајао, у односу према хронометру, за $86\,400 \times 0^s{\cdot}0013 = 112^s{\cdot}3 = 1^m\,52^s{\cdot}3$.

Часовник би могао, после преноса на екватор, показивати тачно време ако би му се дужина клатна подесила. За нову дужину налазимо, ако у образац за трајање осцилације унесемо $t = 1^s$, $g = 978{\cdot}03$ цм сек$^{-2}$, $\pi^2 = 9{\cdot}86\,960$; дакле, $l = 99{\cdot}10$ цм. Часовник ће после преноса поново моћи показивати тачно време, ако му се клатно скрати за 0·26 цм.

61. Претставимо на сл. 40 са OEP део меридијанског пресека Земље-сфере, полупречника R, и са M материјалну тачку на њеној површини. Претставимо даље, са:



Сл. 40.

$\vec{MA}$ убрзање, G, тачке под дејством Земљине привлачне силе;

$\vec{MC}$ аксифугално убрзање, γ_φ;

$\vec{MB}$ резултантно убрзање ових двају, или убрзање силе теже, које ћемо означити са g_φ.

Означимо, сем тога: угао MOE, између Земљина полупречника тачке M и екватора, који ћемо отсад звати геоцентричном ширином тачке M, — са φ';

угао MDE, између правца дејства силе теже, дакле правца вертикале у тачки M, и екватора, који ћемо звати географском ширином тачке M, — са φ;

угао BMA, уствари разлику $\varphi - \varphi'$, — са ε.

Онда видимо да из троугла MBA имамо

$$G{\cdot}\sin\varepsilon = \gamma_\varphi{\cdot}\sin\varphi.$$

Узмемо ли, међутим, у обзир да се углови φ и φ' један од другог мало разликују и да, без приметних последица, можемо користити (место $\gamma_\varphi = R\,\omega^2 \cos\varphi' = \gamma_e \cos\varphi'$)[1] приближну релацију

$$\gamma_\varphi = \gamma_e \cos\varphi,$$

добивамо, место горњег израза,

$$G{\cdot}\sin\varepsilon = \gamma_e \sin\varphi{\cdot}\cos\varphi = \frac{1}{2}\gamma_e \sin 2\varphi,$$

или

$$\sin\varepsilon = \frac{\gamma_e}{2G}\sin 2\varphi, \quad \text{или} \quad \varepsilon'' = \frac{\gamma_e \sin 2\varphi}{2\,G \operatorname{arc} 1''}.$$

Унесемо ли за познате величине њихове бројне вредности, налазимо

$$\varepsilon'' = \frac{206\,265''}{2 \times 289}{\cdot}\sin 2\varphi = 356''{\cdot}9 \sin 2\varphi.$$

Помоћу овог израза можемо одговорити на питање постављено у задатку.

---

[1]) ω означава угловну брзину Земљине ротације; γ_e аксифугално убрзање тачке на екватору.

Кад би Земља престала да ротира, вертикала у Београду променила би свој правац за угао:

$$\varepsilon = 356''{\cdot}9 \cdot \sin 2\varphi = 356''{\cdot}9 \times 0{\cdot}99\,998 \approx 357'' = 5'\,57'',$$

за оволико би се (као што се и са сл. види) смањила географска ширина Београда, тако да би постала $\varphi = +44^0\,42'$.

62. Ако су хронометар и часовник са клатном показивали тачно време на екватору, где је убрзање силе теже $g = 978{\cdot}03$ цм сек$^{-2}$, пренесени на било који од Земљиних полова, где је убрзање силе теже за 5·18 цм сек$^{-2}$ веће, — они неће више показивати исто време: часовник ће предњачити. Да бисмо нашли за колико, диференцираћемо израз за трајање малих осцилација клатна, сматрајући у њему дужину клатна као константну. И добићемо

$$\frac{2\,dt}{t} = -\frac{dg}{g}.$$

Унесемо ли бројне вредности величина, према задатку, то јест:

$$t = 1^s; \qquad g = 978{\cdot}03 \text{ цм сек}^{-2}; \qquad dg = +5{\cdot}18 \text{ цм сек}^{-2},$$

налазимо

$$dt = -\frac{5{\cdot}18}{2 \times 978{\cdot}03} = -0^s{\cdot}00\,265.$$

За оволико ће на полу трајање осцилације часовника бити краће него што је било на екватору. Значи, у току једног звезданог дана часовник ће на полу избијати

$$n = \frac{86\,400^s}{1^s - 0^s{\cdot}00\,265} = \frac{86\,400^s}{0^s{\cdot}99\,735} \approx 86\,629{\cdot}9 \text{ осцилација},$$

или часовник ће предњачити, испред хронометра, за по $3^m\,49^s{\cdot}6$ дневно.

63. Ако за убрзање силе теже на екватору, на Земљи-сфери која ротира, узмемо $g_e = 978{\cdot}03$ цм сек$^{-2}$, а за аксифугално убрзање на екватору $\gamma_e = 3{\cdot}39$ цм сек$^{-2}$, видимо да би за оволико, на екватору на Земљи која не ротира, убрзање силе теже било веће.

Пођемо ли сада од израза за дужину секундног клатна на екватору

$$l = g \cdot \pi^{-2},$$

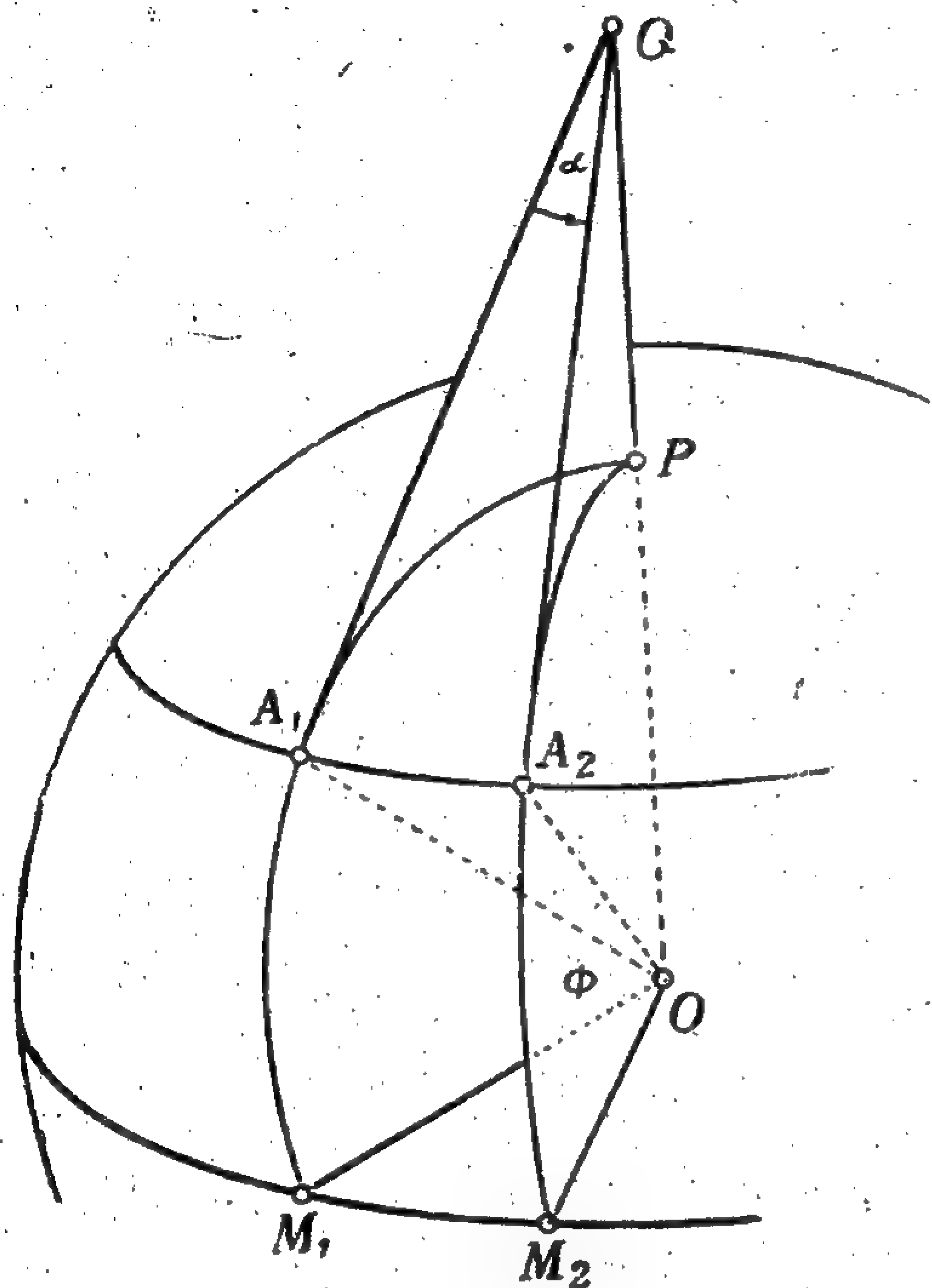
и диференцирамо ли га, добићемо

$$dl = dg \cdot \pi^{-2}.$$

Унесемо ли за познате величине њихове бројне вредности, добивамо

$$dl = \frac{3{\cdot}39}{9{\cdot}8696} = 3{\cdot}4 \text{ мм}.$$

Другим речима, кад би Земља престала одједном да ротира (дакле природни „часовник“ стао), секундно клатно часовника на екватору требало би продужити за 3·4 мм, да би часовник могао продужити да показује тачно време.



Сл. 41.

64. Претставимо на сл. 41: са A_1 посматрача на Земљи-сфери, на географској ширини φ; са PA_1M_1 његов меридијан; са A_1Q тангенту на посматрачеву меридијану, која ће бити, уједно, и почетни правац у који ће посматрач у A_1 пустити клатно да осцилира. Претпоставимо да га је пустио.

После извесног времена посматрач ће, услед Земљине ротације, доспети у A_2; његов меридијан у положај PA_2M_2; тангента на његов меридијан у A_2Q. Правац равни осцилација клатна, међутим, остао је непромењен, то јест сâм себи паралелан. Како је угао између првобитног правца тангенте, A_1Q, и новог правца, A_2Q, као што са сл. видимо, α, значи да ће и угао између новог правца тангенте, A_2Q, и равни осцилација клатна бити α. Друкчије речено, посматрачу ће изгледати као да се раван осцилација обрнула, око вертикале, за угао α, у смеру супротном смеру Земљине ротације. Те ако означимо:

са ω угловну брзину Земљине ротације;
са r_φ полупречник Земљина паралела A_1A_2;
са R полупречник Земљине сфере, — видимо са слике да је

$$A_1A_2 = \omega \cdot r_\varphi = \omega \cdot R \cdot \cos\varphi,$$

$$A_1A_2 = \alpha \cdot A_1Q = \alpha \cdot R \cdot \operatorname{ctg}\varphi,$$

а одавде налазимо

$$\alpha = \omega \cdot \sin\varphi,$$

или, речима, привидна угловна промена равни осцилација клатна, у односу према почетном правцу осцилација, пропорционална је синусу географске ширине места.

65. Угловна брзина тачака на Земљиној површини, услед њена обртног кретања, износи 360^0 за звездани дан, или 15^0 за звездани час. На Земљиним половима толика је и угловна брзина привидног скретања равни осцилација клатна. За посматрача на географској ширини φ, међутим, угловна брзина привидног скретања равни осцилација је

$$\alpha = 15^0 \sin\varphi \text{ за звездани час.}$$

У Београду ће, према томе бити,

$$\alpha = 15^0 \times 0{\cdot}70\,463 \approx 10^0{\cdot}57 = 10^0 34'{\cdot}2.$$

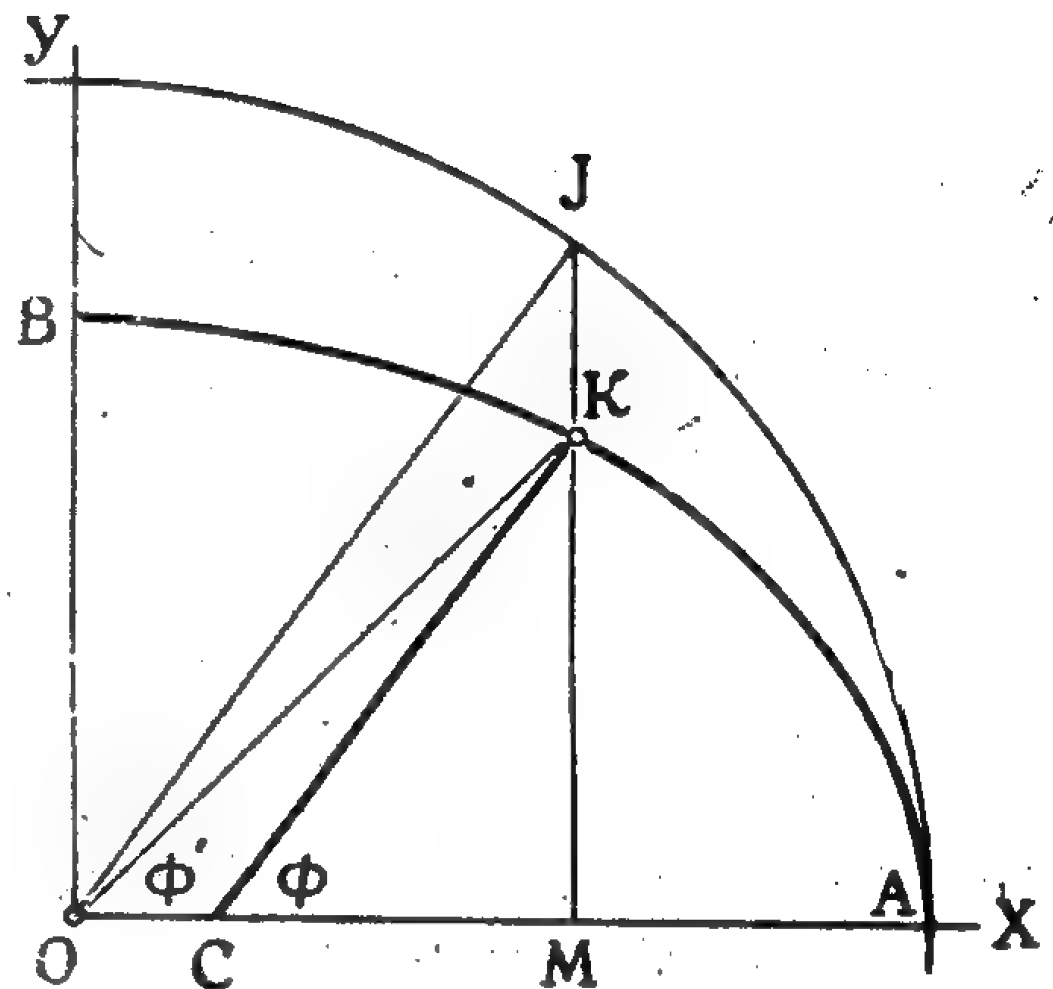
Након 9^h звезданог времена ће раван осцилација привидно скренути за $95^0{\cdot}1$, с лева у десно. Како је, према задатку, клатно пуштено да осцилира у равни првог вертикала (узмимо западног), дакле у азимуту 90^0, азимут равни осцилација 9^h касније (под претпоставком да се клатно све то време одржи у осцилацији) биће $185{\cdot}^01$.

66. Претставимо на сл. 42, са $OAKB$, један део Земљине меридијанске елипсе и, на њој, са K посматрачев положај. Узмемо ли јој средиште за почетак координатног система, дакле осе a и b за координатне осе, и означимо ли координате посматрачева положаја са (x, y), оне ће задовољавати једначину

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

Повуцимо сад на слици главни круг елипсе, AJY, који је окарактерисан познатом особином да је

$$\frac{KM}{JM}=\frac{b}{a}.$$



Сл. 42.

Затим спојмо тачке K и J са елипсиним средиштем и означимо угао AOK, између равни екватора и радија OK, који ћемо звати посматрачевом геоцентричном ширином, словом φ', а угао AOJ, који ћемо звати посматрачевом редукованом ширином, словом ψ. Повучемо ли још и нормалу KC, која се поклапа са посматрачевом вертикалом, која, према томе, са екваторском равни образује угао φ, који зовемо посматрачевом географском ширином, добивамо за посматрачеве правоугле координате

$$x=a\cos\psi=r\cos\varphi',$$

$$y=b\sin\psi=r\sin\varphi'.$$

С друге стране, ако диференцирамо једначину меридијанске елипсе, добивамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

И тако, за везу између геоцентричне и редуковане, с једне, и географске ширине посматрачеве, с друге стране, добивамо

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\operatorname{tg}\varphi, \qquad \text{односно} \qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

или, друкчије,

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\varphi'.$$

Ако су, дакле, дате велика и мала полуоса Земљина елипсоида и посматрачева географска ширина, помоћу ових веза долазимо до било

геоцентричне, било редуковане ширине, а помоћу ове, опет, до правоуглих координата посматрачевих.

За посматрачев геоцентрични радије имамо

$$r = x \sec \varphi'.$$

Међутим, ако у једначину елипсе унесемо, преко y, геоцентричну ширину, она ће постати

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \operatorname{tg} \varphi'}{b}\right)^2 = 1,$$

а одавде добивамо

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi'\right) \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi'}.$$

Заменимо ли ову вредност x_{-a} у горњи израз за посматрачев геоцентрични радије, добивамо

$$r = \frac{a \sec \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} \varphi'}} = a \left[\cos \varphi \cdot \sec (\varphi - \varphi') \cdot \sec \varphi'\right]^{\frac{1}{2}},$$

дакле израз у облику погодном за нумеричку примену.

За посматрача у Београду, на $\varphi = +44^\circ\, 48'\, 13''.20$ (положај Астрономске опсерваторије) биће, дакле:

a	$= 6378{\cdot}388,$	$\left[\frac{b}{a}\right]$	9·998 5350,	$\psi =$	$+44^\circ\, 42'\, 25''{\cdot}30,$
b	$= 6356{\cdot}909,$	$[tg\,\varphi]$	9·997 0236,	$\varphi' =$	$+44\;\; 36\;\; 37\; {\cdot}45,$
$[b]$	3·803 2460,	$2\left[\frac{b}{a}\right]$	9·997 0700,	$\varphi =$	$+44\;\; 48\;\; 13\; {\cdot}20,$
$[a]$	3.804 7110;	$[tg\,\psi]$	9·995 5586,	$\varphi - \varphi' =$	$+11\;\; 35\; {\cdot}75;$
		$[tg\,\varphi']$	9·994 0936;		

$[\cos(\varphi - \varphi')]$	9·999 9975,	$\frac{1}{2}\Delta$	9·999 2763,	$[\sin\psi]$	9·847 2529,
$[\cos\varphi']$	9·852 4181,	$[a]$	3·804 7110,	$[\cos\psi]$	9·851 6944,
Σ	9·852 4156,	$[r]$	3·803 9873,	$[\sin\varphi']$	9·846 5118,
$[\cos\varphi]$	9·850 9681,	$r =$	6367 770 км	$[\cos\varphi']$	9·852 4181;
$[\cos\varphi : \Sigma] = \Delta =$	9·998 5525;				

са горњим вредностима за a и b и са израчунатим r налазимо:

$[x]_{\psi}$	3·656 4054,	$[x]_{\varphi'}$	3·656 4054,
$[y]_{\psi}$	3·650 4989,	$[y]_{\varphi'}$	3·650 4991,
x	= 4533·205 км,	x	= 4533·205 км,
y	= 4471·970 км;	y	= 4471·972 км.

У примени се, међутим, ове величине не изражавају у км већ у Земљиним екваторским полупречницима. Према томе бисмо имали:

$[x]$ 9·851 6944,	$[y]$ 9·845 7879,	$[r]$ 9·999 2763,
x = 0·710 7133,	y = 0·701 1127,	r = 0·998 3350.

67. За редуковану ширину, ψ, посматрача који се налази на географској ширини φ имамо (према решењу претходног задатка)

$$tg\,\psi = \frac{b}{a}\,tg\,\varphi.$$

Но ако приметимо да је

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\psi},$$

и користимо горњу везу, добићемо

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\frac{a-b}{a}\cdot\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Уведимо ли сад спљоштеност, која је дефинисана са

$$\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \alpha, \qquad \text{дакле } \frac{b}{a} = 1 - \alpha,$$

налазимо

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\alpha\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\cos^2\varphi + (1-\alpha)\sin^2\varphi} = \frac{\alpha\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{1 - \alpha\cdot\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\,\alpha\sin 2\varphi\,(1 - \alpha\sin^2\varphi)^{-1}.$$

Члан у загради на десној страни можемо развити по биномном обрасцу. Како је α мала величина, занемарићемо на десној страни чланове са квадратом и вишим степенима α, то јест спљоштености. С друге стране, ако приметимо да је разлика $\varphi - \psi$ угао од нешто преко десетак минута, заменићемо тангенс, на левој страни, углом и биће

$$(\varphi - \psi)''\operatorname{arc} 1'' = \frac{1}{2}\,\alpha\cdot\sin 2\varphi,$$

или

$$\psi = \varphi - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\operatorname{arc} 1''}\sin 2\varphi\right)''.$$

На истоветан начин, полазећи од израза за геоцентричну ширину,

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

и ако још уведемо ексцентричност, која је дефинисана са

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2, \quad \text{дакле} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

долазимо до израза

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{e^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \, (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1}.$$

А одавде, занемарујући на десној страни чланове са степенима ексцентричности вишим од другог, налазимо

$$(\varphi - \varphi')'' \operatorname{arc} 1'' = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi,$$

или

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{\operatorname{arc} 1''} \sin 2\varphi \right)''.$$

До траженог израза за геоцентрични радије доћи ћемо ако приметимо да, пошто у једначину меридијанске елипсе за y унесемо

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} \varphi,$$

добивамо

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{односно} \quad x^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

а, затим, и

$$y = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{односно} \quad y^2 = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

А из ових израза добивамо

$$r^2 = a^2 \frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \sin^2 \varphi} = a^2 \frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ако сад на десној страни, пошто развијемо и измножимо, занемаримо чланове са степенима ексцентричности вишим од другог, добивамо

$$r^2 = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi),$$

односно, за сâм геоцентрични радије,

$$r = a \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi \right) = a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 (1 - \cos 2\varphi) \right].$$

За Београд, то јест $\varphi = +44^0\,48'\,13''{\cdot}20$, добивамо са

$$\alpha = \frac{1}{297} \text{ и } e = 0{\cdot}082,\ \sin 2\varphi = 0{\cdot}99\,998,\ \sin\varphi = 0{\cdot}70\,467,\ \sin^2\varphi = 0{\cdot}49\,656:$$

$$\psi = \varphi - 347''{\cdot}2 = +44^0\,42'\,26''{\cdot}0;$$

$$\varphi' = \varphi - 693{\cdot}5 \ = +44\ \ 36\ \ 39{\cdot}7;$$

$$r = 6378{\cdot}388 \times 0{\cdot}99\,833 = 6367{\cdot}736.$$

68. 1) Како је геометриски ред

$$p + p^2 + p^3 + \ldots$$

за $|p| < 1$ апсолутно конвергентан, дати бесконачни ред,

$$p \sin x + p^2 \sin 2x + p^3 \sin 3x + \ldots,$$

је равномерно конвергентан, у сваком интервалу промењливе x, јер је

$$|p^k \sin kx| \leqq |p^k|.$$

Његов збир дефинише функцију од x

$$f(x) = p \sin x + p^2 \sin 2\,x + p^3 \sin 3\,x + \ldots$$

Помножимо ову једначину са $2p\cos x$, имајући притом у виду да је

$$2 \sin nx{\cdot}\cos x = \sin(n+1)\,x - \sin(n-1)\,x,$$

и добићемо

$$\left.\begin{aligned} 2\,p\,f(x)\cos x = p^2 \sin 2\,x + p^3 \sin 3\,x + p^4 \sin 4\,x + \ldots \\ + p^3 \sin x + p^4 \sin 4\,x + \ \ldots . \end{aligned}\right\} =$$

$$= [f(x) - p \sin x] + p^2{\cdot}f(x).$$

А одавде налазимо

$$f(x)\,(1 - 2\,p\cos x + p^2) = p \sin x,$$

или $\quad f(x) = p \sin x + p^2 \sin 2\,x + p^3 \sin 3\,x + \ldots = p{\cdot}\sin x\,(1 - 2\,p\cos x + p^2)^{-1}.$

2) Ако обе стране овог израза интегралимо по x-у у границама од 0 до x, имаћемо

$$-p\cos x - \frac{1}{2}p^2\cos 2\,x - \frac{1}{3}p^3\cos 3\,x \ldots \Big|_0^x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1 - 2\,p\cos x + p^2)\Big|_0^x,$$

то јест

$$-\left(p\cos x + \frac{1}{2}p^2\cos 2\,x + \frac{1}{3}p^3\cos 3\,x\ + \ldots\right) + \left(p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1 - 2\,p\cos x + p^2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1 - 2\,p + p^2) =$$

$$= \mathrm{Log}\sqrt{1 - 2\,p\cos x + p^2} - \mathrm{Log}\,(1 - p).$$

Међутим, за $|p| < 1$ имамо

$$\mathrm{Log}\,(1 - p) = -p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3 \ldots,$$

тако да је

$$p \cos x + \frac{1}{2} p^2 \cos 2x + \frac{1}{3} p^3 \cos 3x + \ldots = -\operatorname{Log} \sqrt{1 - 2p \cos x + p^2}.$$

69. Помоћу дате једначине, на основи идентитета

$$\operatorname{tg}(y-x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

добивамо

$$\operatorname{tg}(y-x) = \frac{(n-1)\operatorname{tg} x}{1 + n \operatorname{tg}^2 x} = \frac{(n-1)\sin x \cos x}{\cos^2 x + n \sin^2 x} = \frac{(n-1)\sin 2x}{1 + \cos 2x + n(1 - \cos 2x)} =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \sin 2x \left[1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2x\right]^{-1},$$

то јест, ако уведемо да је $\frac{n-1}{n+1} = p$,

$$\operatorname{tg}(y-x) = \frac{p \sin 2x}{1 - p \cos 2x}.$$

Како је $n > 0$, то је $|p| < 1$.

Диференцирамо ли сад по p, добићемо

$$\frac{1}{\cos^2(y-x)} \frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{(1 - p \cos 2x)^2},$$

одакле је

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{(1 - p \cos 2x)^2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(y-x)}.$$

Уврстимо ли, на десној страни, раније добивену вредност за $\operatorname{tg}(y-x)$ налазимо

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \frac{\sin 2x}{1 - 2p \cos 2x + p^2}.$$

Напред је речено да је $|p| < 1$; према томе на десну страну можемо применити први образац из решења претходног задатка, дакле ставити

$$\frac{d(y-x)}{dp} = \sin 2x + p \sin 4x + p^2 \sin 6x + \ldots$$

Интегралимо ли обе стране по p у границама од 0 до p, добићемо

$$y - x \Big|_0^p = p \sin 2x + \frac{1}{2} p^2 \sin 4x + \frac{1}{3} p^3 \sin 6x + \ldots$$

Ако је $p=0$, онда је $n=1$, то јест $y=x$. Према томе,

$$y=x+p\sin 2x+\frac{1}{2}p^2\sin 4x+\frac{1}{3}p^3\sin 6x+\ldots,$$

што је и требало показати.

70. Према решењу Зад. 66. и израније познатим везама је

$$\operatorname{tg}\varphi'=\left(\frac{b}{a}\right)^2\operatorname{tg}\varphi=(1-e^2)\operatorname{tg}\varphi=(1-\alpha)^2\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\psi=\left(\frac{b}{a}\right)\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\varphi=(1-\alpha)\operatorname{tg}\varphi.$$

Све ове везе су, међутим, облика

$$\operatorname{tg}y=n\operatorname{tg}x,\quad \text{са } n>0 \quad \text{и за} \quad n=1 \quad \text{је} \quad x=y.$$

А у решењу претходног задатка дат је тригонометриски ред којим се та веза претставља.

За геоцентричну ширину, φ', треба у решењу претходног задатка заменити y са φ', x са φ и, место

$$p=\frac{n-1}{n+1},\quad \text{уврстити} \quad p=-\frac{e^2}{2-e^2}.$$

За редуковану ширину, ψ, опет, треба заменити y са ψ, x са φ и, место

$$p=\frac{n-1}{n+1},\quad \text{уврстити} \quad p=-\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

и добивамо, за геоцентричну ширину:

$$\varphi'=\varphi-\left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^2\sin 4\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^3\sin 6\varphi+\ldots,$$

а за редуковану ширину:

$$\psi=\varphi-\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2\sin 4\varphi-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^3\sin 6\varphi+\ldots.$$

Уносећи у ове изразе

$$e=0{\cdot}081\,992,\qquad \alpha=0{\cdot}003\,367,$$

добивамо:

$$\varphi'=\varphi-695''{\cdot}665\sin 2\varphi+1''{\cdot}173\sin 4\varphi-0''{\cdot}003\sin 6\varphi+\ldots,$$

$$\psi=\varphi-347\ {\cdot}833\sin 2\varphi+0\ {\cdot}293\sin 4\varphi-\ldots.$$

71. Како је, према решењу Зад. 66.,

$$r^2=a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi,\qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

то је

$$r^2=\frac{a^2+b^2\,\mathrm{tg}^2\psi}{1+\mathrm{tg}^2\psi}=\frac{a^4+b^4\,\mathrm{tg}^2\varphi}{a^2+b^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}=\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{(a^4+b^4)+(a^4-b^4)\cos 2\varphi}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2\varphi}=\frac{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2+2(a^4-b^4)\cos 2\varphi}{(a+b)^2+(a-b)^2+2(a^2-b^2)\cos 2\varphi}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{1+2\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi+\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}{1+2\dfrac{a-b}{a+b}\cos 2\varphi+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}.$$

Према већ уведеним ознакама је

$$\frac{a-b}{a}=\alpha,\quad \frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2;\quad 2-\alpha=\frac{a+b}{a},\quad 2-e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2};\quad \frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2-e^2}{2-\alpha}\cdot a.$$

И ако уведемо ознаке

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\alpha}{2-\alpha}=\beta \quad \text{и} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{e^2}{2-e^2}=\gamma,$$

биће

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=\left(\frac{2-e^2}{2-\alpha}\right)^2\cdot\frac{1+2\gamma\cos 2\varphi+\gamma^2}{1+2\beta\cos 2\varphi+\beta^2},$$

или

$$\frac{r}{a}=\frac{2-e^2}{2-\alpha}\cdot\left(\frac{1+2\gamma\cos 2\varphi+\gamma^2}{1+2\beta\cos 2\varphi+\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Логаритмујмо обе стране и применимо, на десној страни, резултате решења Зад. 67. (замењујући у обрасцу p са $-\gamma$, односно $-\beta$) имаћемо

$$\mathrm{Log}\left(\frac{r}{a}\right)=\mathrm{Log}\left(\frac{2-e^2}{2-\alpha}\right)+\left(\gamma\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 4\varphi+\frac{1}{3}\gamma^3\cos 6\varphi-\ldots\right)-$$

$$-\left(\beta\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\beta^2\cos 4\varphi+\frac{1}{3}\beta^3\cos 6\varphi-\ldots\right)=$$

$$=\mathrm{Log}\left(\frac{2-e^2}{2-\alpha}\right)+(\gamma-\beta)\cos 2\varphi-\frac{1}{2}(\gamma^2-\beta^2)\cos 4\varphi+\frac{1}{3}(\gamma^3-\beta^3)\cos 6\varphi+\ldots.$$

Тако је логаритам геоцентричног радија, као функција географске ширине, претстављен у облику бесконачног тригонометриског реда.

2) Видели смо да је

$$r^2=\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}.$$

А то можемо написати

$$r^2 = \frac{a^4 - (a^4 - b^4)\sin^2\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi} = a^2 \frac{1 - \dfrac{a^4 - b^4}{a^4}\sin^2\varphi}{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi} = a^2 \frac{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{a^2}\sin^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi}.$$

или

$$r^2 = a^2 \frac{1 - e^2(2 - e^2)\sin^2\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Ставимо сад

$$e^2(2 - e^2) = \varepsilon^2.$$

Како је $0 < e < 1$, то је и $0 < \varepsilon < 1$. И тако имамо

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-1}, \text{ са } 0 < e < 1 \text{ и } 0 < \varepsilon < 1.$$

Логаритмујемо ли обе стране имаћемо

$$2\,\mathrm{Log}\left(\frac{r}{a}\right) = \mathrm{Log}\,(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi) - \mathrm{Log}\,(1 - e^2\sin^2\varphi).$$

Како је

$$0 \leqq \varepsilon \sin^2\varphi < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqq e^2 \sin^2\varphi < 1,$$

можемо писати

$$\mathrm{Log}\,(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi) = -\varepsilon^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{1}{3}\varepsilon^6\sin^6\varphi - \ldots,$$

$$\mathrm{Log}\,(1 - e^2\sin^2\varphi) = -e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}e^4\sin^4\varphi - \frac{1}{3}e^6\sin^6\varphi - \ldots;$$

а, на основи тога, и

$$\mathrm{Log}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}(e^2 - \varepsilon^2)\sin^2\varphi + \frac{1}{4}(e^4 - \varepsilon^4)\sin^4\varphi + \frac{1}{6}(e^6 - \varepsilon^6)\sin^6\varphi - \ldots,$$

то јест логаритам геоцентричног радија, као функције географске ширине, у облику бесконачног реда па степенима од $\sin\varphi$.

Да бисмо добили Бригсове логаритме, треба природне помножити модулом $M = 0{\cdot}434\,2945$. Додамо ли још да је

$\beta = 0{\cdot}001\,4863\,3$, $\gamma = 0{\cdot}003\,3726\,7$, $e^2 = 0{\cdot}006\,7226\,7$, $\varepsilon^2 = 0{\cdot}013\,4001\,5$,

$\beta^2 = 0{\cdot}000\,0028\,44$; $\gamma^2 = 0{\cdot}000\,0113\,7\overline{5}$; $e^4 = 0{\cdot}000\,0451\,94$; $\varepsilon^4 = 0{\cdot}000\,1795\,64$;

добићемо коначно

$$\log\left(\frac{r}{a}\right) = 9{\cdot}999\,2695 + 0{\cdot}000\,7324\cos 2\varphi - 0{\cdot}000\,0019\cos 4\varphi + \ldots,$$

$$\log\left(\frac{r}{a}\right) = -0{\cdot}001\,4500\sin^2\varphi - 0{\cdot}000\,0146\sin^4\varphi - \ldots.$$

72. Услов за екстремум је у овом случају

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{d\varphi} = 0, \quad \text{то јест} \quad \frac{d\varphi'}{d\varphi} = 1.$$

Применимо га на израз

$$\operatorname{tg}\varphi' = (1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi, \quad \text{или} \quad \varphi' = \operatorname{arctg}[(1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi],$$

и добивамо

$$\frac{1}{1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2\varphi} \cdot \frac{1 - e^2}{\cos^2\varphi} = \frac{(1 - e^2)(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}{1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2\varphi} = 1,$$

или $$(1 - e^2)(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 1 + (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2\varphi,$$

или $$[1 + e^2 - (1 - e^2)^2]\operatorname{tg}^2\varphi = e^2,$$

а одатле $$\operatorname{tg}\varphi = \pm(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Како је $e = 0{\cdot}081\,992$, дакле $e^2 = 0{\cdot}006\,7227$ и $1 - e^2 = 0{\cdot}993\,2773$,

$$[1 - e^2] \quad 9{\cdot}977\,0705, \qquad \frac{1}{2}[1 - e^2] \quad 9{\cdot}998\,5353, \qquad [\operatorname{tg}\varphi] \quad 0{\cdot}001\,4647,$$

тако да добивамо $\varphi = \pm 45^0\,5'\,47''{\cdot}82$.

На истоветан начин се може, из услова за екстремум редуковане ширине,

$$\frac{d(\psi - \varphi)}{d\varphi} = 0, \quad \text{то јест} \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 1,$$

добити израз

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm(1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}},$$

па одавде, пошто је $\alpha = 1:297 = 0{\cdot}003\,367$, дакле $1 - \alpha = 0{\cdot}996\,633$,

$$[1 - \alpha] \quad 9{\cdot}998\,5353, \quad \frac{1}{2}[1 - \alpha] \quad 9{\cdot}999\,2677, \quad [\operatorname{tg}\varphi] \quad 0{\cdot}000\,7323, \quad \varphi = \pm 45^0\,2'\,53''{\cdot}90.$$

73. За дужину лука 1^0 Земљина меридијана око тачке географске ширине φ имамо (занемарујући више од четвртог степена ексцентричности) приближан израз

$$s_\varphi = \frac{\alpha\pi}{180}(1 - e^2)(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Стављајући $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а, затим, $\varphi = 0$, добивамо за највећу вредност, односно за најмању вредност лука од 1^0

$$s_p = \frac{a\pi}{180\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2\pi}{180\,a\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2\pi}{180{\cdot}b},$$

$$s_e = \frac{a\pi}{180}(1-e^2) = \frac{\pi}{180}\frac{a^2(1-e^2)}{a} = \frac{b^2\pi}{180\,a},$$

За однос ових двеју вредности налазимо

$$\frac{s_p}{s_e} = \frac{a^2\pi}{180\cdot b}\cdot\frac{180\,a}{b^2\pi} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

74. Дужина лука 1° меридијана на Земљи сфероиду дата је приближним изразом

$$s_\varphi = \frac{\pi a}{180}(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ако последњи члан на десној страни развијемо по биномном обрасцу, и притом занемаримо четврте и више степене ексцентричности, имаћемо

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180}(1-e^2)(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi) = \frac{a\pi}{180}\left(1-e^2+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi\right).$$

Извршимо ли на десној страни замену

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi),$$

добићемо за дужину лука 1° меридијанске елипсе

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180}\left(1-e^2+\frac{3e^2}{4}-\frac{3e^2}{4}\cos 2\varphi\right) = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos 2\varphi\right).$$

Унесимо сад, на десној страни, место ексцентричности — спљоштеност. Ако још притом занемаримо квадрат и више степене њене, и ставимо, место

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad \text{само} \quad e^2 = 2\alpha,$$

приближни израз за дужину лука 1° Земљине меридијанске елипсе постаје

$$s_\varphi = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{2}\cos 2\varphi\right).$$

Означимо сад са s_1 вредност коју овај израз добива кад у њему ставимо $\varphi_1 = 60°$, а са s_2 вредност коју добива за $\varphi_2 = 45_0$, и имаћемо

$$s_1 = \frac{a\pi}{180}\left(1+\frac{\alpha}{4}\right) \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

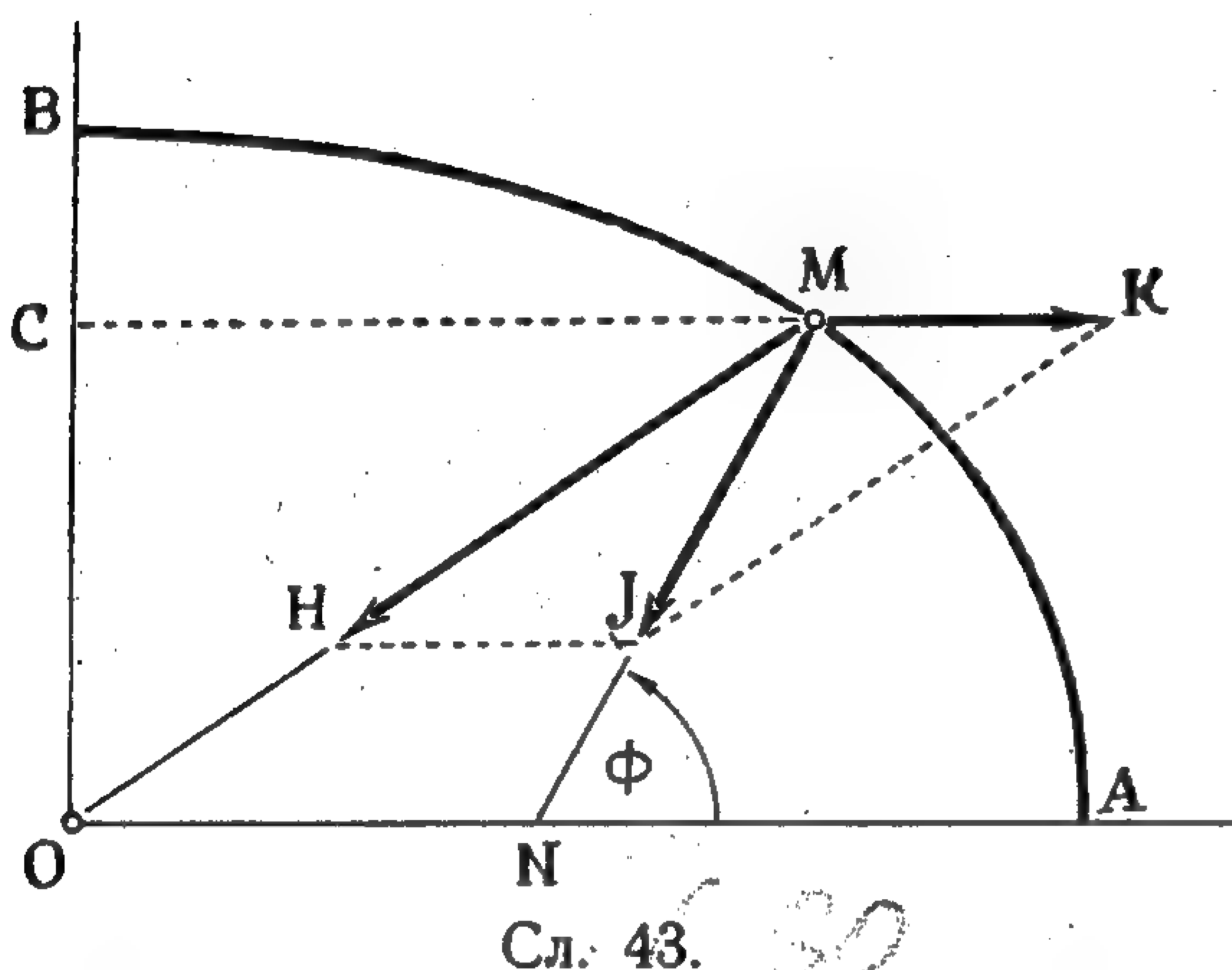
Дељењем добивамо

$$\frac{s_2}{s_1} = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)^{-1}.$$

Ако развијемо други члан по биномном обрасцу, притом занемаримо друге и више степене спљоштености, измножимо и опет занемаримо друге степене спљоштености, добивамо

$$\frac{s_2}{s_1}=1-\frac{3\alpha}{4},\quad \text{или}\quad \alpha=\frac{4}{3}\left(1-\frac{s_2}{s_1}\right).$$

75. Претставимо са AMB, на сл. 43, један део Земљине меридијанске елипсе, са средиштем O и полуосама a и b. Ако ове узмемо за координатне осе, координате тачке M, на елипси, биће



Сл. 43.

$$x=a\cos\psi,\quad y=b\sin\psi,$$

где ψ претставља редуковану ширину (в. решење Зад. 66), за коју имамо везу

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

С друге стране, знамо да је сила теже у свакој тачки на Земљиној површини резултанта Земљине привлачне и аксифугалне силе. Претставимо на слици са MH Земљину привлачну силу, усмерену правцем MO, ка O, а са MK аксифугалну силу, која се јавља услед Земљине ротације. И ако означимо:

са g_φ убрзање силе теже у тачки M, на географској ширини φ, и

са γ_φ аксифугално убрзање, биће

$$\frac{g_\varphi}{\gamma_\varphi}=\frac{MJ}{MK}=\frac{MJ}{HJ}=\frac{MN}{ON},\quad \text{то јест}\quad g_\varphi=\frac{MN}{ON}\gamma_\varphi.$$

За аксифугално убрзање тачке M имамо, међутим, ако са T означимо трајање једног Земљиног обрта,

$$\gamma_\varphi=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a\cos\psi=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\right)^2}}=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}},$$

дакле

$$\gamma_\varphi=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Са слике видимо, опет, да је

$$\frac{MN}{ON}=\frac{\sin\varphi'}{\sin(\varphi-\varphi')}=\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi'-\cos\varphi\sin\varphi'}=\frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\sin\varphi-\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi'}=$$

$$=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi-\cos\varphi\left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\varphi}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}=\frac{(1-e^2)}{e^2\cos\varphi}.$$

Према томе добивамо да је

$$g_\varphi=\frac{1-e^2}{e^2\cos\varphi}\cdot\left(\frac{2\tau}{T}\right)^2\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a(1-e^2)}{e^2}(1 \quad e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Или, ако последњи фактор на десној страни развијемо но занемаримо четврте и више степене ексцентричности, добивамо

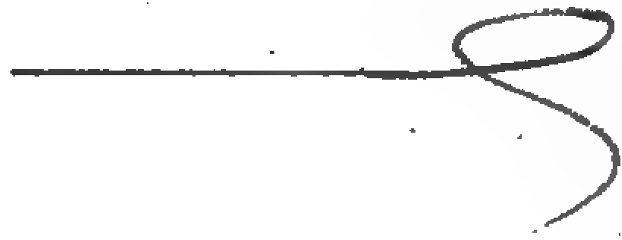
$$g_\varphi=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a(1-e^2)}{e^2}\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi\right).$$

А приметимо ли да је за $\varphi=0$, то јест за тачку на Земљину екватору

$$g_0=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a(1-e^2)}{e^2},$$

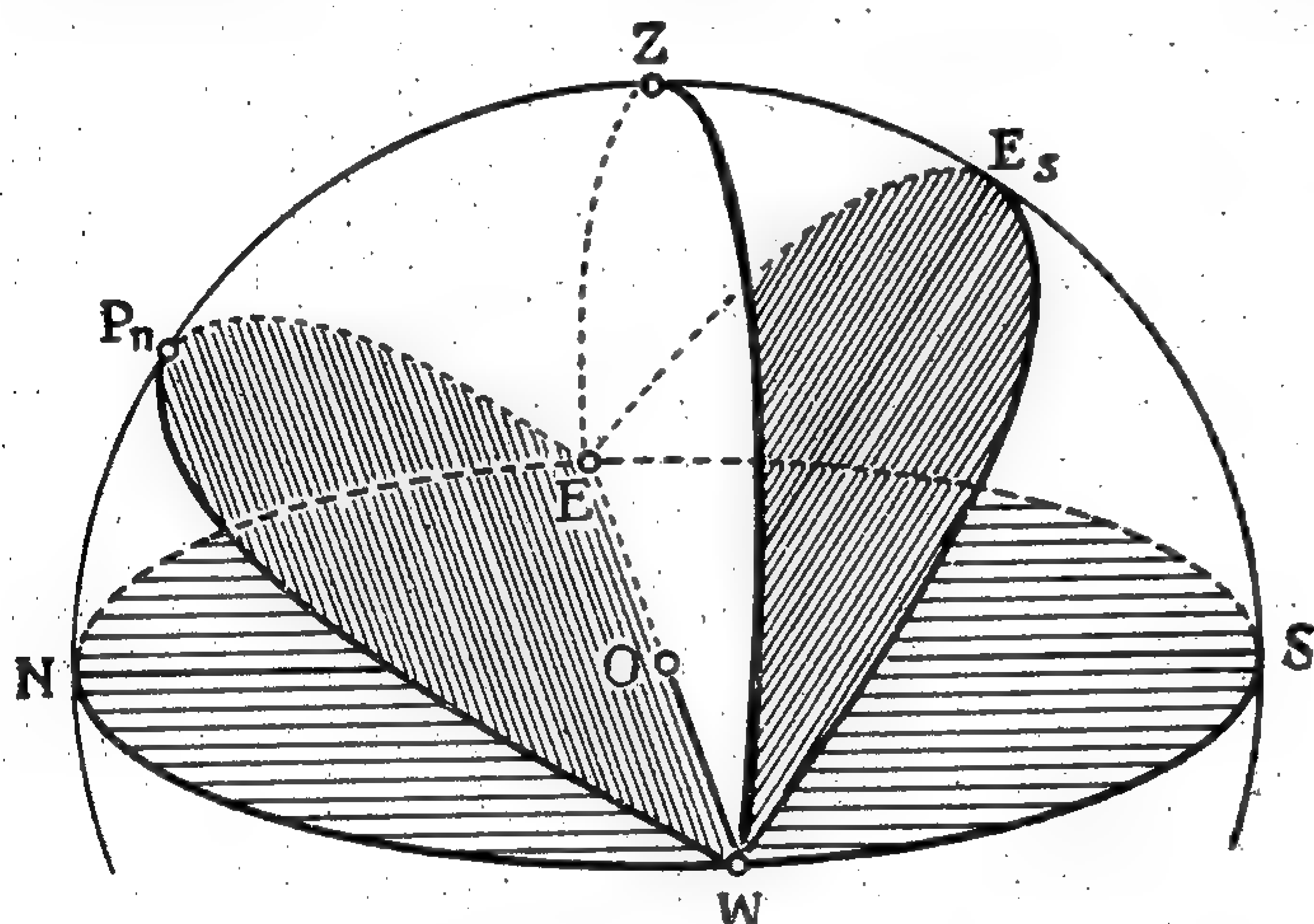
добивамо за (приближан) израз за убрзање силе теже на Земљи-елипсоиду

$$g_\varphi=g_0\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi\right).$$



III ПРИВИДНО ДНЕВНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКЕ СФЕРЕ

76. Некретница која би се налазила, у исти мах, и у посматрачеву хоризонту и на небеском екватору морала би се налазити у једној од двеју тачака пресека посматрачеве хоризонтске равни, дакле равни $SWNE$ (в. сл. 44) и небеске екваторске, то јест EE_sW. Другим речима, морала би се налазити или у тачки W, то јест западној, или у тачки E, то јест источној.



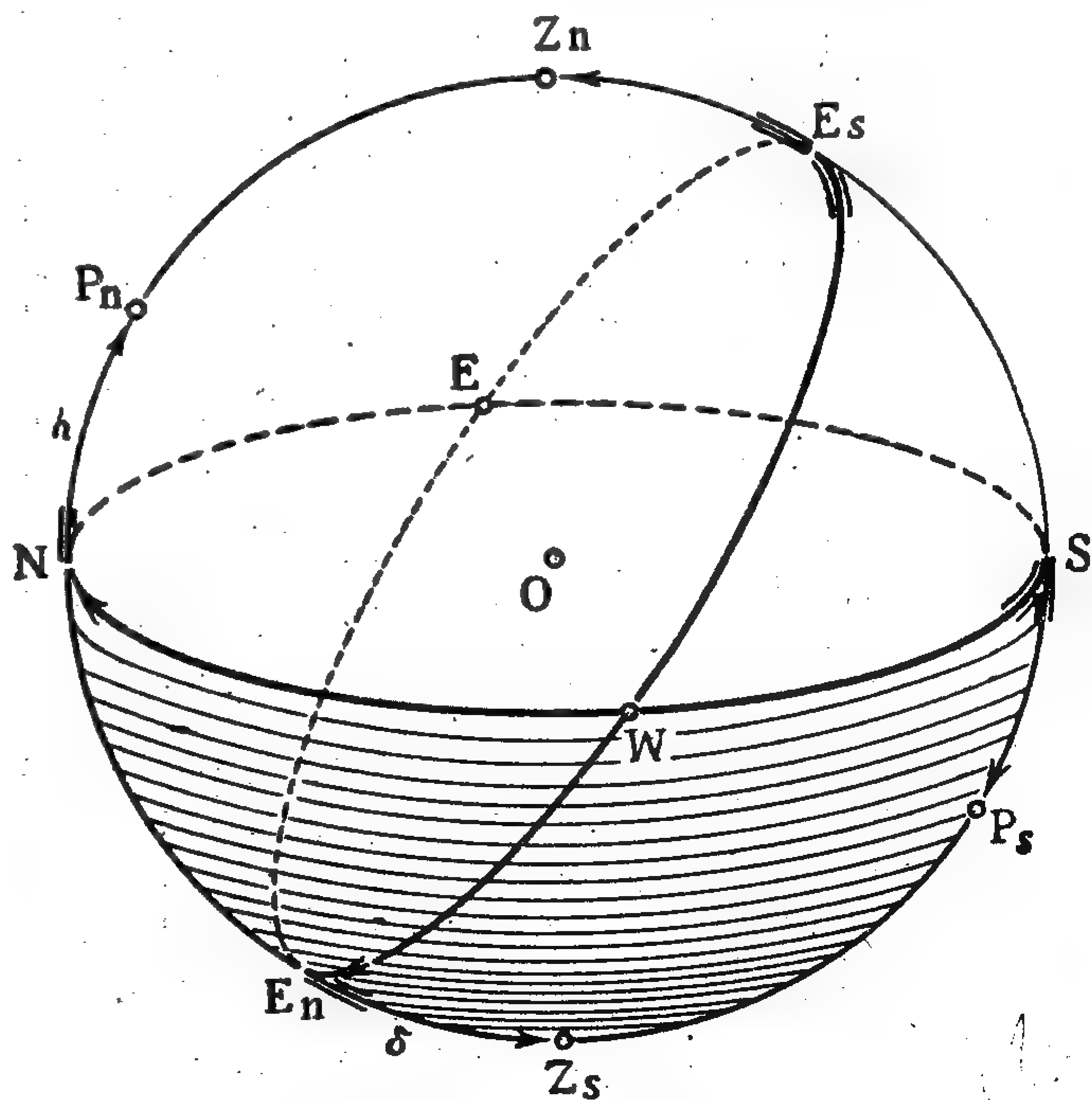
Сл. 44.

У хоризонтском координатном систему, координате тачке W су: $h=0^0$, $A=90^0$, а тачке E су: $h=0^0$, $A=270^0$.

У екваторском координатном систему, координате тачке W су: $\delta=0^0$, $H=6^h$, а тачке E су: $\delta=0^0$, $H=18^h$.

77. За посматрача на северној географској ширини φ, хоризонтске координате северног небеског пола, то јест тачке P_n (в. сл. 45) су: $h=+\varphi$, $A=$ $=180^0$; а јужног, то јест тачке P_s су: $h=-\varphi$, $A=0^0$.

Месне екваторске координате посматрачева зенита, то јест тачке Z_n (в. сл. 45) су $\delta=+\varphi$, $H=0^h$, а надира, то јест тачке Z_s су: $\delta=-\varphi$, $H=12^h$.



Сл. 45.

78. Основне тачке хоризонтске равни посматрача, који се налази на северној географској ширини φ, имају за месне екваторске координате (в. сл. 45):

јужна тачка, то јест S: $\delta=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, $H=0^h$;

западна тачка, то јест W: $\delta=0$, $H=6^h$;

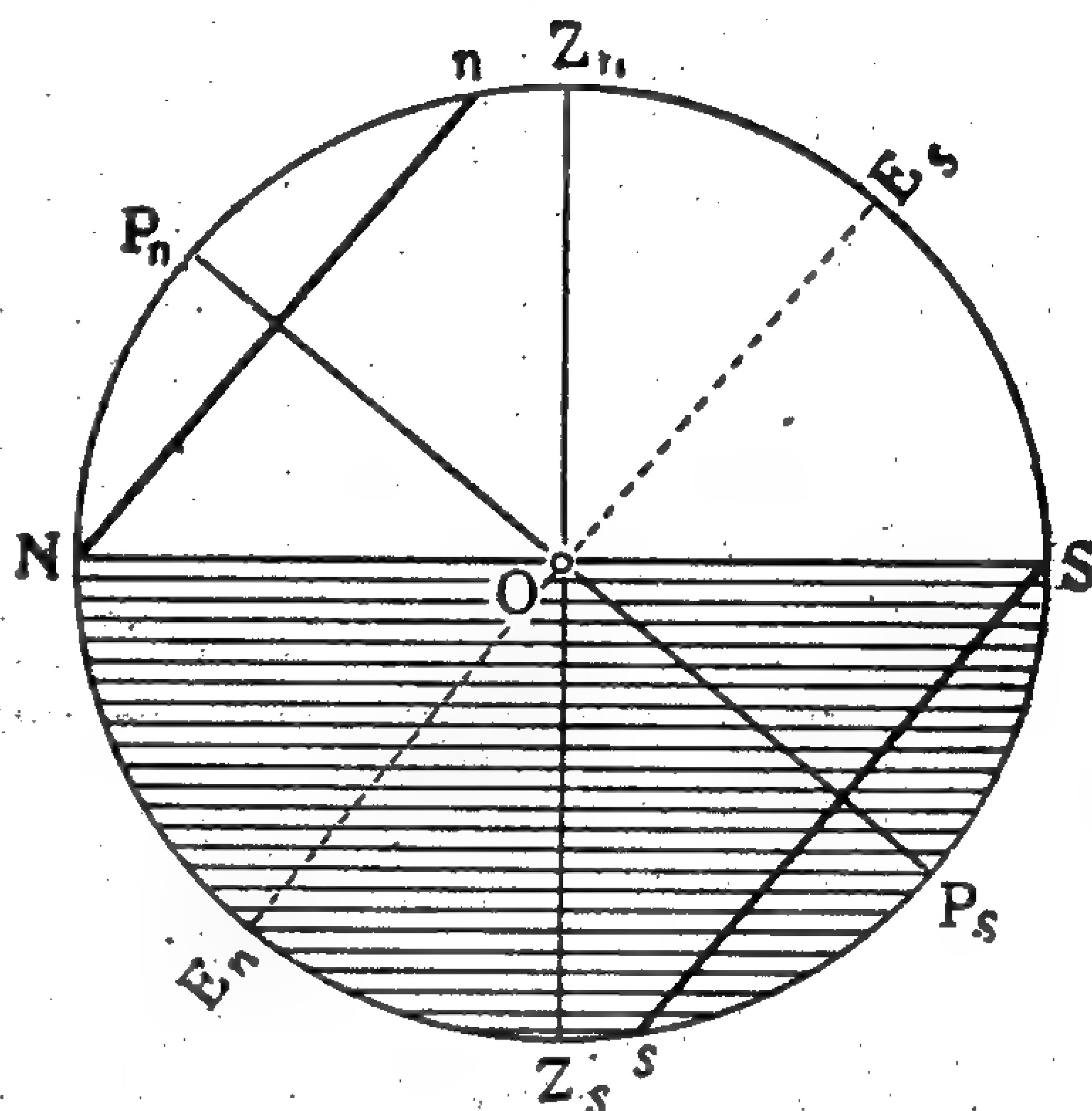
северна тачка, то јест N: $\delta=+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, $H=12^h$;

источна тачка, то јест E: $\delta=0$, $H=18^h$.

79. Пројицирајмо небеску сферу на посматрачеву меридијанску раван. Видљиви део те сфере биће онда претстављен (в. сл. 46) полукругом $SONP_nZ_nS$, а невидљиви њен део исцртаним полукругом SP_sZ_sNOS. Посматрачев положај претстављен је тачком O; посматрачева хоризонтска раван, која дели видљиву од невидљиве половине небеске сфере, претстављена је пречником SON. На слици су, сем тога, претстављене:

пречником E_sOE_n — раван небеског екватора;

пречником P_nOP_s — светска оса.



Сл. 46.

Свака тетива паралелна пречнику E_sOE_n, као што су тетиве Nn и Ss, претставља пројекцију на меридијанску раван паралела који, у току звезданог дана, привидно опише некретница чија је деклинација једнака, у овом случају, углу E_nON, односно углу E_sOS.

Слика показује да за посматрача остају **над** хоризонтом, преко целог дана, оне некретнице које описују паралеле изнад паралела Nn, дакле чије су позитивне деклинације веће од E_nON; а остају **под** хоризонтом, преко целог дана, оне некретнице што описују паралеле испод паралела Ss, дакле чије су негативне деклинације веће од E_sOS. Приметимо ли, међутим, да је $E_nON=\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $E_sOS=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, уз то да је за посматрача у Београду $\varphi=+44^0\,48'$, за овога остају у току звезданог дана:

над хоризонтом некретнице чије су $+\delta>+45^0\,12'$,

под хоризонтом некретнице чије су $-\delta<-45^0\,12'$.

80. Са сл. 46 може се видети да је географска ширина посматрачева, чији је положај на њој претстављен са O, дакле $\varphi=\sphericalangle NOP_n$, једнака висини пола; или $\varphi=\sphericalangle E_sOZ_n$, једнака деклинацији зенита.

Према томе, небеско тело ће пролазити кроз посматрачев зенит ако му је деклинација једнака посматрачевој географској ширини. Значи, α *Lyrae* (Вега), чија је деклинација $\delta=+38^0\,44'$, пролазиће кроз зените свих места на Земљи која се налазе на паралелу $\varphi=+38^0\,44'$.

А циркумполарна ће бити α *Lyrae* (Вега) за сва она места за која је $\delta > \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, то јест чије су географске ширине $\varphi > \frac{\pi}{2} - \delta$, или за сва места на паралелу и северније од паралела

$$\varphi = +90^0 - 38^0\,44 = +51^0\,16'.$$

81. За посматрача у Београду деклинација уочене некретнице задовољава неједначину $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$. Она је за њега, дакле, циркумполарна, и то надхоризонтска. У току привидног дневног кретања некретница достиже у горњој кулминацији најмању, у доњој кулминацији највећу зенитску даљину.

Сл. 47.

На сл. 47 претстављени су за посматрача у Београду ($\varphi = +44^0\,48'$) положаји некретнице: у горњој кулминацији, са Σ_s, у доњој кулминацији, са Σ_i. Приметимо ли да је

$$\sphericalangle E_sOZ_n = \sphericalangle NOP_n = \varphi,$$

$$\sphericalangle E_sO\Sigma_s = \delta, \quad \sphericalangle P_nO\Sigma_i = 90^0 - \delta,$$

видимо са слике да је:

у горњој кулминацији: $z_s = \delta - \varphi$, дакле $z_s = 63^0\,12' - 44^0\,48' = 18^0\,24'$;

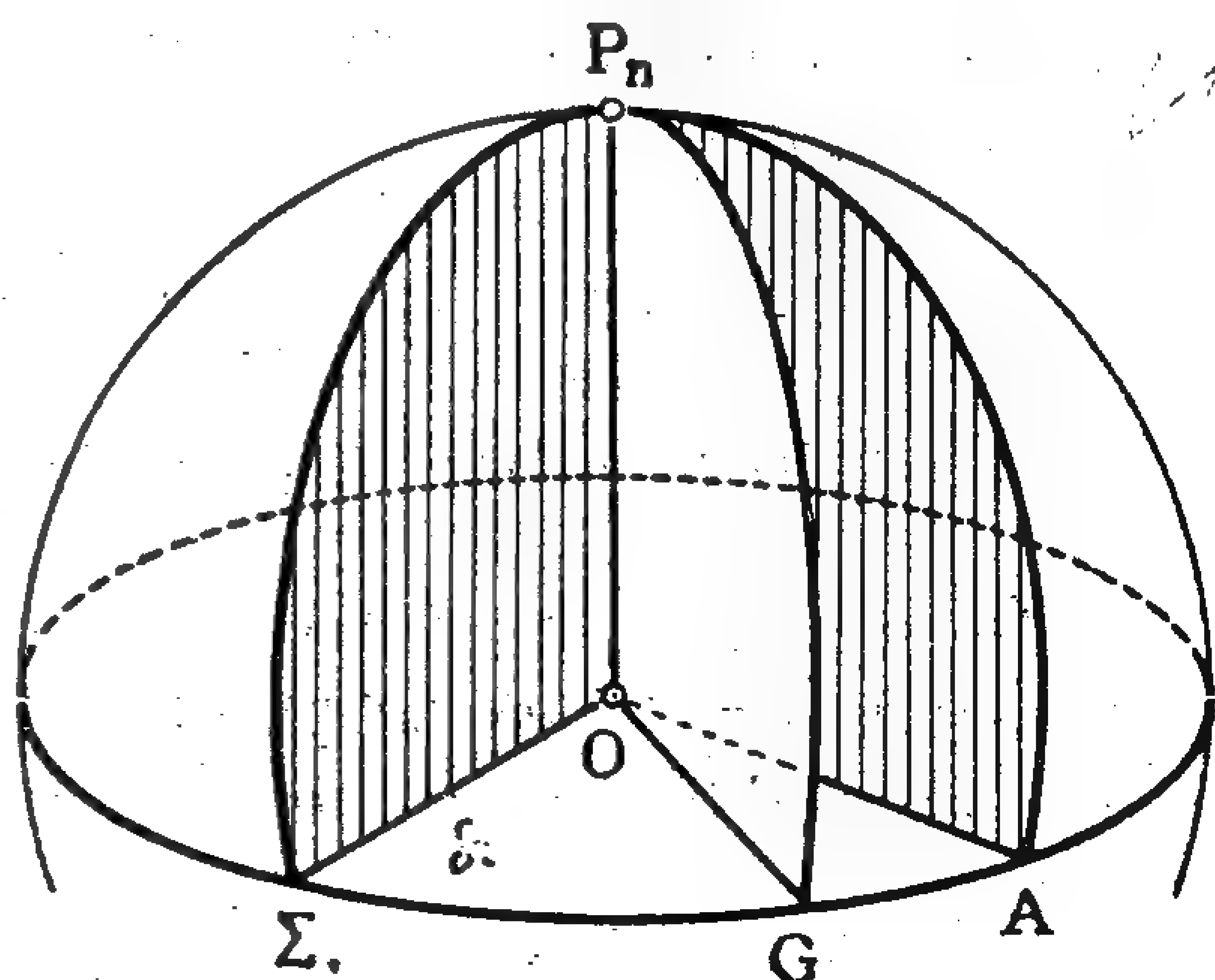
у доњој кулминацији: $z_i = (90^0 - \varphi) + (90^0 - \delta)$, дакле $z_i = 45^0\,12' + 26^0 48' = 72^0 0'$.

82. Некретница која пролази кроз посматрачев зенит има деклинацију једнаку посматрачевој географској ширини. Сем тога, њен пролаз кроз зенит, дакле и кроз посматрачев меридијан, пада, према задатку, $4^h\,42^m\,52^s$ звезданог времена после кулминације некретнице чија је ректасцензија $13^h\,52^m\,35^s$, што, другим речима, значи – која кулминира у $13^h\,52^m\,35^s$ звезданог времена.

Видимо, према томе, да су координате некретнице:

$$\alpha = 13^h\,52^m\,35^s + 4^h\,42^m\,52^s = 18^h\,35^m\,27^s \text{ и } \delta = +38^0\,44'.$$

Ако отворимо Годишњак нашег неба за 1956 г., наћи ћемо (в. стр. 100) да је та некретница α *Lyrae* (Вега).



Сл. 48.

83. Претставимо на сл. 48 небеску сферу и на њој: P_nG небески меридијан који се поклапа са гриничким; са P_nA небески меридијан који се поклапа са меридијаном места чија је географска дужина $L = -40^0 = -2^h\,40^m$; и то у тренутку кад се некретница о којој је реч налази на небеском меридијану $P_n\Sigma_i$.

Према задатку је: $\sphericalangle GOA = L = -2^h\,40^m$; $\sphericalangle AO\Sigma_1 = H_1 = 6^h\,5^m\,4^s$. Часовни угао некретнице Σ_1, посматране из Гринича у истом тренутку је, онда: $\sphericalangle GO\Sigma_1 = \sphericalangle AO\Sigma_1 - \sphericalangle AOG = 6^h\,5^m\,4^s - 2^h\,40^m = 3^h\,25^m\,4^s$.

А ако на истој слици узмемо да угао $GO\Sigma_1$ претставља часовни угао некретнице у Гриничу, дакле $H_2=6^h\,5^m\,4^s$, видимо да је часовни њен, у месту географске дужине L, у истом тренутку, претстављен углом $AO\Sigma_1=H=\sphericalangle AOG+\sphericalangle GO\Sigma_1=2^h\,40^m+6^h\,5^m\,4^s=6^h\,45^m\,4^s$.

84. *Први начин.* Кад је у Београду, чија је географска дужина $L=-20^0\,30'\,48''=-1^h\,22^m\,3^s{\cdot}20$, звездано време $t=15^h\,21^m\,14^s{\cdot}37$, у Гриничу је, у том тренутку, $t_0=t+L=15^h\,21^m\,14^s{\cdot}37-1^h\,22^m\,3^s{\cdot}20=13^h\,59^m\,11^s{\cdot}17$ звезданог времена.

У овом тренутку звезданог времена је часовни угао у Гриничу, означимо га са H_0, некретнице чија је ректасцензија α,

$$H_0=t_0-\alpha=13^h\,59^m\,11^s{\cdot}17-14^h\,13^m\,36^s{\cdot}12=23^h\,45^m\,35^s{\cdot}05.$$

Други начин. На основи познате везе, $t=H+\alpha$, и података датих у задатку налазимо за часовни угао звезде у Београду

$$H=t-\alpha=15^h\,21^m\,14^s{\cdot}37-14^h\,13^m\,36^s{\cdot}12=1^h\,7^m\,38^s{\cdot}25.$$

С друге стране, знајући географску дужину Београда, $L=-1^h\,22^m\,3^s{\cdot}20$, налазимо за часовни угао звезде посматране у истом тренутку и из Гринича (према решењу Зад. 83) $H_0=L+H$, дакле

$$H_0=-1^h\,22^m\,3^s{\cdot}20+1^h\,7^m\,38^s{\cdot}25=-0^h\,14^m\,24^s{\cdot}95=23^h\,45^m\,35^s{\cdot}05.$$

85. Према познатој вези између звезданог времена, ректасцензије и часовног угла тела, у том тренутку звезданог времена, у овом случају имамо

$$\alpha_1+H_1=\alpha_2+H_2.$$

Како су, према задатку, познати α_1, α_2 и H_1, можемо из ове везе израчунати H_2. И налазимо

$$H_2=\alpha_1+H_1-\alpha_2=10^h\,9^m\,8^s+3^h\,18^m\,38^s-18^h\,19^m\,20^s=19^h\,8^m\,26^s.$$

86. *Први начин.* Време што га некретница проведе над посматрачевим хоризонтом једнако је двострукој вредности њена полудневног лука, изражена у временим јединицама. А полудневни лук, H, дат је изразом

$$\cos H=-\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta,$$

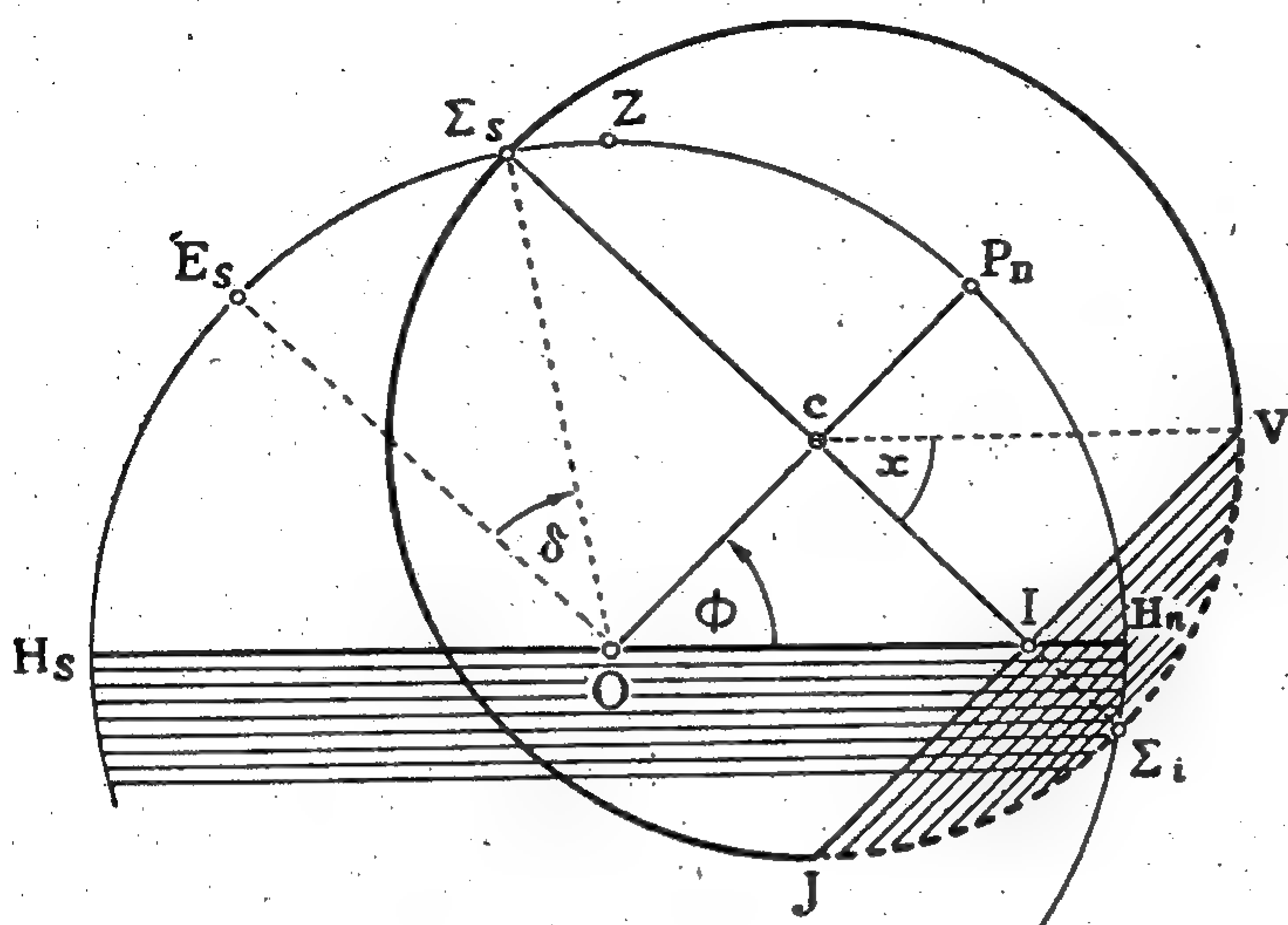
где је са φ означена посматрачева географска ширина, а са δ деклинација уочене некретнице.

Према задатку је $\varphi=+45^0$, дакле $\operatorname{tg}\varphi=1$. А како је $\sin\delta=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, значи $\cos\delta=\frac{1}{3}\sqrt{6}$, дакле $\operatorname{tg}\delta=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, — добивамо

$$\cos H=-\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \text{или}\quad H=135^0=9^h.$$

Некретница проводи, дакле, над посматрачевим хоризонтом $2H=18^h$, или $^3/_4$ звезданог дана.

Други начин. Претставимо, на сл. 49, у пројекцији на посматрачеву меридијанску раван:



Сл. 49.

са O посматрачев положај;
са Z посматрачев зенит;
са H_sH_n посматрачев хоризонт;
са P_n северни небески пол,
са OE_s део небеског екватора над посматрачевим хоризонтом;
са $\Sigma_s\Sigma_i$ небески паралел који у току дана привидно опише некретница деклинације δ;
са $\Sigma_s I$ пројекцију дела тог паралела који некретница проведе н а д посматрачевим хоризонтом.

Паралел $\Sigma_s\Sigma_i$ и хоризонт H_sH_n секу се у двема тачкама, излаза и залаза, које се на слици пројицирају у једну тачку, I.

Окренимо сад паралел око његова пречника $\Sigma_s c\Sigma_i$ и положимо га у раван посматрачева меридијана $\Sigma_s ZP_nH_n\Sigma_i$. Паралел ће бити претстављен кружном линијом $\Sigma_s V\Sigma_i J$. Тетива JIV, нормална на пречнику паралела $\Sigma_s cI\Sigma_i$, претставља праву пресека паралела некретнице и посматрачева хоризонта. Тачке J и V претстављају тачке излаза и залаза некретнице. Према томе, лук $J\Sigma_s V$ претставља д н е в н и лук, или н а д-хоризонтски део паралела некретнице, а лук $V\Sigma_i J$ п о д-хоризонтски, то јест невидљиви део њена паралела.

Према подацима задатка је

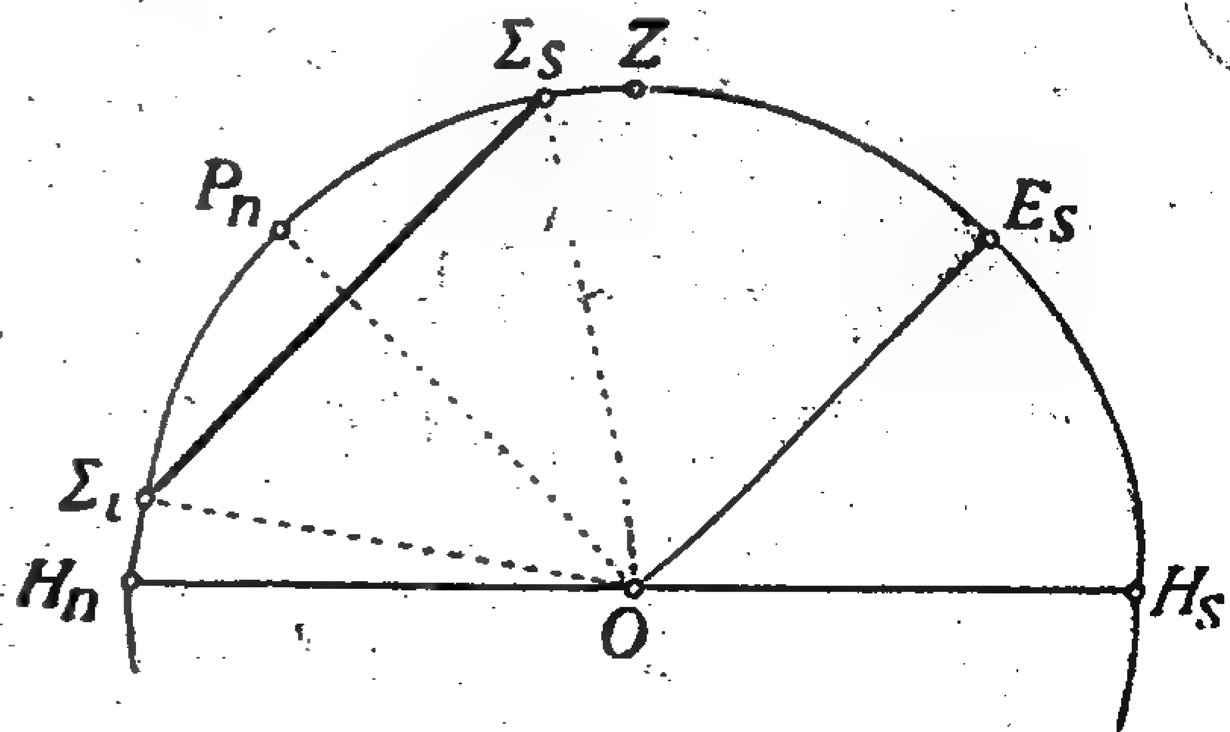
$$Oc = c\Sigma_s \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, c\Sigma_s.$$

Према ономе што је речено, лук $\Sigma_s V$, изражен у временој мери, претставља полудневни лук некретнице, који је опет, као што са слике видимо, мерен углом $\Sigma_s cV = 180^0 - x$. Угао x, међутим, одређен је из

$$\cos x = \frac{cI}{cV} = \frac{cI}{c\Sigma_s} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 45^0.$$

И тако налазимо $\Sigma_s cV = 135^0 = 9^h$.

87. Претставимо на сл. 50 пресек небеске сфере посматрачевом меридијанском равни, $H_sE_sZP_nH_n$. Претставимо у њој са Σ_s и Σ_i положаје уочене циркумполарне звезде, у тренуцима њене горње, односно доње кулминације. Означимо јој посматране висине у тим тренуцима са h_s, односно са h_i. Ако са δ означимо деклинацију



Сл. 50.

звезде, а са φ посматрачеву географску ширину, онда имамо, као што са слике видимо,

$$h_s = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right),$$

$$h_i = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right).$$

Сабирањем ових двеју једначина добивамо $\varphi = \frac{1}{2}(h_s + h_i)$.

А одузимањем друге од прве добивамо $\delta = \frac{1}{2}[\pi - (h_s - h_i)]$,

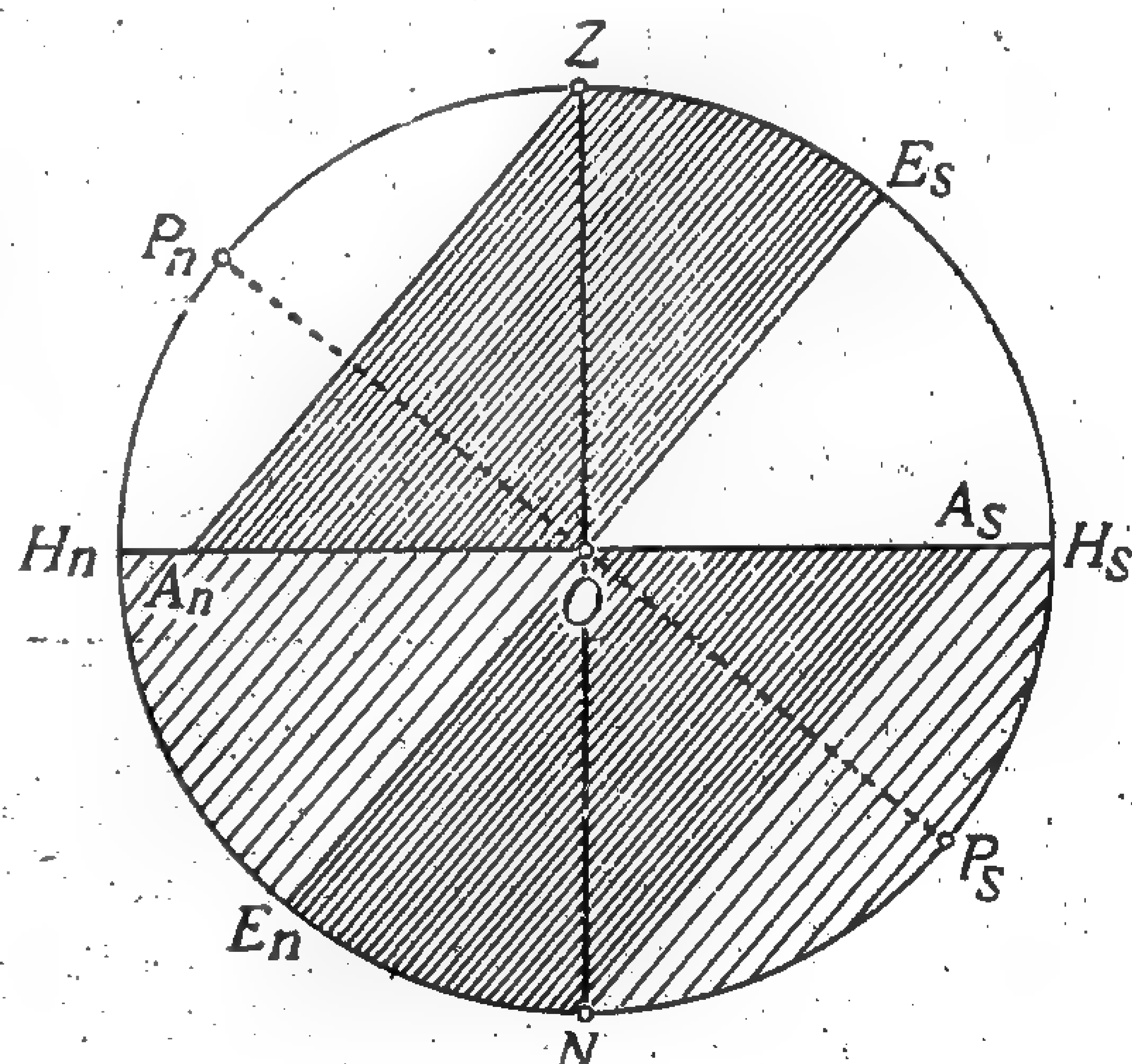
или, ако са p означимо поларну даљину звезде, $p = \frac{1}{2}(h_s - h_i)$.

Дакле, из посматраних висина и с т е циркумполарне звезде у о б е м а њеним кулминацијама можемо одредити:

1. посматрачеву географску ширину, узимајући аритметичку средину посматраних висина;

2. поларну даљину посматране звезде, узимајући половину разлике висина у горњој и доњој кулминацији.

88. Први вертикал је велики полукруг што пролази кроз посматрачеву вертикалу и западну, одн. источну тачку његова хоризонта. Према томе, кроз први вертикал пролазе у току свог привидног дневног кретања с в е о н е, али и с а м о о н е, некретнице чије су привидне дневне путање обухваћене појасом OE_sZA_n (в. сл. 51). Друкчије речено, пролазе само оне некретнице чије деклинације задовољавају неједначину,



Сл. 51.

на северној хемисфери: $0 < \delta < \varphi$,

на јужној хемисфери: $0 > -\delta > -\varphi$.

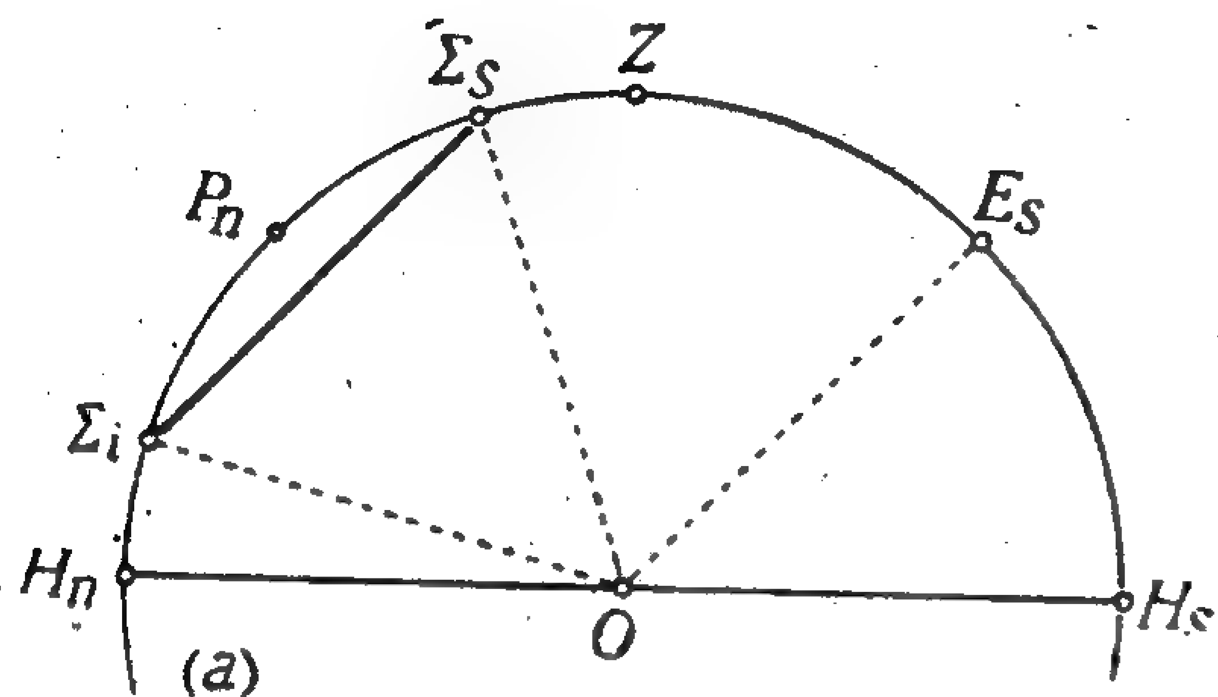
За $\varphi = +44^0\,48'$, то јест за посматрача у Београду, пролазе кроз први вертикал само некретнице чије су деклинације $0 < \delta < +44^0\,48'$.

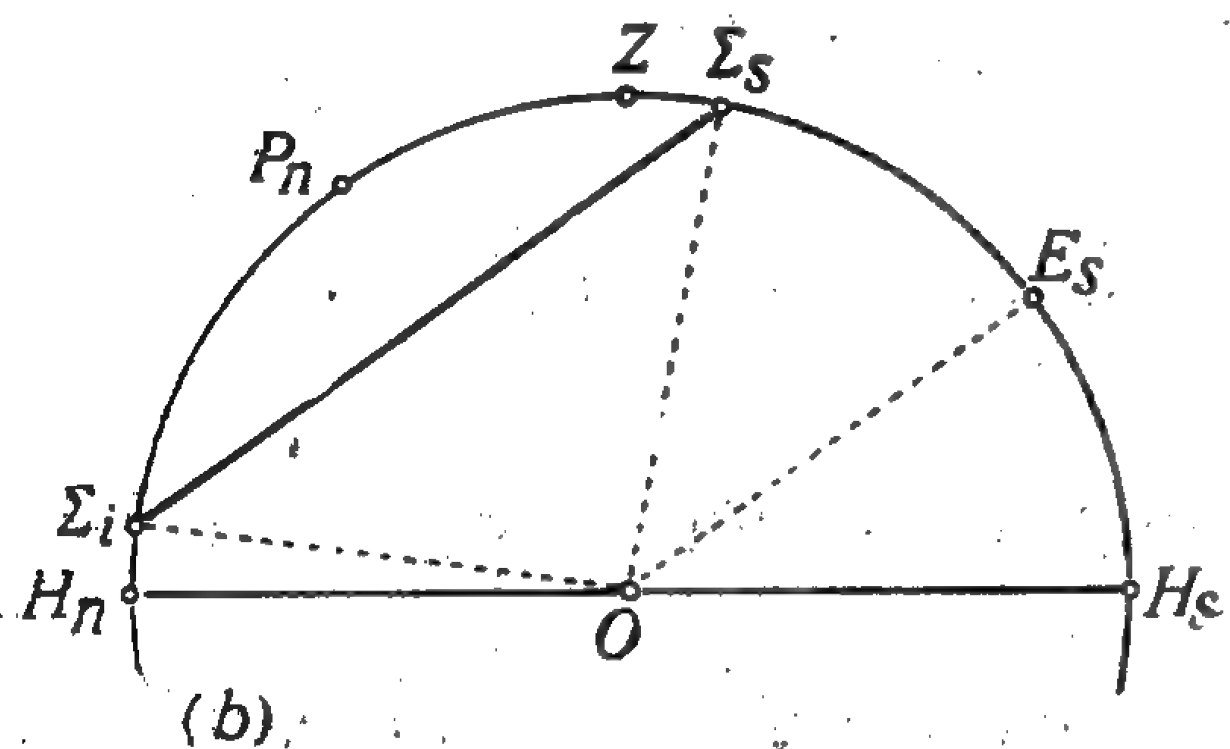
89. Означимо: са φ посматрачеву географску ширину; са δ деклинацију посматране некретнице; са z_s и z_i посматране зенитске даљине у горњој, односно њеној доњој кулминацији, то јест у положајима претстављеним на сл. 52 са Σ_s, односно Σ_i.

—— = дни не могу.

Онда треба два случаја разликовати:

а) кад горња кулминација пада северно од посматрачева зенита, и





Сл. 52. 60

б) кад горња кулминација пада јужно од зенита.

У првом случају је:

за Σ_s: $\varphi=\delta-z_s$,

то јест $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(z_s+z_i)$;

за Σ_i: $\varphi=\pi-\delta-z_i$,

то јест $\delta=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(z_s-z_i)$;

У другом случају је;

за Σ_s: $\varphi=\delta+z_s$,

то јест $\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(z_s-z_i)$;

за Σ_i: $\varphi=\pi-\delta-z_i$,

то јест $\delta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(z_s+z_i)$;

Како у задатку није прецизирано са које стране зенита пада горња кулминација, задатак има два решења. Имамо, наиме

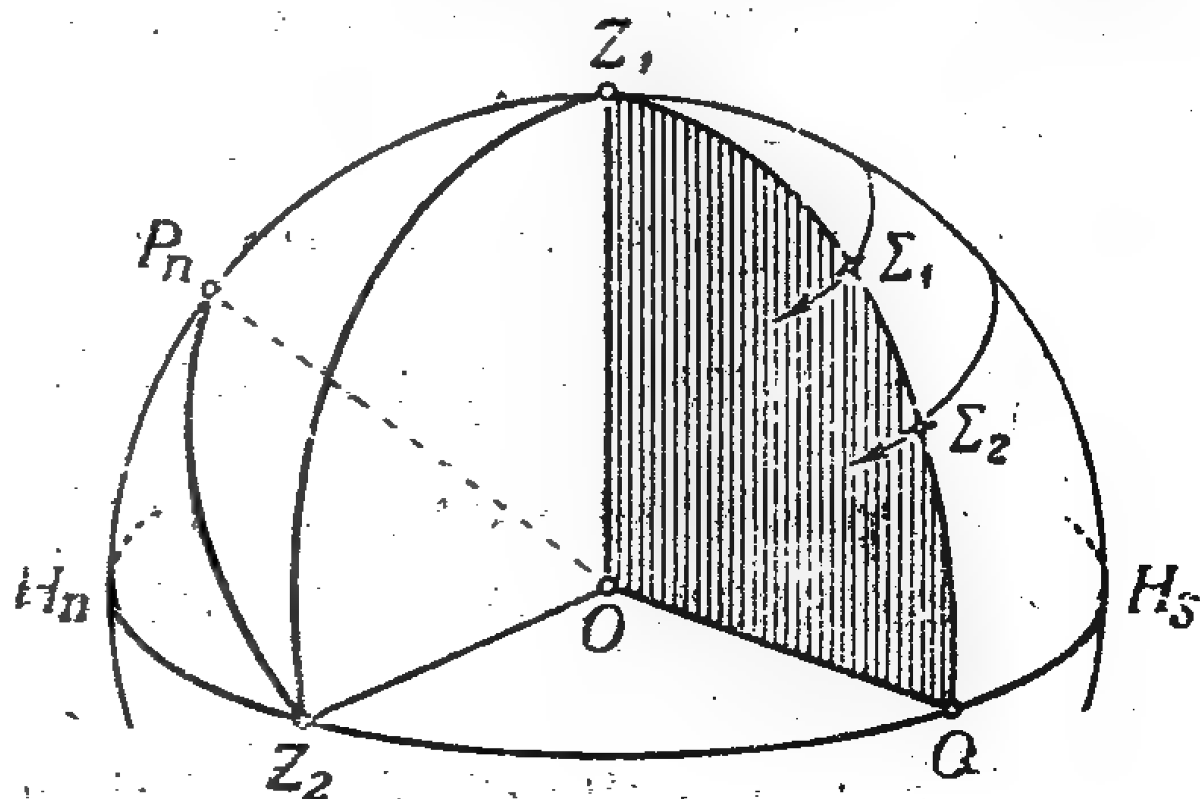
$z_s=\ 6^0\,33'\,44''{\cdot}5,\qquad z_s+z_i\ =78^0\,1'\,23''{\cdot}8,\qquad z_s-z_i\ =-64^0\,53'\,54''{\cdot}8,$

$z_i=71\ \ 27\ \ 39\ {\cdot}3;\qquad \frac{1}{2}(z_s+z_i)=39\ \ 0\ \ 41\ {\cdot}9;\qquad \frac{1}{2}(z_s-z_i)=-32\ \ 26\ \ 57''{\cdot}4;$

те ће бити, у првом случају: $\varphi=+50^0\,59'\,18''{\cdot}1$, $\delta=+57^0\,33'\ \ 2''{\cdot}6$;

у другом случају: $\varphi=+57\ \ 33\ \ 2\ {\cdot}6$, $\delta=+50\ \ 59\ \ 18\ {\cdot}1$.

90. Претпоставимо да се за посматрача M_1 обе некретнице, које смо означили на сл. 53 са Σ_1 и Σ_2, налазе у вертикалу OZ_1Q, чији је азимут A. У том истом тренутку, за посматрача M_2, према задатку, обе некретнице излазе: значи налазе се у равни његова хоризонта. Отуда следује да је вертикал посматрача M_1: $Z_1\Sigma_1\Sigma_2Q$ — хоризонт за посматрача M_2. Нормала OZ_2 на равни $OZ_1\Sigma_1\Sigma_2Q$ претстављаће вертикалу; према томе Z_2 — зенит посматрача M_2.



Сл. 53.

Сферни троугао, чија су темена северни небески пол, P_n, и зенити Z_1 и Z_2 двају посматрача, квадрантни је сферни троугао, јер је $Z_1Z_2=\frac{\pi}{2}$.

Његова страна $P_n Z_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ дата је. Како је $\sphericalangle QOZ_2 = \frac{\pi}{2}$, то је $\sphericalangle P_n Z_1 Z_2 = \frac{\pi}{2} - A$. Према томе, из сферног троугла $P_n Z_1 Z_2$ имамо за страну $P_n Z_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$,

$$\sin \varphi_2 = \cos \varphi_1 \cdot \sin A.$$

Тако је географска ширина посматрача M_2 одређена.

Разлика географских дужина посматрача̂ једнака је углу $Z_1 P_n Z_2$. Ако је означимо са L имаћемо, из истог сферног троугла,

$$\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos L = 0,$$

дакле

$$\cos L = -\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Из података задатка се види које од двају могућих решења одговара посматрачу M_2.

91. Поћи ћемо од образаца Гаусове групе који одређују δ и H кад су познати φ, z и A:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A,$$

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

$$\cos \delta \cos H = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A.$$

Да бисмо их подесили за логаритамско рачунање, ставићемо

$$\sin z \cos A = m \sin M,$$

$$\cos z = m \cos M, \quad \text{са } m > 0.$$

Из ових једначина налазимо

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} z \cos A \quad \text{и} \quad m = \sin z \cos A \operatorname{cosec} M.$$

Увођењем ових помоћних величина првобитни обрасци постају

$$\sin \delta = m \sin (\varphi - M),$$

$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

$$\cos \delta \cos H = m \cos (\varphi - M).$$

И тако добивамо непознате величине из једначина

$$\operatorname{tg} H = \sin M \operatorname{tg} A \sec (\varphi - M) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\varphi - M) \cdot \cos H.$$

За проверавање нумеричког рада имамо, у овом случају, образац

$$\sin z \cos A \cos (\varphi - M) = \sin M \cos \delta \cos H.$$

Према подацима задатка биће, дакле:

Дате величине: $\varphi = +\ 38^0 58' 53''$,		$[\text{tg}\, z]$	0·43 210,	$M =$	$53^0 39' 42''$,
$z =$	69 42 30,	$[\cos A]$	9·70 126,	$\varphi =$	38 58 53,
$A =$	300 10 30;	$[\text{tg}\, M]$	0·13 336;	$\varphi - M =$	− 14 40 49.

Израчунавање непознатих координата:

$[\sin M]$	9·90 608,	$[\text{tg}\,(\varphi - M)]$	9·41 826 n,
$[\text{tg}\, A]$	0·23 551 n,	$[\cos H]$	9·75 777,
$[\sec(\varphi - M)]$	0·01 441,	$[\text{tg}\, \delta]$	9·17 603 n;
$[\text{tg}\, H]$	0·15 600 n;		

дакле: $H = 304^0 55' 27''$; $\delta = -8^0 31' 47''$.

Проверавање нумеричког рада:

$[\sin z]$	9·97 217,	$[\sin M]$	9·90 608,
$[\cos A]$	9·70 126,	$[\cos \delta]$	9·99 517,
$[\cos(\varphi - M)]$	9·98 559,	$[\cos H]$	9·75 777,
Σ_1	9·65 902;	Σ_2	9·65 902.

Да је у задатку било дато још и звездано време посматрања, рецимо t, из познате везе

$$t = \alpha + H,$$

са нађеним часовним углом могла би се одредити и ректасцензија звезде.

92. Са датим величинама φ, δ и z одредићемо, помоћу обрасца

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H$$

часовни угао некретнице, који одговара посматраној зенитској даљини. Како је и ректасцензија звезде позната, моћи ћемо наћи звездано време посматрања. Друкчије речено, наћи ћемо звездано време које бисмо са часовника били прочитали у тренутку посматрања, да је показивао тачно време. Разлика између овако *израчунатог* и са часовника стварно *прочитаног* звезданог времена претставља тражену поправку часовника.

Но да би се добио нумерички тачнији резултат, трансформисаћемо горњи образац тако да часовни угао добијемо изражен помоћу тангенса. Зато ћемо образац прво написати овако

$$\cos H = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta},$$

па ћемо образовати

$$1 - \cos H = \frac{\cos\varphi\cos\delta - \cos z + \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos z}{\cos\varphi\cos\delta},$$

дм — дпк не штаy.

$$1+\cos H=\frac{\cos\varphi\cos\delta+\cos z-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}=\frac{\cos(\varphi+\delta)+\cos z}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Из ових релација, добивамо, прво,

$$\sin^2\frac{H}{2}=\frac{-\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta+z)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta-z)}{\cos\varphi\cos\delta},$$

$$\cos^2\frac{H}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}{\cos\varphi\cos\delta},$$

а одавде, ако још уведемо

$$2s=\varphi+\delta+z,$$

добивамо за одређивање часовног угла

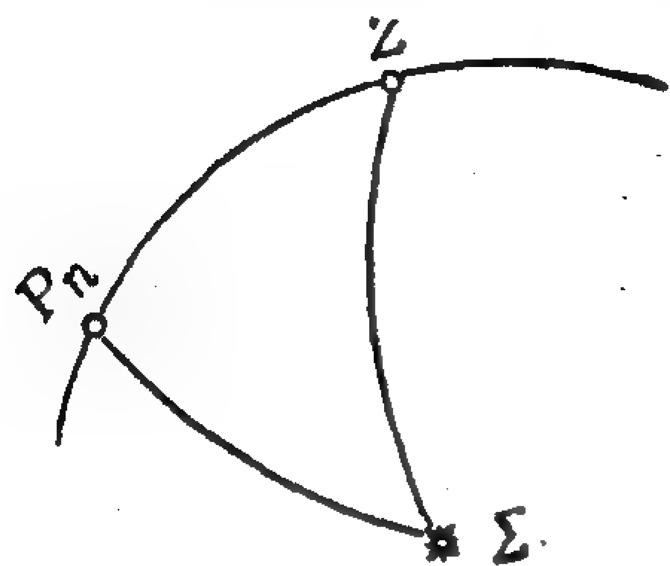
$$\operatorname{tg}^2\frac{H}{2}=\sin(s-\delta)\sin(s-\varphi)\sec s\sec(s-z).$$

Према подацима задатка биће, дакле:

$\varphi=+42^0\,41'\,40''$,	$[\sin(s-\delta)]$	9·84 273,	$H^0=66^0\;23'\,28''$,
$\delta=+16\;\;15\;\;30$,	$[\sin(s-\varphi)]$	9·48 259,	$H^h=\;4^h\,25^m\,33^s.87$,
$z=\;\;61\;\;48\;\;30$,	$[\sec s]$	0·30 606,	$\alpha=\;4\;\;28\;\;48.38$,
$2s=\;120\;\;45\;\;40$,	$[\sec(s-z)]$	0·00 014,	$t_r=\;8\;\;53\;\;22.25$,
$s=\;\;60\;\;22\;\;50$,	$2\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}H\right]$	9·63 152,	$t_p=\;8\;\;54\;\;20.00$,
$s-\varphi=\;\;17\;\;41\;\;10$,	$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}H\right]$	9·81 576,	$\Delta t=+\;\;0^m\;\;2^s.25$.
$s-\delta=\;\;44\;\;\;7\;\;20$,			
$s-z=-\;\;1\;\;25\;\;40$;	$\frac{1}{2}H=33^0\,11'\,44''$;		

93. Правац меридијана биће одређен ако знамо, у тренутку посматрања, азимут некретнице познатих координата. У задатку су дати: координате некретнице, α и δ; зенитска даљина, z, и тренутак посматрања, t (у звезданом времену); помоћу овога налазимо часовни угао посматране звезде из $H=t-\alpha$. Према томе можемо израчунати азимут некретнице у тренутку посматрања. Означимо га са A_r. А са инструмента прочитани азимут, у тренутку посматрања, означимо са A_p. Разлика A_r-A_p претстављаће поправку прочитаног азимута, то јест величину коју треба алгебарски додати прочитаној вредности азимута, односно за коју би требало померити индекс азимутног круга, да би овај показивао тачне азимуте.

Ако на положајни сферни троугао $P_n\Sigma Z$ (в. сл. 54) применимо синусни образац, добићемо



Сл. 54.

$$\cos\delta\sin H = \sin z \cdot \sin(\pi - A).$$

Како је, међутим, са подацима задатка,

$$H = 9^h\,5^m\,21^s - 3^h\,5^m\,21^s = 6^h\,0^m\,0^s = 90^0,$$

горњи образац постаје

$$\sin(\pi - A) = \frac{\cos\delta}{\sin z}.$$

Ако га трансформишемо за нумерички рачун, на већ познати начин, имаћемо

$$1 - \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{\sin z} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\left(z + \frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\frac{1}{2}\left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right]}{\sin z},$$

$$1 + \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{\sin z} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(z + \frac{\pi}{2} - \delta\right)\cos\frac{1}{2}\left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right]}{\sin z}.$$

Одавде добивамо за одређивање азимута

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(z + \frac{\pi}{2} - \delta\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left[z - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right].$$

За одређивање посматрачеве географске ширине имамо

$$\sin\varphi = \frac{\cos z}{\sin\delta}.$$

Ако и овај образац трансформишемо за нумерички рачун, добићемо

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\delta + \frac{\pi}{2} - z\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left[\delta - \left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right].$$

Помоћу ових образаца извешћемо нумеричко решење задатка са седам децимала.

$z =$	$32^0\,35'\,23''.5,$	$z + (90^0 - \delta) =$	$63^0\,42'\,37''.3,$
$\delta =$	$+58\;\;52\;\;46.2,$	$z - (90^0 - \delta) =$	$1\;\;28\;\;\;9.7,$
$90^0 - z =$	$57\;\;24\;\;36.5,$	$\delta + (90^0 - z) =$	$116\;\;17\;\;22.7,$
$90^0 - \delta =$	$31\;\;\;7\;\;13.8;$	$\delta - (90^0 - z) =$	$1\;\;28\;\;\;9.7;$

$$\frac{1}{2}[z + (90^0 - \delta)] = 31^0\,51'\,18''.65, \qquad \frac{1}{2}[z - (90^0 - \delta)] = \;\;0\;\;44\;\;\;4.85,$$

$$\frac{1}{2}[\delta + (90^0 - z)] = 58\;\;\;8\;\;41.35.$$

$\left[\text{ctg}\frac{1}{2}\{z+(90^0-\delta)\}\right]$ 0·206 6565, $\left[\text{ctg}\frac{1}{2}\{\delta+(90^0-z)\}\right]$ 9·793 3436,

$\left[\text{tg}\frac{1}{2}\{z-(90^0-\delta)\}\right]$ 8·107 9997, $\left[\text{tg}\frac{1}{2}\{\delta-(90^0-z)\}\right]$ 8·107 9997,

$2\left[\text{tg}\frac{1}{2}(A-90^0)\right]$ 8·314 6562, $2\left[\text{tg}\frac{1}{2}(90^0-\varphi)\right]$ 7·901 3433,

$\left[\text{tg}\frac{1}{2}(A-90^0)\right]$ 9·157 3281, $\left[\text{tg}\frac{1}{2}(90^0-\varphi)\right]$ 8·950 6717,

$\frac{1}{2}(A-90^0)=$ 8° 10′ 30″·12, $\frac{1}{2}(90^0-\varphi)=$ 5° 6′ 3″·15,

$A-90^0=$ 16 21 0·24, $90^0-\varphi=$ 10 12 6 ·30,

$A=106$ 21 0·24; $\varphi=+79$ 47 53 ·70.

Поправка за оријентисање инструмента у азимуту износи, према томе, $A_r-A_p=106^0\,21'\,0''\cdot24-118^0\,23\,57''\cdot2=-12^0\,2'\,57''\cdot0$.

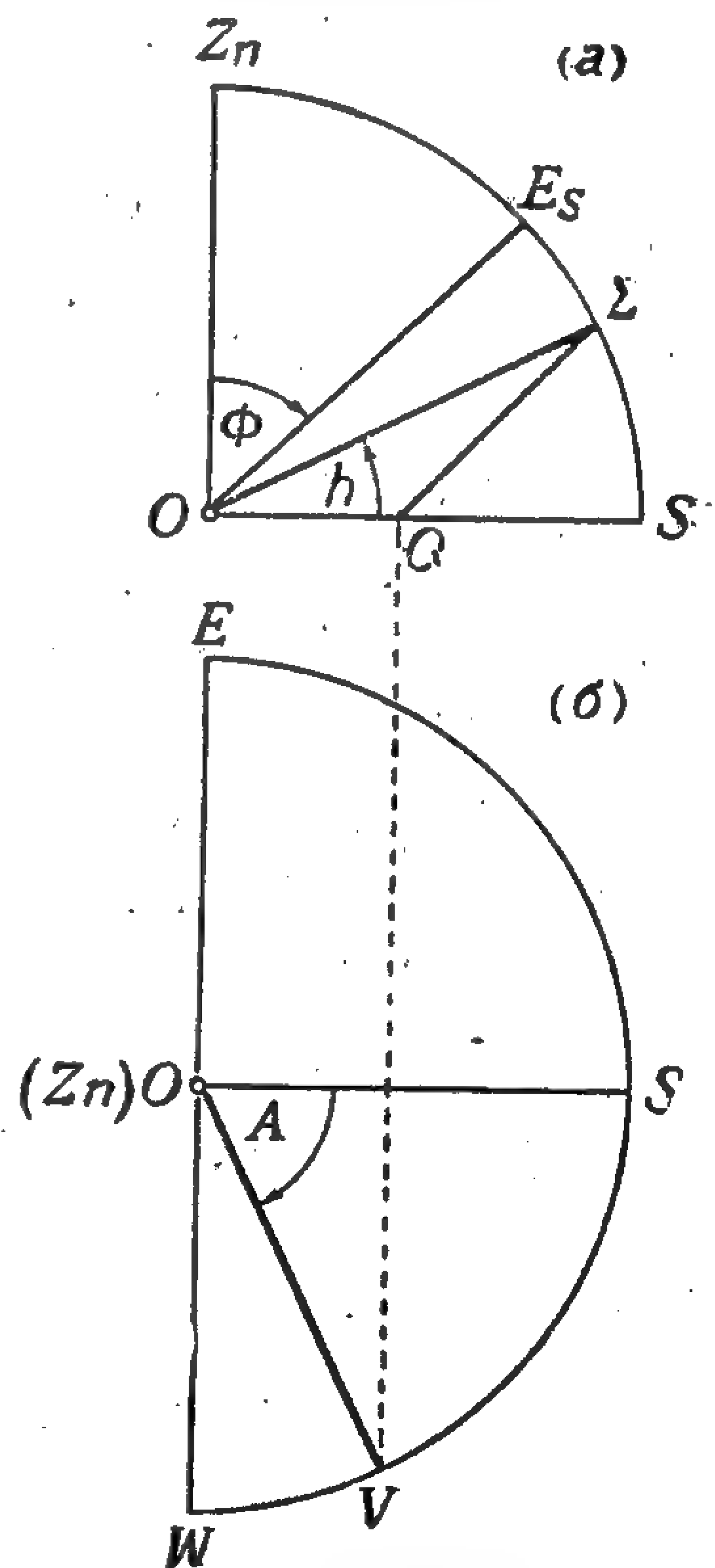
За проверавање нумеричког рада узећемо образац који везује дате са израчунатим величинама. Из положајног сферног троугла, који је, у овом случају, правоугли имамо

$$\sin\varphi\sin A=\text{ctg}\,\delta\,\text{ctg}\,z.$$

Са горњим бројним вредностима ових елемената налазимо:

$[\sin\varphi]$	9·993 0790,	$[\text{ctg}\,\delta]$	9·780 8403,
$[\sin A]$	9·982 0720,	$[\text{ctg}\,z]$	0·194 3107,
Σ_1	9·975 1510;	Σ_2	9·975 1510.

94. *Графичко решење.* Претставимо на сл. 55 (а) са OZ_nS јужну страну посматрачева меридијана, од зенита, Z_n, до јужне тачке, S, хоризонта. Затим нанесимо око O, као темена, угао $SO\Sigma=$ $=h=25^0$, наиме, висину некретнице у тренутку њене горње кулминације. Овако одређена тачка Σ претставља, у исти мах, и једну тачку паралела који некретница описује у току свог привидног кретања.



Сл. 55 а.
Сл. 55 б.

Претставимо сад полукружном линијом ESW (в. сл. 55 (б)) пројекцију јужне стране небеске сфере на посматрачеву хоризонтску раван (размере морају бити као и у горњој слици; правци OS у обема паралелни). Наносећи од OS (који претставља пројекцију јужног дела посматрачева меридијана) угао $A=\sphericalangle SOV=65^0$, добивамо на посматрачеву хоризонту тачку залаза, V, некретнице. Пројицирајмо сад ову тачку на посматрачеву меридијан-

ску раван. Добивамо на сл. 55 (а) тачку Q. И ово је, према томе, једна тачка паралела некретнице.

Тако смо одредили две тачке, Σ и Q, пројициране привидне дневне путање некретнице на посматрачеву меридијанску раван. А како је та пројекција права линија (тетива), овим тачкама је одређена пројекција паралела некретнице на посматрачеву меридијанску раван. И то његова видљива дела. Онда полупречник OE_s, повучен на сл. 55 (а) паралелно су дужи ΣQ, претставља пројекцију на посматрачеву меридијанску раван видљивог дела небеског екватора.

На овако конструисаној слици:

$\sphericalangle E_sO\Sigma$ претставља деклинацију некретнице, за коју са слике читамо $\delta \approx -16^0$,

$\sphericalangle E_sOZ_n$ претставља посматрачеву географску ширину, за коју са слике налазимо $\varphi \approx +49^0$.

Нумеричко решење. У тренутку горње кулминације звезде је

$$\varphi = z + \delta, \text{ то јест } \delta = \varphi - z.$$

У тренутку залаза је

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A,$$

те је, према томе,

$$\sin(\varphi - z) = -\cos \varphi \cos A.$$

Ако леву страну развијемо, имаћемо

$$\sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z = -\cos \varphi \cos A,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi \cos z = \sin z - \cos A,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = (\sin z - \cos A) \sec z = 2 \cos \frac{1}{2}[z + (90^0 - A)] \sin \frac{1}{2}[z - (90^0 - A)] \sec z.$$

Према томе ће бити:

$z = 65^0$, $z + (90^0 - A) = 90^0$, $\frac{1}{2}[z + (90^0 - A)] = 45^0$, $[\sqrt{2}]$ 0·15 051,

$A = 65$, $z - (90^0 - A) = 40$; $\frac{1}{2}[z - (90^0 - A)] = 20^0$; $[\sin 20^0]$ 9·53 405,

$90^0 - A = 25^0$; $[\sec 65^0]$ 0·37 405,

$[\operatorname{tg} \varphi]$ 0·05 861;

то јест $\varphi = +48^0\,51'$. А из првог обрасца налазимо $\delta = -16^0\,9'$.

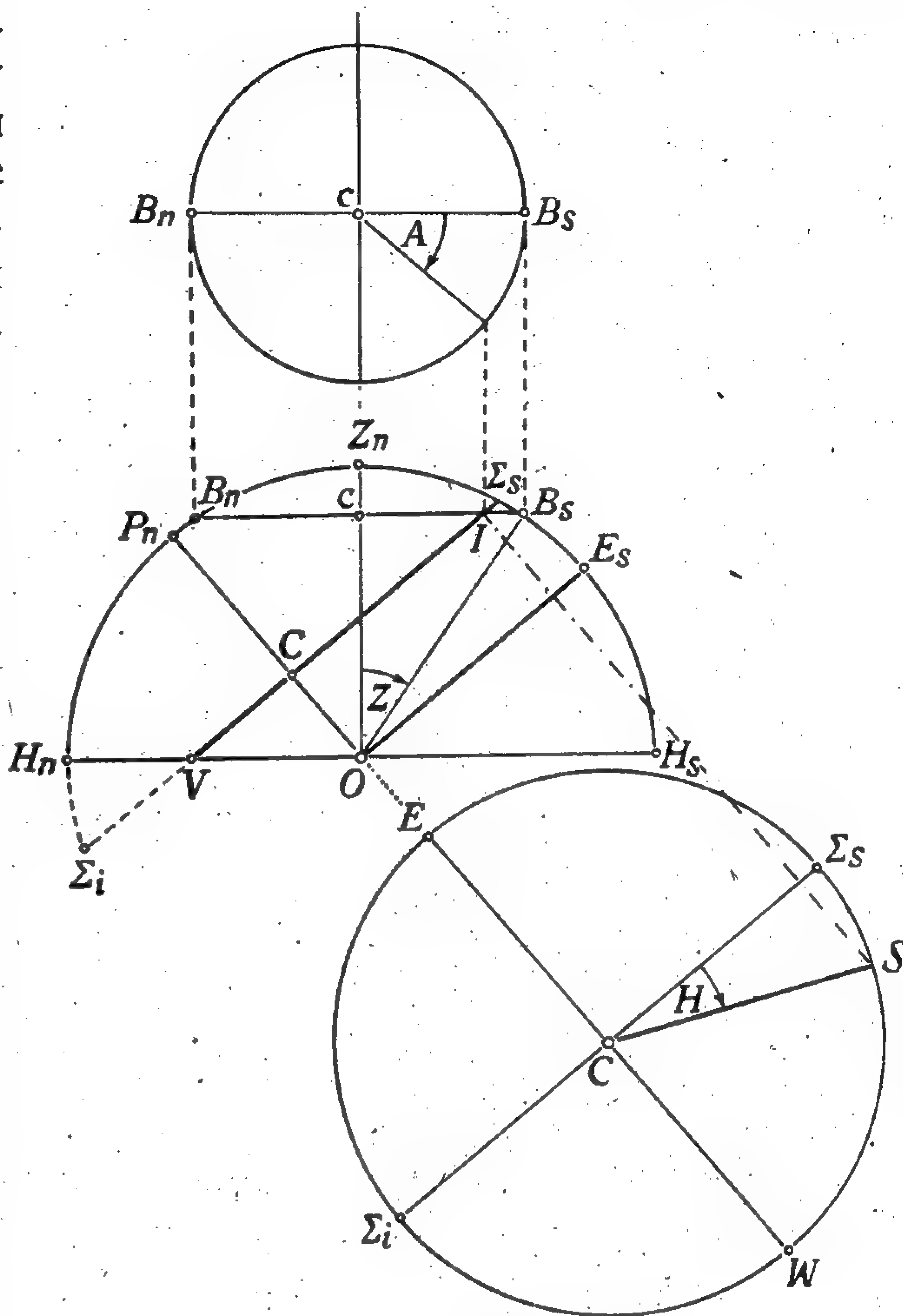
95. Претставимо на сл. 56:

са $H_nZ_nH_s$ посматрачеву меридијанску раван;

са H_nH_s пројекцију на ту раван посматрачева хоризонта;

са Z_n посматрачев зенит.

Пошто је дата у задатку посматрачева географска ширина, имаћемо од OZ_n, око O као темена, угао $\varphi = \sphericalangle Z_nOE_s$. Добивени полупречник, OE_s, претставља пројекцију видљивог дела небеског екватора на посматрачеву меридијанску раван. Нормални полупречник на овоме, дакле OP_n, претставља светску осу.



Сл. 56.

У задатку су дате, сем тога, и хоризонтске координате звезде, A и z. Помоћу њих можемо одредити пројекцију, на меридијанску раван, положаја некретнице у тренутку посматрања. Зато ћемо, прво, нанети од OZ_n, ка OH_s (јер је $A = 40^0$) угао $z = \sphericalangle Z_nOB_s$. Кроз овако добивену тачку, B_s, повући ћемо тетиву $B_sB_n \| H_sH_n$. Она претставља пројекцију, на меридијанску раван, алмукантара на на којем се некретница налазила у тренутку посматрања.

Сад треба одредити положај звезде на алмукантару. Зато ћемо га обрнути око његова пречника B_sB_n, за 90^0, и положити га у раван меридијана. Добићемо горњу кружну линију, са средиштем c — пројекцијом посматрачева зенита на раван алмукантара. Нанесимо сад од cB_s, у ретроградном смеру, угао $A = \sphericalangle B_sc\Sigma$, па пројицирајмо добивену тачку Σ на пројекцију алмукантара B_sB_n. Тако добивамо тачку I. Ово је пројекција на меридијанску раван посматраног положаја некретнице, чије су хоризонтске координате (A, z).

Тачка I припада, према томе, и паралелу некретнице. А како пројекција овога на меридијанску раван мора бити паралелна пројекцији небеског екватора, дакле полупречнику OE_s, повлачењем кроз I тетиве $\Sigma_s\Sigma_i \| OE_s$ добивамо пројекцију паралела на меридијанску раван. Њен део $V\Sigma_s$ претставља пројекцију половине видљивог, или дневног (а $V\Sigma_i$ ноћног) лука некретнице. Углом $E_sO\Sigma_s$ одређена је деклинација (δ) некретнице.

У задатку је дато звездано време (t) посматрања. Ако одредимо часовни угао (H) звезде у тренутку посматрања, моћи ћемо одредити и ректасцензију звезде ($\alpha = t - H$). Да бисмо одредили тај угао, обрнимо паралел око његова пречника $\Sigma_s\Sigma_i$ за 90^0, и положимо га у посматрачеву меридијанску раван. Добићемо кружну линију, са средиштем у C — пројекцијом небеског пола на раван паралела. Положај некретнице

на паралелу, у тренутку посматрања, добићемо пројицирајући тачку I на ову кружну линију. Добивамо две тачке: једна одговара положају звезде на источној страни, друга положају звезде на западној страни посматрачева меридијана. Како је азимут звезде у тренутку посматрања, према задатку, $A=40^{0}$, што ће рећи да се звезда налази западно од меридијана, њен положај на паралелу одређен је тачком S. Према томе, угао $\Sigma_s CS$ претставља тражени часовни угао некретнице.

Примењујући овај, графички, начин решавања, полазећи од података: $z=35^0$, $A=40^0$, $\varphi=+50^0$ и $t=8^h\,40^m=130^0$, долазимо до ових вредности тражених величина: $\delta=+20^0$, $H=24^0.5=1^h\,38^m$, тако да се за ректасцензију звезде добива $\alpha=7^h\,2^m$.

Нумеричко решење. Применићемо обрасце Гаусове групе који одређују δ и H кад су дати A, z и φ. Трансформисани за логаритамски рачун то су обрасци:

$$\sin\delta=m\sin(\varphi-M), \qquad m\cos M=\cos z,$$

$$\cos\delta\sin H=\sin z\sin A, \quad \text{са} \quad m\sin M=\sin z\cos A,\ m>0;$$

$$\cos\delta\cos H=m\cos(\varphi-M), \quad \text{дакле} \quad \operatorname{tg} M=\operatorname{tg} z\cos A;$$

па, према томе, $\operatorname{tg} H=\operatorname{tg} z\sin A\cos M\sec(\varphi-M)$ и $\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}(\varphi-M)\cos H$.

Са подацима задатка биће:

$[\operatorname{tg} z]$	9·84 523,	$[\cos M]$	9·94 510,	$[\operatorname{tg}(\varphi-M)]$	9·60 184,
$[\cos A]$	9·88 425,	$[\operatorname{tg} z]$	9·84 523,	$[\cos H]$	9·96 361,
$[\operatorname{tg} M]$	9·72 948;	$[\sin A]$	9·80 807,	$[\operatorname{tg}\delta]$	9·56 545,
$M=28^0\,12'.5$,		$[\sec(\varphi-M)]$	0·03 219,	$\delta=+20^0\,11'.2$.	
$\varphi=50^0$,		$[\operatorname{tg} H]$	9·63 059;		
$\varphi-M=21\,47.5$;					

За H налазимо $H=23^0\,7'.8$, те за ректасцензију добивамо, из $\alpha=t-H$, $\alpha=8^h\,40^m-1^h\,32^m.5=7^h\,7^m.5$.

96. Зенитска даљина некретнице може остати непромењена током звезданог дана само:

1) ако се посматрач налази на једном од Земљиних полова, дакле ако је $\varphi=\pm 90^0$. У том случају су зенитске даљине некретница једнаке њиховим поларним даљинама, а ове, код некретница, остају непромењене у току звезданог дана;

2) ако је деклинација некретнице $\delta=\pm 90^0$. Њена зенитска даљина постаје, у том случају, једнака посматрачевој колатитуди, те, према томе, остаје непромењена.

97. Према задатку, некретница проводи над посматрачевим хоризонтом $14^h\,19^m\,48^s$. Другим речима, њен дневни лук, изражен у време-

ној мери, износи $14^h\,19^m\,48^s$; полудневни лук њен износи онда $7^h\,9^m\,54^s$. Полудневним луком, међутим, одређен је часовни угао ($\pm H$) излаза ($-H$), односно залаза ($+H$) некретнице.

Како је у задатку дат тренутак (t) излаза, помоћу познате вѐзе $\alpha = t - H$ налазимо за ректасцензију некретнице

$$\alpha = 12^h\,33^m\,24^s - (-7^h\,9^m\,54^s) = 19^h\,43^m\,18^s.$$

С друге стране, ако унесемо у образац за полудневни лук некретнице, деклинације δ, у месту географске ширине φ,

$$\cos H = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi,$$

услов задатка, према коме некретница пролази кроз посматрачев зенит, што значи ставимо да је $\delta = \varphi$, добивамо

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\cos H.$$

Пошто је H дато, одавде налазимо φ, и то две вредности: $\pm\varphi$. Тиме је, у исти мах, одређена и деклинација звезде, јер је $\delta = \varphi$.

Налазимо, наиме, за $H = -7^h\,9^m\,54^s = -107^\circ\,28'\,30''$:

$[-\cos H]$	9·47 754,	$\varphi = \pm 28^\circ\,43'\,20''$,	
$[\operatorname{tg}\varphi]$	9·73 877;	$\delta = \pm 28\ \ 43\ \ 20$,	$\alpha = 19^h\,43^m\,18^s$.

98. У тренутку излаза (или залаза) некретнице њен часовни угао (H) дат је изразом

$$\cos H = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi,$$

где δ означава деклинацију некретнице, а φ посматрачеву географску ширину. Из овог израза добивамо

$$1 - \cos H = 2\sin^2\frac{H}{2} = 1 + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi,$$

$$1 + \cos H = 2\cos^2\frac{H}{2} = 1 - \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi.$$

Одавде, ако поделимо, имамо

$$\operatorname{tg}^2\frac{H}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta}.$$

Приметимо ли да је

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \delta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}\delta}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta}, \quad \text{то јест да је} \quad 1 \mp \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(\varphi \pm \delta)},$$

имаћемо

$$\operatorname{tg}^2\frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\varphi+\delta)}{\operatorname{tg}(\varphi-\delta)} = \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\varphi+\delta)}{\operatorname{tg}(\varphi-\delta)} =$$

$$tg^2\frac{H}{2}=\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}=\cos(\varphi-\delta)\sec(\varphi+\delta),$$

што је и требало показати.

99. При пролазу некретнице позитивне деклинације (δ) кроз први вертикал (западни) места северне географске ширине (φ) положајни сферни троугао, $P_n\Sigma Z_n$, постаје правоугли, са правим углом у темену Z_n, јер је $A=90^0$, Према томе, петоелементни образац Гаусове групе постаје, у овом случају,

$$\sin z\cos A=0=\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos H_1,$$

то јест

$$\cos H_1=\mathrm{ctg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

За часовни угао некретнице у тренутку њена залаза имамо

$$\cos H_2=-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

Измножимо ли ове две једначине добивамо, пошто уредимо,

$$\cos H_1\cos H_2+\mathrm{tg}^2\,\delta=0.$$

100. Кад је некретница у меридијану онда је

$$\varphi=z_1+\delta.$$

Кад некретница доспе (ако доспева) у први вертикал имамо, пошто је $A=90^0$,

$$\sin\delta=\cos z_2\sin\varphi.$$

Унесемо ли овде за φ његову горњу вредност, имаћемо

$$\sin\delta=\cos z_2\sin(z_1+\delta),$$

то јест, ако развијемо други фактор на десној страни, имаћемо

$$\sin\delta=\cos z_2(\sin z_1\cos\delta+\cos z_1\sin\delta).$$

Ако поделимо обе стране производом $\sin z_1\cos z_2\sin\delta$ добићемо

$$\mathrm{ctg}\,\delta=\mathrm{cosec}\,z_1\sec z_2-\mathrm{ctg}\,z_1.$$

А уврстимо ли у прву једначину за δ вредност из полазне везе, добивамо

$$\sin(\varphi-z_1)=\cos z_2\sin\varphi.$$

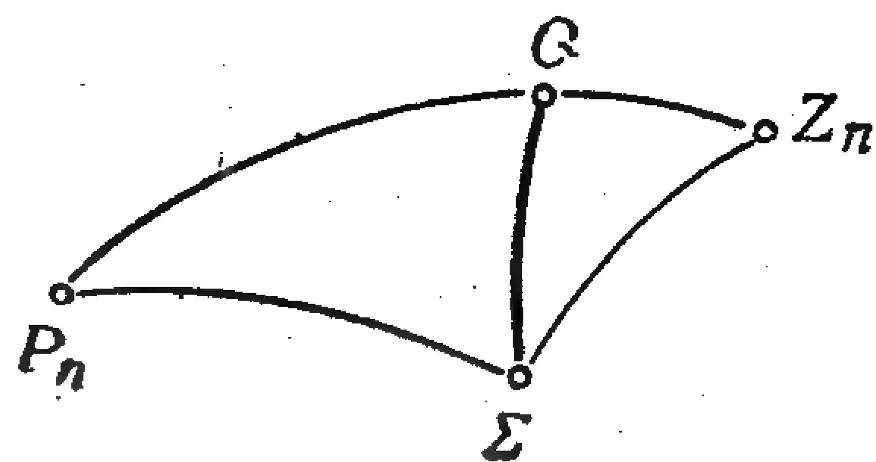
Развијмо леву страну, поделимо обе стране производом $-\sin\varphi\sin z_1$, па уредимо једначину и добићемо

$$\mathrm{ctg}\,\varphi=\mathrm{ctg}\,z_1-\mathrm{cosec}\,z_1\cos z_2.$$

101. Повуцимо у положајном сферном троуглу $P_nZ_n\Sigma$ (в. сл. 57) лук великог круга ΣQ, нормално на страну P_nZ_n. Добићемо два право-

угла сферна троугла. Означимо у њима: са ξ страну P_nQ; са η страну $Q\Sigma$; са ϑ страну QZ_n. Онда из троугла $P_nQ\Sigma$ имамо

$$\operatorname{tg}\xi = \operatorname{ctg}\delta\cos H \quad \text{и} \quad \sin\eta = \cos\delta\sin H.$$



Сл. 57.

А из другог троугла, ΣZ_nQ, имамо

$$\cos z = \cos\vartheta\cos\eta, \text{ то јест } \cos\vartheta = \cos z\sec\eta,$$

или
$$\vartheta = \arccos(\cos z\sec\eta).$$

Приметимо ли, сем тога, да је $\psi = \xi + \vartheta$, добивамо

$$\psi = \xi + \arccos(\cos z\sec\eta).$$

Из овог решења види се, уједно, и геометриско значење помоћних величина ξ и η.

102. Према задатку, уочене некретнице истовремено излазе; другим речима, у истом тренутку почињу свој привидни дневни лук за дотичног посматрача. Међутим, док прва стигне до своје кулминације, што значи на половину свог дневног лука, друга је доспела већ до залаза, што ће рећи прешла је ц е о свој дневни лук. Одатле следује да је дневни лук друге једнак половини дневног лука прве.

Ако означимо полудневне лукове ових звезда са H_1 и H_2, имамо

$$\cos H_1 = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta, \quad \text{и} \quad \cos H_2 = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_2.$$

Ставимо ли, дакле, $2H_2 = H_1$, то јест $H_2 = \frac{1}{2}H_1$, и приметимо ли да је

$$\cos H_2 = \cos\frac{1}{2}H_1 = \sqrt{\frac{1+\cos H_1}{2}},$$

имаћемо, пошто уврстимо горње вредности,

$$-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_2 = \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_1}{2}}.$$

Ослободимо ли се још корена и уредимо ли једначину, добићемо

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_1 = 1 - 2\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta_2.$$

103. Означимо дате ректасцензије и деклинације са (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) и географску ширину места са φ. Ако још са t означимо тренутак (звезданог времена) залаза ових двеју некретница, имаћемо

$$\cos H_1 = \cos(t-\alpha_1) = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_1,$$

$$\cos H_2 = \cos(t-\alpha_2) = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta_2;$$

а одавде
$$\sin H_1 = \sin(t-\alpha_1) = (1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}},$$

односно
$$\sin H_2 = \sin(t-\alpha_2) = (1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Из ових једначина добивамо

$$\cos(H_1 - H_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 + (1 - \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 = (1 - \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Дигнемо ли обе стране на квадрат имаћемо, пошто уредимо,

$$\operatorname{tg}^2\varphi\,[\operatorname{tg}^2\delta_1 + \operatorname{tg}^2\delta_2 - 2\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а одавде добивамо за географску ширину места, као функцију координата двеју некретница,

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\,[\operatorname{tg}^2\delta_1 + \operatorname{tg}^2\delta_2 - 2\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

104. За часовни угао и азимут имамо, из положајног сферног троугла, изразе (са уобичајеним ознакама)

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$
$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A.$$

Ако у њих унесемо услов из задатка, $h = \varphi$, добићемо

$$\sin\varphi = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$
$$\sin\delta = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi \cos A = 1 - \cos^2\varphi\,(1 + \cos A).$$

Одавде добивамо, даље,

$$\cos H = \frac{\sin\varphi\,(1 - \sin\delta)}{\cos\varphi \cos\delta} = \operatorname{tg}\varphi \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right);$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\sec^2\varphi, \quad \text{то јест} \quad \cos\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\sec\varphi.$$

А одатле имамо

$$H = \arccos\left[\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\right] \quad \text{и} \quad A = 2\arccos\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right)\sec\varphi\right].$$

105. Ако применимо петоелементни образац на положајни сферни троугао сваке од некретница, у тренутку (t) њена пролаза кроз посматрачев први вертикал, то јест кад им је $A = \pm 90^\circ$, налазимо (са уобичајеним ознакама)

$$\cos H_1 = \cos(t - \alpha_1) = \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg}\delta_1,$$
$$\cos H_2 = \cos(t - \alpha_2) = \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg}\delta_2,$$

а одатле

$$\sin H_1 = \sin(t - \alpha_1) = (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin H_2 = \sin(t - \alpha_2) = (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Помоћу ових образаца добивамо

$$\cos(H_1 - H_2) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 +$$
$$+ (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 = (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_1)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{ctg}^2\varphi \operatorname{tg}^2\delta_2)^{\frac{1}{2}}.$$

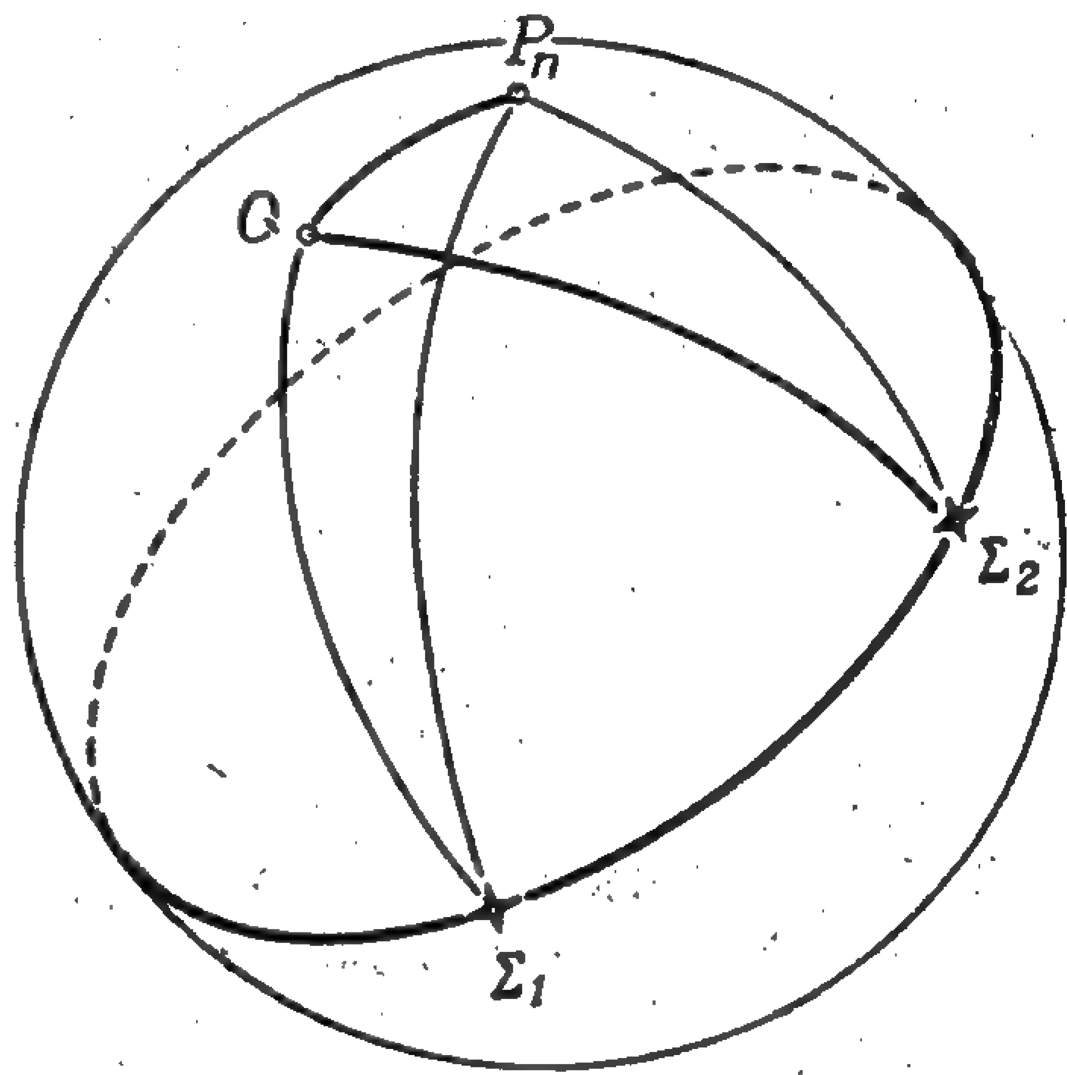
Дигнемо ли на квадрат и уредимо, добићемо

$$\operatorname{ctg}^2\varphi\,[\operatorname{tg}^2\delta_1 + \operatorname{tg}^2\delta_2 - 2\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а одавде,

$$\operatorname{ctg}\varphi = \pm\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\,[\operatorname{tg}^2\delta_1 + \operatorname{tg}^2\delta_2 - 2\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{tg}\delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{\frac{1}{2}}.$$

106. Нека на сл. 58 Q претставља пол, са координатама $(\mathfrak{R}, \mathfrak{D})$, великог круга што пролази кроз тачке (рецимо некретнице), Σ_1 и Σ_2, чије су екваторске координате (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2).



Сл. 58.

Како је Q пол великог круга $\Sigma_1\Sigma_2$, то су $Q\Sigma_1 = Q\Sigma_2 = \frac{\pi}{2}$. Значи, сферни троуглови $P_nQ\Sigma_1$ и $P_nQ\Sigma_2$ су квадрантни. Према томе имамо,

из првог:

$$\sin\mathfrak{D}\sin\delta_1 + \cos\mathfrak{D}\cos\delta_1\cos(\alpha_1 - \mathfrak{R}) = 0,$$

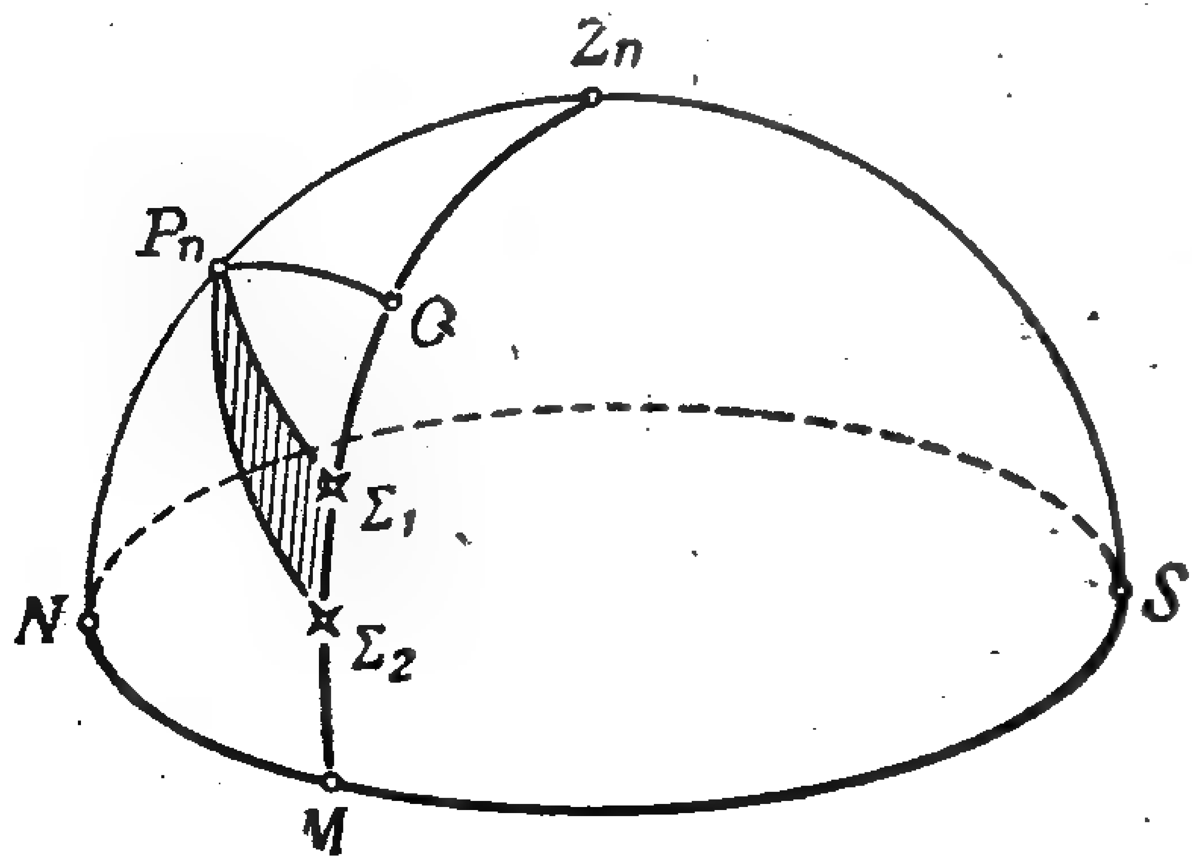
из другог:

$$\sin\mathfrak{D}\sin\delta_2 + \cos\mathfrak{D}\cos\delta_2\cos(\alpha_2 - \mathfrak{R}) = 0.$$

Одавде добивамо за тражене везе између $(\mathfrak{R}, \mathfrak{D})$, с једне, и (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2) с друге стране,

$$\operatorname{tg}\mathfrak{D} = -\operatorname{ctg}\delta_1\cos(\alpha_1 - \mathfrak{R}) = -\operatorname{ctg}\delta_2\cos(\alpha_2 - \mathfrak{R}).$$

107. Нека претстављају на сл. 59: Z_n — посматрачев зенит: P_n — северни небески пол; Σ_1 и Σ_2 — некретнице, са координатама (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2), на вертикалу Z_nM, азимута A. Означимо са l лук великог круга P_nQ, повучена нормално на вертикал Z_nM, а са q паралактички угао $P_n\Sigma_1\Sigma_2$. Онда имамо, из правоуглих сферних троуглова P_nQZ_n и $P_n\Sigma_1Q$,



Сл. 59.

$$\sin l = \sin A\cos\varphi = \cos\delta_1\sin q.$$

С друге стране, из сферног троугла $P_n\Sigma_2\Sigma_1$, имамо

$$\sin\sigma\sin q = \cos\delta_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

то јест

$$\sin q = \cos\delta_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{cosec}\sigma.$$

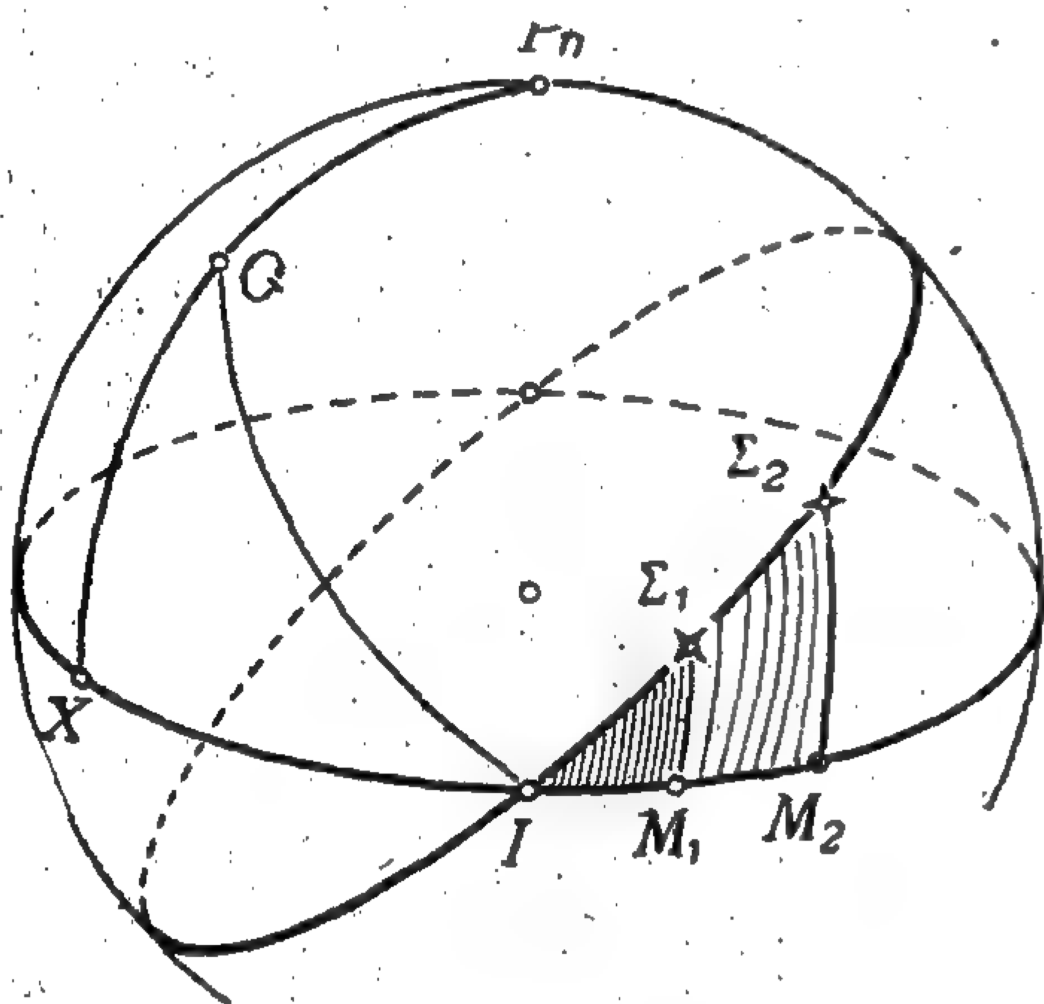
Уврстимо ли ову вредност за $\sin q$ на десној страни прве једначине, добивамо

$$\sin A \cos\varphi = \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec}\sigma.$$

Одавде следује да је

$$\cos\varphi > \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosec}\sigma.$$

108. Нека претстављају Σ_1 и Σ_2 (в. сл. 60) на небеској сфери две тачке са координатама (α_1, δ_1) и (α_2, δ_2). Велики круг одређен овим тачкама сече небески екватор у две тачке. Означимо са I ону од тих двеју тачака кроз коју пролази велики круг $\Sigma_1\Sigma_2$ прелазећи са негативних на позитивне деклинације. Нека Q претставља пол тог великог круга, и то онај ближи северном небеском полу.



Сл. 60.

Означимо са Ω ректасцензију тачке пресека I, а са i нагиб, то јест $\sphericalangle M_1 I \Sigma_1$ између великог круга и екватора. Онда имамо из правоуглих сферних троуглова $\Sigma_1 I M_1$ и $\Sigma_2 I M_2$

$$\sin(\alpha_1 - \Omega) = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg}\delta_1,$$
$$\sin(\alpha_2 - \Omega) = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg}\delta_2.$$

Ове се једначине добивају, уосталом, и непосредно из решења Зад. 106, ако се у њему изврши замена

$$\mathfrak{R} = \Omega - \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D} = \frac{\pi}{2} - i.$$

Да бисмо из постављених једначина одредили непознате Ω и i, поделимо збир тих једначина њиховом разликом. Добићемо

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \Omega) + \sin(\alpha_2 - \Omega)}{\sin(\alpha_1 - \Omega) - \sin(\alpha_2 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tg}\delta_1 + \operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2}.$$

Одавде онда имамо

$$\frac{2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega\right]\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega\right]\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\sin(\delta_1 - \delta_2)},$$

те, према томе,

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \Omega\right] = \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Из ове једначине добивамо две вредности за Ω, то јест ректасцензију тачке пресека, а, помоћу њих, из било које од полазних једначина, израчунавамо и вредности i, то јест нагиб равни великог круга кроз Σ_1 и Σ_2 према равни екватора.

Примењујући ово решење са подацима задатка имаћемо:

$\delta_1 = -15^0\,16'\,17''$,		$[\sin(\delta_1+\delta_2)]$	$9{\cdot}66\,328$,
$\delta_2 = +42\ \ 41\ \ 40$,		$\left[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\right]$	$0{\cdot}13\,326\,n$,
$\delta_1-\delta_2 = -57\ \ 57\ \ 57$,		$[\mathrm{cosec}\,(\delta_1-\delta_2)]$	$0{\cdot}07\,174\,n$,
$\delta_1+\delta_2 = \ \ 27\ \ 25\ \ 23$;		$\left[\mathrm{tg}\left\{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\Omega\right\}\right]$	$9{\cdot}86\,828$,

$$\alpha_1 = 110^0\ \ 0'\,20'',\qquad \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\Omega_1 = 36^0\,26'\,29'',$$

$$\alpha_2 = 217\ \ 18\ \ 58,$$

$$\alpha_1-\alpha_2 = -107\ \ 18\ \ 38,\qquad \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) = 163^0\,39\ \ 39,$$

$$\alpha_1+\alpha_2 = 327\ \ 19\ \ 18,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2) = -\ 53\ \ 39\ \ 19;\qquad \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)-\Omega_2 = 216\ \ 26\ \ 29,$$

$$\Omega_1 = 127^0\,13'\,10'',\qquad \Omega_2 = 307^0\,13'\,10'';$$

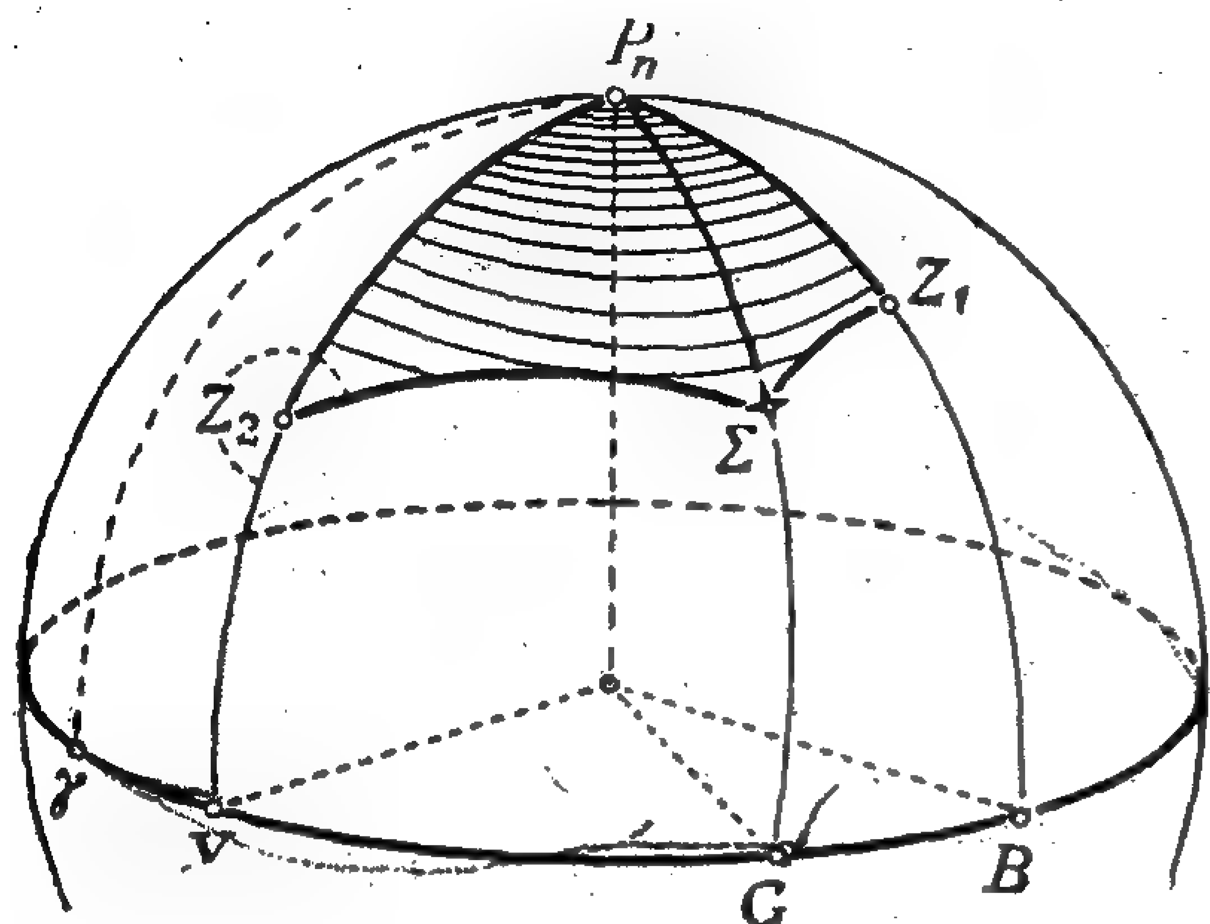
$\alpha_1-\Omega_1 = -17^0\,12'\,49''$,		$\alpha_2-\Omega_1 = 90^0\,5'\,48''$,	
$[\sin(\alpha_1-\Omega_1)]$	$9{\cdot}47\,120\,n$,	$[\sin(\alpha_2-\Omega_1)]$	$0{\cdot}00\,000$,
$[\mathrm{ctg}\,\delta_1]$	$0{\cdot}56\,379\,n$,	$[\mathrm{ctg}\,\delta_2]$	$0{\cdot}03\,499$,
$[\mathrm{ctg}\,i]$	$0{\cdot}03\,499$,	$[\mathrm{ctg}\,i]$	$0{\cdot}03\,499$;

$$i = 42^0\,41'\,39''.$$

Из података задатка није тешко видети да прва вредност (Ω_1) ректасцензије тачке I одговара оном пресеку кроз који велики круг $\Sigma_1\Sigma_2$ прелази са негативних на позитивне деклинације, а друга оној (дијаметрално супротној) кроз коју прелази са позитивних на негативне деклинације.

Осим тога, из чињенице да је добивени нагиб једнак (наравно у границама тачности полазних података и нумеричког рада) деклинацији друге тачке (Σ_2), закључујемо да се ова налази на 90° од тачака пресека великог круга $\Sigma_1\Sigma_2$ и екватора, другим речима, да се налази на великом кругу што пролази кроз полове Q и P_n.

109. Нека на сл. 61 претстављају: P_n – северни небески пол; P_nG – гринички меридијан и, на њему, некретницу, Σ, дакле, у тренутку њене горње кулминације; Z_1 и Z_2 – зените посматрача у Београду и Њујорку; $P_n\gamma$ – небески меридијан кроз γ – тачку, од којега се рачунају ректасцензије.



Сл. 61.

У сферним троугловима $P_n\Sigma Z_1$ и $P_n\Sigma Z_2$ познати су нам елементи:

$$P_nZ_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \quad P_nZ_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2;$$

$$P_n\Sigma = \frac{\pi}{2} - \delta; \quad \sphericalangle \Sigma P_nZ_1 = L_1 = H_1;$$

$$\sphericalangle \Sigma P_nZ_2 = L_2 = H_2.$$

Треба одредити, у првом троуглу: $Z_1\Sigma = \frac{\pi}{2} - h_1$ и $\sphericalangle \Sigma Z_1P_n = \pi - A_1$;

у другом троуглу: $Z_2\Sigma = \frac{\pi}{2} - h_2$ и $\sphericalangle \Sigma Z_2P_n = A_2 - \pi$.

Одредићемо их помоћу образаца Гаусове групе:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos H,$$

које ћемо трансформисати за логаритамски рачун, на већ познати начин, стављајући

$$m \sin M = \sin\delta,$$

$$m \cos M = \cos\delta \cos H, \qquad \text{са } m > 0.$$

На тај начин горњи обрасци постају

$$\sin h = m \cos(\varphi - M),$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H,$$

$$\cos h \cos A = m \sin(\varphi - M).$$

Из ових добивамо за помоћни угао M и непознате координате A и h:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg}\delta \sec H,$$

$$\operatorname{tg} A = \cos M \operatorname{cosec}(\varphi - M) \operatorname{tg} H,$$

$$\operatorname{tg} h = \cos A \operatorname{ctg}(\varphi - M).$$

Са подацима задатка имаћемо, према томе,

$\delta = +45^0\,57'{\cdot}3,$	$[\sec H_1]$	$0{\cdot}02\,845,$		$M_1 =$	$47^0\,49'{\cdot}7,$
$\varphi_1 = +44\;\;48{\cdot}2,$	$[\operatorname{tg}\delta]$	$0{\cdot}01\,448,$		$M_2 =$	$75\;\;\;2{\cdot}2,$
$\varphi_2 = +40\;\;48{\cdot}6,$	$[\sec H_2]$	$0{\cdot}55\,856,$			
$H_1 = \;\;20\;\;30{\cdot}8,$	$[\operatorname{tg} M_1]$	$0{\cdot}04\,293,$		$\varphi_1 - M_1 =$	$-\;\;3\;\;\;1{\cdot}5,$
$H_2 = -73\;\;57{\cdot}5;$	$[\operatorname{tg} M_2]$	$0{\cdot}57\,304;$		$\varphi_2 - M_2 =$	$-34\;\;13{\cdot}6;$

$[\cos M_1]$	$9{\cdot}82\,695,$	$[\cos M_2]$	$9{\cdot}41\,196,$
$[\operatorname{cosec}(\varphi_1 - M_1)]$	$1{\cdot}27\,760\,n,$	$[\operatorname{cosec}(\varphi_2 - M_2)]$	$0{\cdot}24\,990\,n,$
$[\operatorname{tg} H_1]$	$9{\cdot}57\,304,$	$[\operatorname{tg} H_2]$	$0{\cdot}54\,132\,n,$
$[\operatorname{tg} A_1]$	$0{\cdot}67\,759\,n,$	$[\operatorname{tg} A_2]$	$0{\cdot}20\,318,$
	$A_1 = 101^0\,51'{\cdot}9;$		$A_2 = 237^0\,56'{\cdot}3;$
$[\cos A_1]$	$9{\cdot}31\,304\,n,$	$[\cos A_2]$	$9{\cdot}72\,496\,n,$
$[\operatorname{ctg}(\varphi_1 - M_1)]$	$1{\cdot}27\,699\,n,$	$[\operatorname{ctg}(\varphi_2 - M_2)]$	$0{\cdot}16\,731\,n,$
$[\operatorname{tg} h_1]$	$0{\cdot}59\,003,$	$[\operatorname{tg} h_2]$	$9{\cdot}89\,227,$
	$h_1 = 75^0\,35'{\cdot}2;$		$h_2 = 37^0\,57'{\cdot}9.$

Резултате ћемо проверити помоћу обрасца

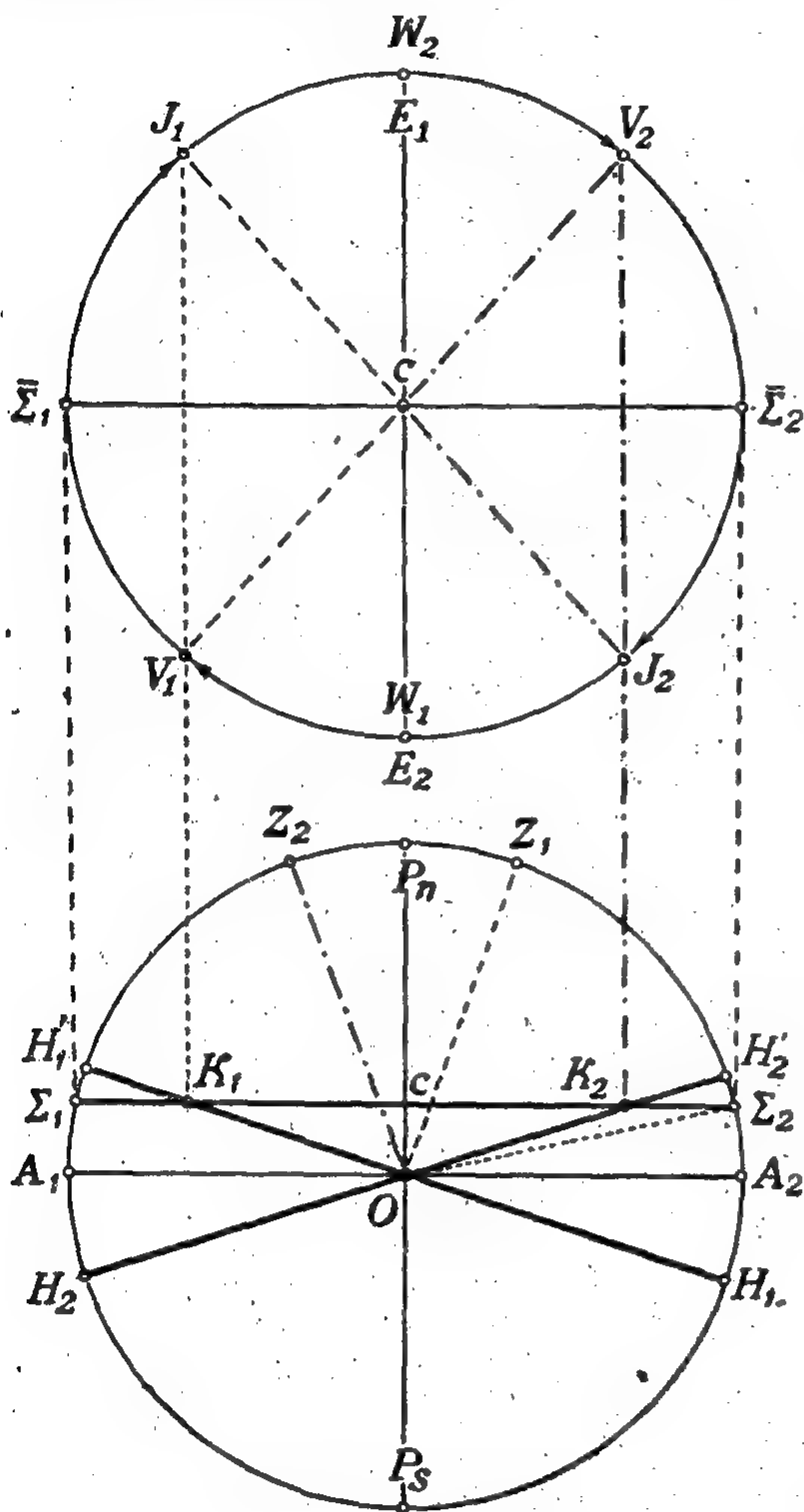
$$\cos h \cos A \cos M = \cos\delta \cos H \sin(\varphi - M).$$

$[\cos h_1]$	$9{\cdot}39\,605,$	$[\cos\delta]$	$9{\cdot}84\,212,$
$[\cos A_1]$	$9{\cdot}31\,304\,n,$	$[\cos H_1]$	$9{\cdot}97\,154,$
$[\cos M_1]$	$9{\cdot}82\,695,$	$[\sin(\varphi_1 - M_1)]$	$8{\cdot}72\,240\,n,$
	$S_1 = 8{\cdot}53\,604\,n;$		$S_1 = 8{\cdot}53\,606\,n;$
$[\cos h_2]$	$9{\cdot}89\,674,$	$[\cos\delta]$	$9{\cdot}84\,212,$
$[\cos A_2]$	$9{\cdot}72\,496\,n,$	$[\cos H_2]$	$9{\cdot}44\,144,$
$[\cos M_2]$	$9{\cdot}41\,196,$	$[\sin(\varphi_2 - M_2)]$	$9{\cdot}75\,010\,n,$
	$S_2 = 9{\cdot}03\,366\,n;$		$S_2 = 9{\cdot}03\,366\,n.$

110. *Графичко решење.* Претставимо на сл. 62: кружном линијом $P_nA_2P_sA_1P_n$ — меридијан посматрача M_1 и M_2; њеним пречницима P_nP_s и A_2A_1 — светску осу, односно пројекцију небеског екватора на меридијанску раван; тетивом $\Sigma_1\Sigma_2$ — пројекцију, на меридијанску раван, паралела звезде α Leonis, чија је деклинација $\delta = +12^0\,11'\,20'' = \sphericalangle A_2O\Sigma_2$.

Обрнимо сад раван паралела за 90^0, око његова пречника $\Sigma_1\Sigma_2$, тако да падне у посматрачеву меридијанску раван. Да слика не би ис-

пала утрпана, приказан је одвојено паралел у меридијанској равни, горњим кругом $\overline{\Sigma}_1 E_1 (W_2) \overline{\Sigma}_2 W_1 (E_2)$, са средиштем c.



Сл. 62.

Према задатку, посматрачи се налазе симетрично и према равни нормалној на меридијанској, дакле према равни чију пројекцију претставља пречник паралела $E_1 (W_2) c W_1 (E_2)$. Значи, ово ће бити раван симетрије и за паралел и кретање звезде. Сем тога, времена излазâ, а тако исто и залазâ, код посматрачâ разликују се, у овом случају, за по 12^h звезданог времена. Значи, ако, рецимо, J_1 и V_1 претстављају на паралелу положаје звезде у тренуцима излаза, односно залаза, за првог посматрача, онда ће J_2 и V_2 претстављати положаје на паралелу звезде у тренуцима излаза, односно залаза, за другог посматрача.

Према задатку, од излаза звезде код првог до залаза њена код другог посматрача протекне $5^h\ 30^m$ звезданог времена. То значи да угао $J_1 c V_2$, који је једнак углу $J_2 c V_1$, износи, у временој мери, $5^h 30^m$, то јест $82^0\ 30'$. Или, $\sphericalangle J_1 c E_1 = \sphericalangle W_2 c V_2 = \sphericalangle J_2 c W_1 = \sphericalangle E_2 c V_1 = 41^0\ 15'$.

Према томе, задатак се графички овако решава. Опише се око O кружна линија $P_n A_2 P_s A_1 P_n$. Од OA_2 (или OA_1) нанесе се, са стране северног небеског пола (пошто је позитивна) деклинација звезде $\delta = \sphericalangle A_2 O \Sigma_2 = +12^0\ 11'\ 20''$ и повуче тетива $\Sigma_1 \Sigma_2$. Она претставља пројекцију паралела звезде на меридијанску раван посматрача. Пренесимо тетиву $\Sigma_1 \Sigma_2$ у $\overline{\Sigma}_1 \overline{\Sigma}_2$ и опишимо над њом, као пречником, кружну линију $\overline{\Sigma}_1 E_1 (W_2) \overline{\Sigma}_2 W_1 (E_2) \overline{\Sigma}_1$, са средиштем c. Овај круг претставља небески паралел који описује уочена звезда. Нанесимо сад, са обе стране пречника $E_1 W_1 (W_2 E_2)$, углове од по $42^0\ 15'$. Добићемо на паралелу тачке J_1, V_2, J_2 и V_1. Пројицирајмо их на пројекцију паралела $\Sigma_1 \Sigma_2$ на меридијанску раван. Тако добивамо тачке K_1 и K_2: оне претстављају пројекције положајâ звезде у тренуцима њена излаза, односно залаза, за једног, односно другог посматрача. Према томе оне претстављају и пројекције тачака хоризоната двају посматрача, наиме тачака излаза и залаза звезде. Повлачењем кроз те тачке пречникâ $H_1 H_1'$ и $H_2 H_2'$ добивамо пројекције хоризоната једног и другог посматрача на њихову меридијанску раван. Тиме је одређен $\sphericalangle H_1' O P_n = \sphericalangle H_2' O P_n = \varphi$, то јест одређена је географска ширина посматрача. Са слике и у овако малој размери читамо за φ вредност $72^0 {\cdot} 5$. OZ_1 и OZ_2 претстављају вертикале посматрачâ.

Нумеричко решење. Напред је показано зашто је $\sphericalangle W_1 c V_1 = \sphericalangle J_2 c W_1 = 2^h\ 45^m$; значи да је ноћни лук звезде, то јест $\sphericalangle V_1 c J_1$, једнак $12^h -$

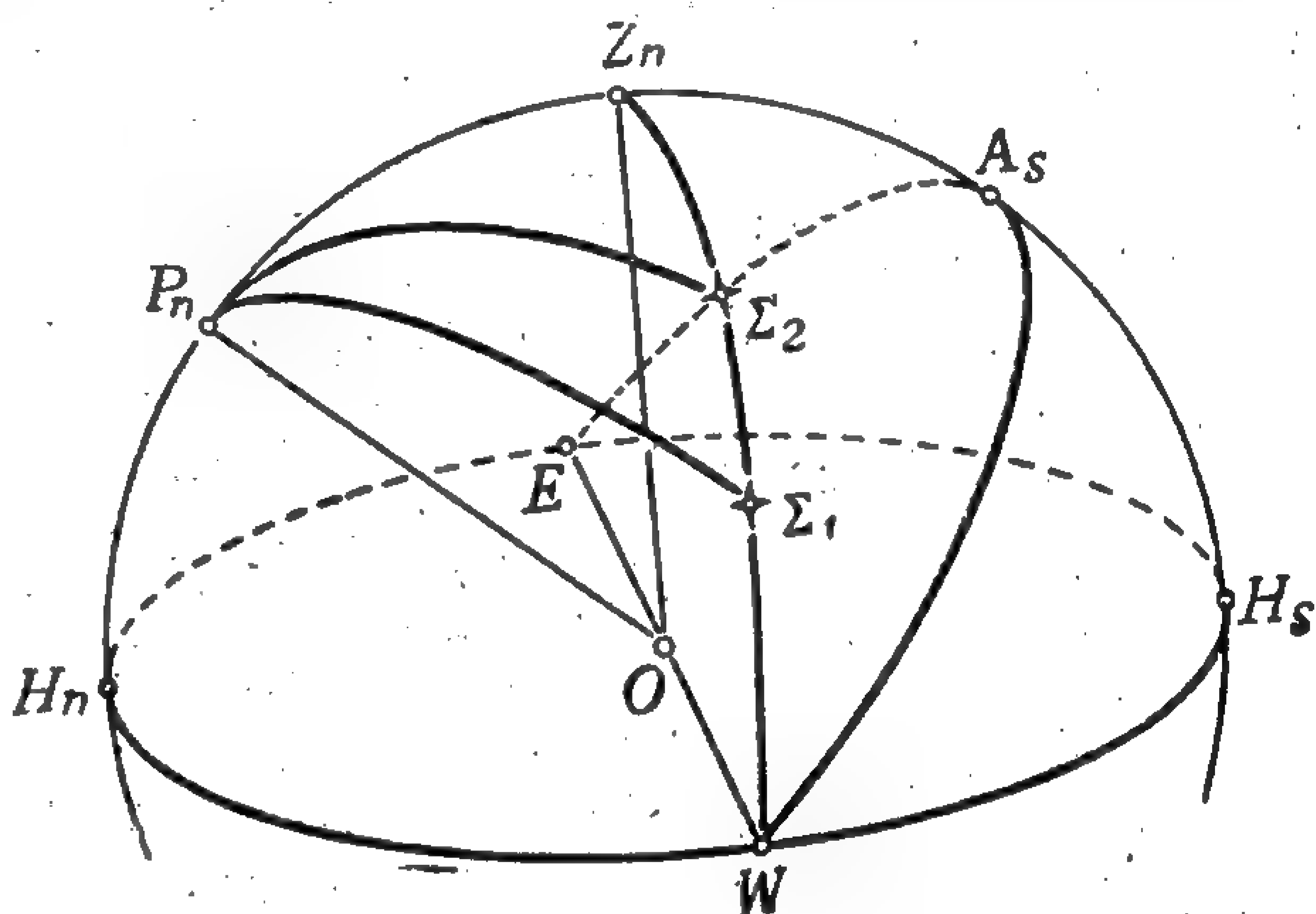
$-2\times 2^h\,45^m = 6^h\,30^m$. Према томе дневни лук звезде износи $24^h - 6^m\,30^m = 17^h\,30^m$. Онда полудневни — означићемо га са H — износи $8^h\,45^m$. За полудневни лук некретнице имамо, међутим,

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta, \quad \text{или, одавде,} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\cos H\operatorname{ctg}\delta.$$

Тако да са величинама задатка налазимо

$[\operatorname{ctg}\delta]$	$0{\cdot}66\,554\,n$,
$[-\cos H]$	$9{\cdot}81\,911\,n$,
$[\operatorname{tg}\varphi]$	$0{\cdot}48\,465$, или за географску ширину, $\varphi = +71^\circ\,51'{\cdot}7$.

111. Претставимо на сл. 63: тачком P_n – северни пол; луком великог круга EA_sW – део небеског екватора; са Z_n — посматрачев зенит; са H_sH_n — посматрачев хоризонт; са Σ_1 и Σ_2 — положаје уочених некретница, при њихову пролазу кроз посматрачев први вертикал (западни).



Сл. 63.

Означимо: са z_1 и z_2 зенитске даљине звезда̂ Σ_1 и Σ_2, а са A_1 и A_2 њихове азимуте; са δ_1 и δ_2 деклинације звезда̂, а са H_1 и H_2 часовне углове сваке од њих, у тренутку пролаза кроз први вертикал.

Ако приметимо да је, према задатку, $A_1 = A_2 = 90^\circ$, имаћемо

$$\cos z_1 = \sin\delta_1 \operatorname{cosec}\varphi, \qquad \cos z_2 = \sin\delta_2 \operatorname{cosec}\varphi,$$

$$\cos H_1 = \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{ctg}\varphi; \qquad \cos H_2 = \operatorname{tg}\delta_2 \operatorname{ctg}\varphi.$$

Из ових образаца можемо израчунати зенитске даљине и часовне углове звезда. Но претходно ћемо те обрасце трансформисати, како бисмо вредности непознатих углова добили изражене помоћу тангенса. Ако те трансформације извршимо, имаћемо

$$\frac{1-\cos z}{1+\cos z} = \frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{2\cos^2\frac{z}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \frac{\sin\varphi - \sin\delta}{\sin\varphi + \sin\delta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\delta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi+\delta).$$

$$\frac{1-\cos H}{1+\cos H} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}H}{2\cos^2\frac{1}{2}H} = \operatorname{tg}^2\frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta} = \sin(\varphi-\delta)\operatorname{cosec}(\varphi+\delta).$$

Према овим обрасцима имаћемо:

$$\delta_1 = +10^\circ 20' 30'', \qquad \begin{cases} \varphi - \delta_1 = 34^\circ 27' 43'', \\ \varphi + \delta_1 = 55 \;\; 8 \;\; 43, \end{cases} \qquad \frac{1}{2}(\varphi - \delta_1) = 17^\circ 13' 52'',$$

$$\varphi = +44 \;\; 48 \;\; 13, \qquad \begin{cases} \varphi - \delta_2 = 15 \;\; 19 \;\; 46, \\ \varphi + \delta_2 = 74 \;\; 16 \;\; 40; \end{cases} \qquad \frac{1}{2}(\varphi + \delta_1) = 27 \;\; 34 \;\; 22,$$

$$\delta_2 = +29 \;\; 28 \;\; 27; \qquad \frac{1}{2}(\varphi - \delta_2) = \;\; 7 \;\; 39 \;\; 53,$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + \delta_2) = 37 \;\; 8 \;\; 20;$$

	$*\Sigma_1$:	$*\Sigma_2$:		$*\Sigma_1$:	$*\Sigma_2$:
$[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi - \delta)]$	9·49 157,	9·12 898,	$[\sin(\varphi - \delta)]$	9·75 271,	9·42 221,
$[\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}(\varphi + \delta)]$	0·28 218,	0·12 069,	$[\mathrm{cosec}\,(\varphi + \delta)]$	0·08 587,	0·01 656,
$2\,[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} z]$	9·77 375,	9·24 967,	$2\,[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} H]$	9·83 858,	9·43 877,
$[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} z]$	9·88 688,	9·62 484,	$[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2} H]$	9·91 929,	9·71 939,
$\frac{1}{2} z_{1,2} =$	$37^\circ 37' 16''$,	$22^\circ 51' 27''$,	$\frac{1}{2} H_{1,2} =$	$39^\circ 42' 23''$,	$27^\circ 39' 28''$,
$z_{1,2} =$	75 14 32;	45 42 54;	$H_{1,2} =$	79 24 46;	55 18 56.

Како се звезде налазе на истом великом кругу, у првом вертикалу, њихова угловна даљина (σ) једнака је разлици њихових зенитских даљина, дакле

$$\sigma = z_1 - z_2 = 75^\circ 14' 32'' - 45^\circ 42' 54'' = 29^\circ 31' 38''.$$

Разлику ректасцензија звездâ, која се још у задатку тражи, добићемо из познатих веза

$$t = H_1 + \alpha_1, \quad t = H_2 + \alpha_2.$$

Одузимањем добивамо

$$H_1 - H_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = 24^\circ 5' 50'' = 1^h 36^m 23^s{\cdot}3.$$

Да се могу одредити ректасцензије посматраних некретница требало би, пошто су часовни углови њихови познати, знати тренутак (t) посматрања, то јест пролаза ових звезда кроз први вертикал.

За проверавање нумеричког рада комбиноваћемо други од полазних образаца са обрасцем

$$\sin H = \sin z \sec \delta,$$

који постоји међу елементима сферног троугла $P_n Z_n \Sigma$ кад се звезда налази у првом вертикалу. Из тих двају образаца добивамо за везу која постоји међу како датим тако и израчунатим елементима

$$\operatorname{tg} H = \sin z \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} \delta.$$

И добивамо		за Σ_1:	за Σ_2:
	$[\sin z]$	9·98 543,	9·85 484,
	$[\operatorname{tg} \varphi]$	9·99 702,	9·99 702,
	$[\operatorname{cosec} H]$	0·74 589,	0·30 801,
контр.	$[\operatorname{tg} H]$	0·72 834,	0·15 987,
израчуната вр.	$[\operatorname{tg} H]$	0·72 836;	0·15 987.

112. 1. У тренутку пролаза некретнице кроз први вертикал (западни) имамо, са уобичајеним ознакама, везу

$$\cos H = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{то јест} \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \sec H.$$

Одавде одређујемо тражену географску ширину, јер су у задатку дати и звездано време (t) пролаза звезде кроз први вертикал и координате звезде; а, на основи тога, постаје познато и $H = t - \alpha$.

2. Диференцирајући прву од горњих једначина, добивамо

$$-\sin H\, dH = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec}^2 \varphi\, d\varphi_H,$$

а одавде,
$$d\varphi_H = \sin H \operatorname{ctg} \delta \sin^2 \varphi\, dH,$$

то јест тражену грешку $d\varphi_H$, у географској ширини, коју би произвела грешка $dH = dt$ у процењеном тренутку пролаза звезде кроз први вертикал.

3. За одређивање грешке у географској ширини, $d\varphi_A$, коју би изазвала грешка dA, у азимуту првог вертикала, користићемо образац у којем се не појављује зенитска даљина звезде, јер ову не познајемо. Послужићемо се, дакле, обрасцем

$$\cos \varphi \operatorname{tg} \delta = \cos H \sin \varphi - \operatorname{ctg} A \sin H.$$

Ако га диференцирамо, сматрајући сад као променљиве φ и A, имаћемо

$$-(\sin \varphi \operatorname{tg} \delta + \cos H \cos \varphi)\, d\varphi_A = \sin H \operatorname{cosec}^2 A\, dA.$$

У другом члану на левој страни можемо извршити смену

$$\cos H = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varphi,$$

а, на десној страни, узећемо у обзир да је, према задатку, $A = \frac{\pi}{2}$, те ће бити

$$-\operatorname{tg} \delta (\sin \varphi + \cos^2 \varphi \operatorname{cosec} \varphi)\, d\varphi_A = \sin H\, dA,$$

то јест
$$d\varphi_A = -\sin H \operatorname{ctg} \delta \sin \varphi\, dA.$$

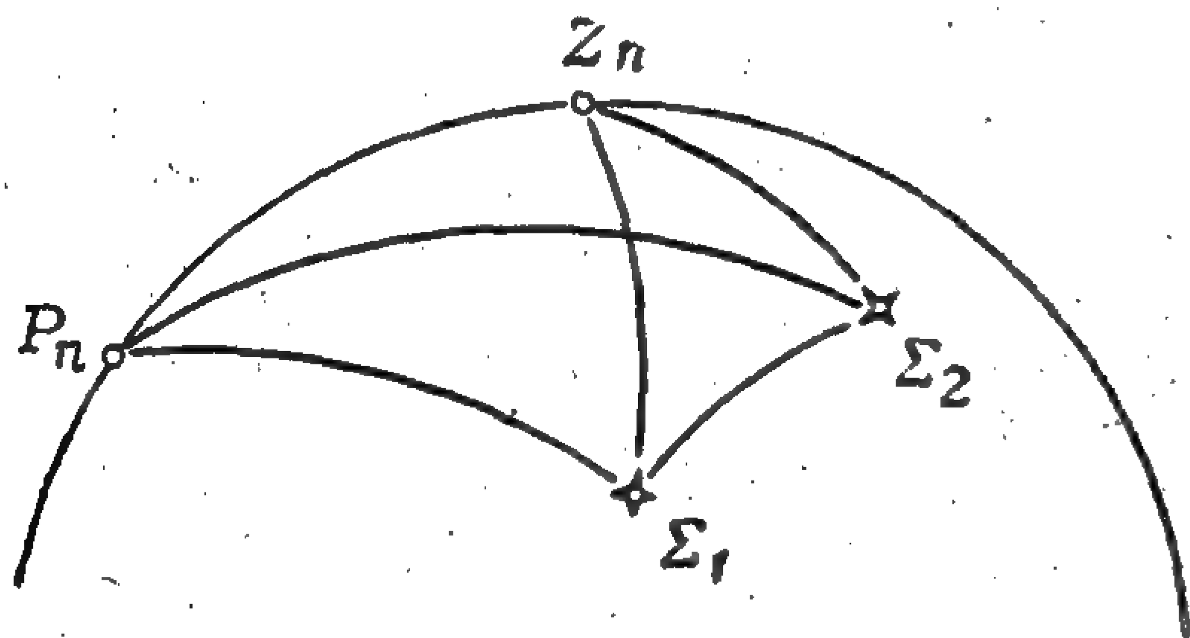
Из нађених израза за грешке видимо да је

$$\frac{d\varphi}{dH} = -\frac{d\varphi}{dA}\sin\varphi.$$

Ову везу ћемо користити да поједноставимо нумерички рад око израчунавања њихових вредности. А како су то мале величине, можемо се задовољити при њихову израчунавању и мањим бројем децимала.

Имаћемо, дакле:

$\delta =$	$+31^\circ 59' 13''$,	[tg δ]	9·79557,	[sin H]	9·891,	[sin φ]	9·848,
$t =$	$10^h 55^m 56^s\cdot5$,	[sec H]	0·20146,	[ctg δ]	0·204,	[$-d\varphi_A$]	9·943,
$\alpha =$	7 31 48·0,	[tg φ]	9·99703,	[sin φ]	9·848,	[dH]	1·176,
$H =$	3 24 8·5,	$\varphi = +44^\circ 48' 14''$;		[$-d\varphi_A$]	9·943,	[$d\varphi_H$]	0·967,
$H =$	$51^\circ\ 2'\ 8''$;			$d\varphi_A = -0''\cdot9$;		$d\varphi_H = +9''\cdot3$.	



Сл. 64.

113. Претставимо на сл. 64 посматране некретнице са Σ_1 и Σ_2, и означимо посматране зенитске даљине, $Z_n\Sigma_1$ и $Z_n\Sigma_2$, са z_1, односно z_2; а углове $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ и $\Sigma_1\Sigma_2P_n$ са Q_1, односно Q_2.

У сферном троуглу $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ позната су нам, према задатку, три елемента: две стране и угао међу њима. Можемо, дакле, одредити преостала два угла у њему. Помоћу Неперових аналогија имамо

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(Q_1+Q_2) &= \cos\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1), \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(Q_1-Q_2) &= \sin\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\sec\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1). \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Помоћу Неперових аналогија одредићемо и страну $\sigma = \Sigma_1\Sigma_2$, заједничку сферним троугловима $P_n\Sigma_1\Sigma_2$ и $Z_n\Sigma_1\Sigma_2$, наиме помоћу образаца

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma &= \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\cos\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)\sec\frac{1}{2}(Q_1-Q_2), \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\sin\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(Q_1-Q_2). \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

На овај начин, то јест одређујући σ помоћу оба ова обрасца, уједно и проверавамо и σ и претходни нумерички рад.

Сад у сферном троуглу $Z_n\Sigma_1\Sigma_2$ познајемо све три стране. Можемо, значи, одредити углове $Z_n\Sigma_1\Sigma_2$ и $\Sigma_1\Sigma_2Z_n$, које ћемо означити са U_1 и U_2, Одредићемо их помоћу

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}U_1 &= \sin(s-z_1)\sin(s-\sigma)\operatorname{cosec}s\operatorname{cosec}(s-z_2), \\ \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}U_2 &= \sin(s-z_2)\sin(s-\sigma)\operatorname{cosec}s\operatorname{cosec}(s-z_1), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

где је стављено $$s=\frac{1}{2}(z_1+z_2+\sigma).$$

Израчунавањем последња два угла, U_1 и U_2, долазимо и до вредности паралактичких углова

$$q_1=Q_1-U_1 \qquad \text{и} \qquad q_2=U_2-Q_2.$$

Пошто су нам сад познати и углови q_1 и q_2, можемо одредити углове H_1 и A_1, из сферног троугла $P_n\Sigma_1\Sigma_2$, помоћу Неперових аналогија. Уведемо ли, место деклинацијâ, поларне даљине, p_1 и p_2 (ради краћег писања), имаћемо

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_1-H_1) &= \cos\frac{1}{2}(p_1-z_1)\sec\frac{1}{2}(p_1+z_1)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}q_1, \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_1+H_1) &= \sin\frac{1}{2}(p_1-z_1)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(p_1+z_1)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}q_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

А помоћу ових углова, опет користећи Неперове аналогије, налазимо

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi\right)=\sin\frac{1}{2}(A_1-H_1)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A_1+H_1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p_1+z_1). \qquad \text{(V)}$$

Одредивши тако H_1, добићемо тражено звездано време (t) посматрања из $t=H_1+\alpha_1$, поред посматрачеве географске ширине, коју добивамо из последње једначине.

Сав нумерички рад може се проверити на тај начин што се, из сферног троугла $P_n\Sigma_2Z_n$, одреде лукови A_2 и H_2, а, затим, још једном вредност φ. Звездано време које се добива из $H_2+\alpha_2=t$ треба такође да се подудара са горе нађеном вредношћу.

Са подацима задатка имаћемо, према томе,

$$\delta_1=+31^\circ 59' 14'', \qquad \delta_1-\delta_2=19^\circ 48' 15'', \qquad \frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)=9^\circ 54' 8'',$$

$$\delta_2=+12\ \ 10\ \ 59\ ; \qquad \delta_1+\delta_2=44\ \ 10\ \ 13\ ; \qquad \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)=22\ \ 5\ \ 7;$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)=19^\circ 16' 47'';$$

(I) $\left[\cos\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\right]$ 9·99 348, $\left[\sin\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\right]$ 9·23 545,

$\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\right]$ 0·42 482, $\left[\sec\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\right]$ 0·03 310,

$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]$ 0·45 619, $\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]$ 0·45 619,

$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)\right]$ 0·87 449; $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(Q_1-Q_2)\right]$ 9·72 474;

$\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)=82^\circ 23' 44''$, $Q_1=110^\circ 20' 40''$,

$\frac{1}{2}(Q_1-Q_2)=27\ 56\ 56$, $Q_2=54\ 26\ 48$.

(II) $\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\right]$ 9·39 173, $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\right]$ 9·24 196,

$\left[\cos\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)\right]$ 9·12 167, $\left[\sin\frac{1}{2}(Q_1+Q_2)\right]$ 9·99 616,

$\left[\sec\frac{1}{2}(Q_1-Q_2)\right]$ 0·05 386, $\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(Q_1-Q_2)\right]$ 0·32 912,

$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma\right]$ 9·56 726, $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma\right]$ 9·56 724,

$\frac{1}{2}\sigma=20^\circ 15' 50''$, $\frac{1}{2}\sigma=20^\circ 15' 48''$,

$\sigma=40\ 31\ 40$; $\sigma=40\ 31\ 36$.

(III) $z_1=46^\circ 57' 16''$, $s=62^\circ 15' 27''$,

$\sigma=40\ 31\ 40$; $s-z_1=15\ 18\ 11$, $[\sin(s-\sigma)]$ 9·56 847,

$z_2=37\ 1\ 58$, $s-\sigma=21\ 43\ 47$, $[\operatorname{cosec}\sigma]$ 0·05 303,

$2s=124\ 30\ 54$; $s-z_2=25\ 13\ 29$; S_σ 9·62 150;

$[\sin(s-z_1)]$	9·42 149,	$[\sin(s-z_2)]$	9·62 958,	$\frac{1}{2}U_1=26^\circ 58' 30''$,
$[\operatorname{cosec}(s-z_2)]$	0·37 042,	$[\operatorname{cosec}(s-z_1)]$	0·57 851,	$\frac{1}{2}U_2=39\ \ 24\ \ 53$;
S_σ	9·62 150,	S_σ	9·62 150,	
$2\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}U_1\right]$	9·41 341,	$2\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}U_2\right]$	9·82 959,	$U_1=53^\circ 57'\ \ 0''$,
$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}U_1\right]$	9·70 670;	$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}U_2\right]$	9·91 479;	$U_2=78\ \ 49\ \ 46$.

(IV) $Q_1=110^\circ 20' 40''$, $U_2=78^\circ 49' 46''$, $q_1=56^\circ 23' 40''$,
$U_1=\ 53\ \ 57\ \ \ 0$; $Q_2=54\ \ 26\ \ 48$; $q_2=24\ \ 22\ \ 58$;

$p_1=\ 58^\circ\ \ 0' 46''$,	$p_2=\ 77^\circ 49'\ \ 1''$,
$z_1=\ 46\ \ 57\ \ 16$,	$z_2=\ 37\ \ \ 1\ \ 58$,
$p_1-z_1=\ 11\ \ \ 3\ \ 30$,	$p_2-z_2=\ 40\ \ 47\ \ \ 3$,
$p_1+z_1=104\ \ 58\ \ \ 2$;	$p_2+z_2=114\ \ 50\ \ 59$;
$\frac{1}{2}(p_1-z_1)=\ 5^\circ 31' 45''$,	$\frac{1}{2}(p_2-z_2)=20^\circ 23' 32''$,
$\frac{1}{2}(p_1+z_1)=52\ \ 29\ \ \ 1$;	$\frac{1}{2}(p_2+z_2)=57\ \ 25\ \ 30$;
$\frac{1}{2}q_1=28\ \ 11\ \ 50$;	$\frac{1}{2}q_2=12\ \ 11\ \ 29$;

$\left[\cos\frac{1}{2}(p_1-z_1)\right]$	9·99 797,	$\left[\cos\frac{1}{2}(p_2-z_2)\right]$	9·97 189,
$\left[\sec\frac{1}{2}(p_1+z_1)\right]$	0·21 539,	$\left[\sec\frac{1}{2}(p_2+z_2)\right]$	0·26 889,
$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}q_1\right]$	0·27 073,	$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}q_2\right]$	0·66 544,
$\left[\sin\frac{1}{2}(p_1-z_1)\right]$	8·98 386,	$\left[\sin\frac{1}{2}(p_2-z_2)\right]$	9·54 213,
$\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(p_1+z_1)\right]$	0·10 063,	$\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(p_2+z_2)\right]$	0·07 433,
$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_1-H_1)\right]$	0·48 409,	$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_2-H_2)\right]$	0·90 622,
$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_1+H_1)\right]$	9·35 522;	$\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A_2+H_2)\right]$	0·28 190;

(V) $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p_1+z_1)\right]$ 0·11 476, $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p_2+z_2)\right]$ 0·19 456,

$\left[\sin\frac{1}{2}(A_1-H_1)\right]$ 9·49 372, $\left[\sin\frac{1}{2}(A_2-H_2)\right]$ 0·09 047,

$\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A_1+H_1)\right]$ 0·01 087, $\left[\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A_2+H_2)\right]$ 0·33 432,

$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right]$ 9·61 935; $\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right]$ 9·61 935;

$$\frac{1}{2}\psi=22^0\,35'\,59''.$$

Према томе добивамо: $90^0-\varphi=\psi=45^0\,11'\,58''$, дакле $\varphi=+44^0\,48'\,2''$;

А за t: $t=H_1+\alpha_1=3^h\,56^m\,17^s{\cdot}47+\ 1^h\,22^m\,3^s{\cdot}13=11^h\,28^m\,5^s{\cdot}67$;

$t=H_2+\alpha_2=1\ \ 22\ \ \ 3\cdot13+10\ \ \ 6\ \ 2\cdot4\ \ =11\ \ 28\ \ 5\cdot53.$

114. Претставимо на сл. 69 са Σ_1 и Σ_2 положаје некретница у тренутку кад се нађу на истом алмукантару, зенитске даљине $Z_n\Sigma_1=Z_n\Sigma_2=z$. Из њихових положајних сферних троуглова, $P_n\Sigma_1Z_n$ и $P_n\Sigma_2Z_n$, имамо, у том тренутку (са уобичајеним ознакама),

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1\cos H_1=$$
$$=\sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2\cos H_2$$

Сем тога је $\quad t_1=H_1+\alpha_1=H_2+\alpha_2$.

Из тих једначина одредићемо t и z, пошто претходно одредимо H_1 и H_2; управо, пошто одредимо H_1+H_2, јер је $H_1-H_2=\alpha_2-\alpha_1$ дато.

Сл. 65.

Тога ради ћемо, пре свега, полазне једначине трансформисати. Ако их, наиме, напишемо

$$\sin\varphi\,(\sin\delta_1-\sin\delta_2)+\cos\varphi\,(\cos\delta_1\cos H_1-\cos\delta_2\cos H_2)=0,$$

па уведемо ознаке:

$\delta_1-\delta_2=2\,d$, дакле $d=\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)$, и $H_1-H_2=2\,\tau$, дакле $\tau=\frac{1}{2}(H_1-H_2)$,

$\delta_1+\delta_2=2\,D$, дакле $D=\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)$; $H_1+H_2=2\,T$, дакле $T=\frac{1}{2}(H_1+H_2)$;

те ће сад бити: $\delta_1=D+d$, $\quad H_1=T+\tau$,

$\delta_2=D-d$; $\quad H_2=T-\tau$;

онда претходна једначина постаје:

$$2 \sin \varphi \cos D \sin d + \cos \varphi \left[\cos (D+d) \cos (T+\tau) - \cos (D-d) \cos (T-\tau)\right] = 0.$$

Ако члан у загради развијемо и уредимо, имаћемо

$$\sin \varphi \cos D \sin d = \cos \varphi (\sin D \sin d \cos T \cos \tau + \cos D \cos d \sin T \sin \tau) = 0.$$

Поделимо ли обе стране производом $\cos \varphi \cos D \sin d$, имаћемо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} D \cos T \cos \tau + \operatorname{ctg} d \sin T \sin \tau.$$

Ако још поделимо обе стране чиниоцем поред $\sin T$ и ставимо

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} D \operatorname{tg} d \operatorname{ctg} \tau, \tag{1}$$

добићемо горњу једначину у облику

$$\operatorname{tg} \psi \cos T + \sin T = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} d \operatorname{cosec} \tau,$$

а одатле

$$\sin (\psi + T) = \cos \psi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} d \operatorname{cosec} \tau. \tag{2}$$

Одавде налазимо $T = H_1 + H_2$, па, дакле, и саме часовне углове, H_1 и H_2, јер нам је познато $H_1 - H_2$. Помоћу њих одређујемо тренутак (t) звезданог времена у који звезде Σ_1 и Σ_2 стижу на зенитску даљину z.

Остаје још да одредимо после колико ће звезданог времена, од тренутка t, разлика висинâ ових звезда достићи 1″. Тога ради диференцираћемо полазне једначине, и добићемо

$$\sin z_1 dz_1 = \cos \varphi \cos \delta_1 \sin (t_1 - \alpha_1) dt_1,$$

$$\sin z_2 dz_2 = \cos \varphi \cos \delta_2 \sin (t_2 - \alpha_2) dt_2.$$

Одавде имамо

$$\left.\begin{aligned} dt_1 &= \sin z_1 \sec \varphi \sec \delta_1 \operatorname{cosec} (t_1 - \alpha_1) dz_1, \\ dt_2 &= \sin z_2 \sec \varphi \sec \delta_2 \operatorname{cosec} (t_2 - \alpha_2) dz_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

У нашем случају је $z_1 = z_2$, јер се звезде налазе на истој зенитској даљини, коју одређујемо из положајних сферних троуглова $P_n\Sigma_1Z_n$ и $P_n\Sigma_2Z_n$. А промене у зенитским даљинама, dz_1 и dz_2, узећемо једнаке 1″. Тако ћемо из последњих једначина добити промене звезданог времена, dt_1 и dt_2, за које свака од звезда промени своју зенитску даљину за 1″.

Из последњих двеју једначинâ, које су облика

$$dt = m_1 dz_1, \text{ односно } dt = m_2 dz_2,$$

а које ћемо написати у облику

$$dz_1 = \frac{1}{m_1} dt, \text{ односно } dz_2 = \frac{1}{m_2} dt,$$

налазимо

$$dt = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} (dz_1 - dz_2) \tag{4}$$

Стављајући $dz_1 - dz_2 = 1''$, добивамо промену звезданог времена у току којег разлика зенитских даљина уочених звезда, по њихову пролазу кроз алмукантар зенитске даљине z, достиже $1''$.

Према томе ћемо са подацима задатка имати:

$$\begin{array}{llll}
\delta_1 = +67^\circ\,36'\,31'', & 2\,d = 25^\circ\,18'\ \ 3'', & d = 12^\circ\,39'\ \ 2'', & \alpha_1 = 23^\circ\,59'\,18'', \\
\delta_2 = +42\ \ 18\ \ 28; & 2\,D = 109\ \ 54\ \ 59; & D = 54\ \ 57\ \ 30; & \alpha_2 = 54\ \ 50\ \ 12, \\
 & & & \alpha_2 - \alpha_1 = 30\ \ 50\ \ 54; \\
 & & & \tau = 15\ \ 25\ \ 27.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll|llll}
(1) & [\mathrm{tg}\,D] & 0{\cdot}15\,410, & (2) & [\mathrm{tg}\,\varphi] & 9{\cdot}87\,392, & \\
 & [\mathrm{tg}\,d] & 9{\cdot}35\,113, & & [\mathrm{tg}\,d] & 9{\cdot}35\,113, & \\
 & [\mathrm{ctg}\,\tau] & 0{\cdot}55\,925, & & [\mathrm{cosec}\,\tau] & 0{\cdot}57\,518, & \\
 & [\mathrm{tg}\,\psi] & 0{\cdot}06\,448, & & S & 9{\cdot}80\,023, & 9{\cdot}80\,023, \\
 & \psi_1 = & 49^\circ\,14'\,16'', & & [\cos\psi] & 9{\cdot}81\,486, & 9{\cdot}81\,486\,n, \\
 & \psi_2 = & 229\ \ 14\ \ 16; & & [\sin(\psi + T)] & 9{\cdot}61\,509; & 9{\cdot}61\,509\,n;
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrllll}
(2) & \psi + T = & 24^\circ\,30'\,32'', & 155^\circ\,39'\,28'', & 204^\circ\,20'\,32'', & 335^\circ\,39'\,28'', \\
 & \psi = & 49\ \ 14\ \ 16, & 49\ \ 14\ \ 16, & 229\ \ 14\ \ 16, & 229\ \ 14\ \ 16, \\
 & T = H_1 + H_2 = & 335\ \ \ 6\ \ 16, & 106\ \ 25\ \ 12, & 335\ \ \ 6\ \ 16; & 106\ \ 25\ \ 12; \\
 & \tau = & 15\ \ 25\ \ 27, & 15\ \ 25\ \ 27, & & \\
 & T + \tau = H_1 = & 350\ \ 21\ \ 41, & 121\ \ 50\ \ 39, & t_1 = \ 14^\circ\,30'\,59'', & 14^\circ\,30'\,59''; \\
 & \alpha_1 = & 23\ \ 59\ \ 18; & 23\ \ 59\ \ 18; & & \\
 & T - \tau = H_2 = & 319\ \ 40\ \ 47, & 90\ \ 59\ \ 45, & t_2 = 145\ \ 49\ \ 57, & 145\ \ 49\ \ 57; \\
 & \alpha_2 = & 54\ \ 50\ \ 12; & 54\ \ 50\ \ 12; & &
\end{array}$$

или $\quad t_1 = 0^h\,58^m\,3^s{\cdot}9 \quad$ и $\quad t_2 = 9^h\,43^m\,19^s{\cdot}8.$

(2^b) Сад пре него што бисмо приступили израчунавању променâ помоћу (3), треба да израчунамо зенитску даљину, z. Израчунаћемо је је за тренутак t_2, помоћу обрасца

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H.$$

Имамо

	за Σ_1	за Σ_2
$\sin\varphi\sin\delta =$	$0{\cdot}55\,382,$	$0{\cdot}40\,318,$
$\cos\varphi\cos\delta\cos H =$	$-\,0{\cdot}16\,094,$	$-\,0{\cdot}01\,029;$
$\cos z =$	$0{\cdot}39\,288;$	$0{\cdot}39\,289;$ дакле $z = 66^\circ\,51'\,58''.$

					$*\Sigma_1$	$*\Sigma_2$
(3)	[$\sin z$]	9·96 360,		[$\sec\delta$]	0·41 915,	0·13 104,
	[$\sec\varphi$]	0·09 650,		[$\operatorname{cosec}(t_1-\alpha_1)$]	0·07 084,	0·00 007,
	[F]	0·06 010;		[F]	0·06 010,	0·06 010,
				[dt]	0·55 009,	0·19 121,
					$dt = 3^s{\cdot}55$;	$1^s{\cdot}55$;

Значи, звезда Σ_1 промени своју зенитску даљину за 1″ за $3^s{\cdot}55$, док звезда Σ_2 своју промени за $1^s{\cdot}55$, наравно, при пролазу кроз алмукантар z.

Ограничимо ли се на само овако мале промене и размаке, моћи ћемо узети и да су

$$dz_1 = \frac{1}{3{\cdot}55}\,dt \qquad \text{и} \qquad dz_2 = \frac{1}{1{\cdot}55}\,dt,$$

дакле

$$dz_2 - dz_1 = 1'' = \left(\frac{1}{1{\cdot}55} - \frac{1}{3{\cdot}55}\right)dt.$$

Одавде налазимо да је $dt = 2^s{\cdot}75$; другим речима, разлика зенитских даљина звезда Σ_1 и Σ_2 достићи ће 1″ након $2^s{\cdot}75$ звезданог времена по њихову пролазу кроз алмукантар $z = 66^\circ 51' 58''$ посматрача на географској ширини φ.

115. 1. Претставимо на сл. 66 положаје посматраних некретница Σ_1 и Σ_2, у размаку τ звезданог времена, на истој висини (h). Са (Σ_1) означен је положај прве звезде у тренутку кад је друга, Σ_2, била на висини h, а са (Σ_2) означен положај друге кад је, након τ звезданог времена, и прва звезда, Σ_1, доспела на висину h.

Сл. 66.

Означимо часовни угао $Z_n P_n \Sigma_2$ са H_1, онда је часовни угао $Z_n P_n \Sigma_1 = H_2 = H_1 + \tau$. Ако још зенитску даљину алмукантара $\Sigma_1\Sigma_2$ означимо са z, имаћемо са уобичајеним ознакама

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1\cos H_1,$$

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta_2 + \cos\varphi\cos\delta_2\cos(H_1+\tau).$$

Елиминишимо $\cos z$ и развијмо други члан друге једначине, па ћемо имати

$$\sin\varphi\sin\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1\cos H_1 = \sin\varphi\sin\delta_2 + \\ + \cos\varphi\cos\delta_2\cos H_1\cos\tau - \cos\varphi\cos\delta_2\sin H_1\sin\tau,$$

то јест

$$\sin\varphi(\sin\delta_1 - \sin\delta_2) = \cos\varphi[\cos H_1(\cos\delta_2\cos\tau - \cos\delta_1) - \sin H_1\cos\delta_2\sin\tau],$$

то јест

$$\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta_1-\sin\delta_2)=\cos H_1(\cos\delta_2\cos\tau-\cos\delta_1)-\sin H_1\cos\delta_2\sin\tau.$$

Како су нам познате величине δ_1, δ_2 и τ, ставићемо

$$\cos\delta_2\cos\tau-\cos\delta_1=m\cos M,$$

$$\cos\delta_2\sin\tau=m\sin M,$$

одакле следује

$$m=\cos\delta_2\sin\tau\operatorname{cosec}M \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}M=\operatorname{ctg}\tau-\cos\delta_1\sec\delta_2\operatorname{cosec}\tau.$$

Према томе горња једначина постаје

$$2\operatorname{tg}\varphi\cos\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\sin\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)=\cos\delta_2\sin\tau\operatorname{cosec}M\cos(H_1+M),$$

то јест, постаје

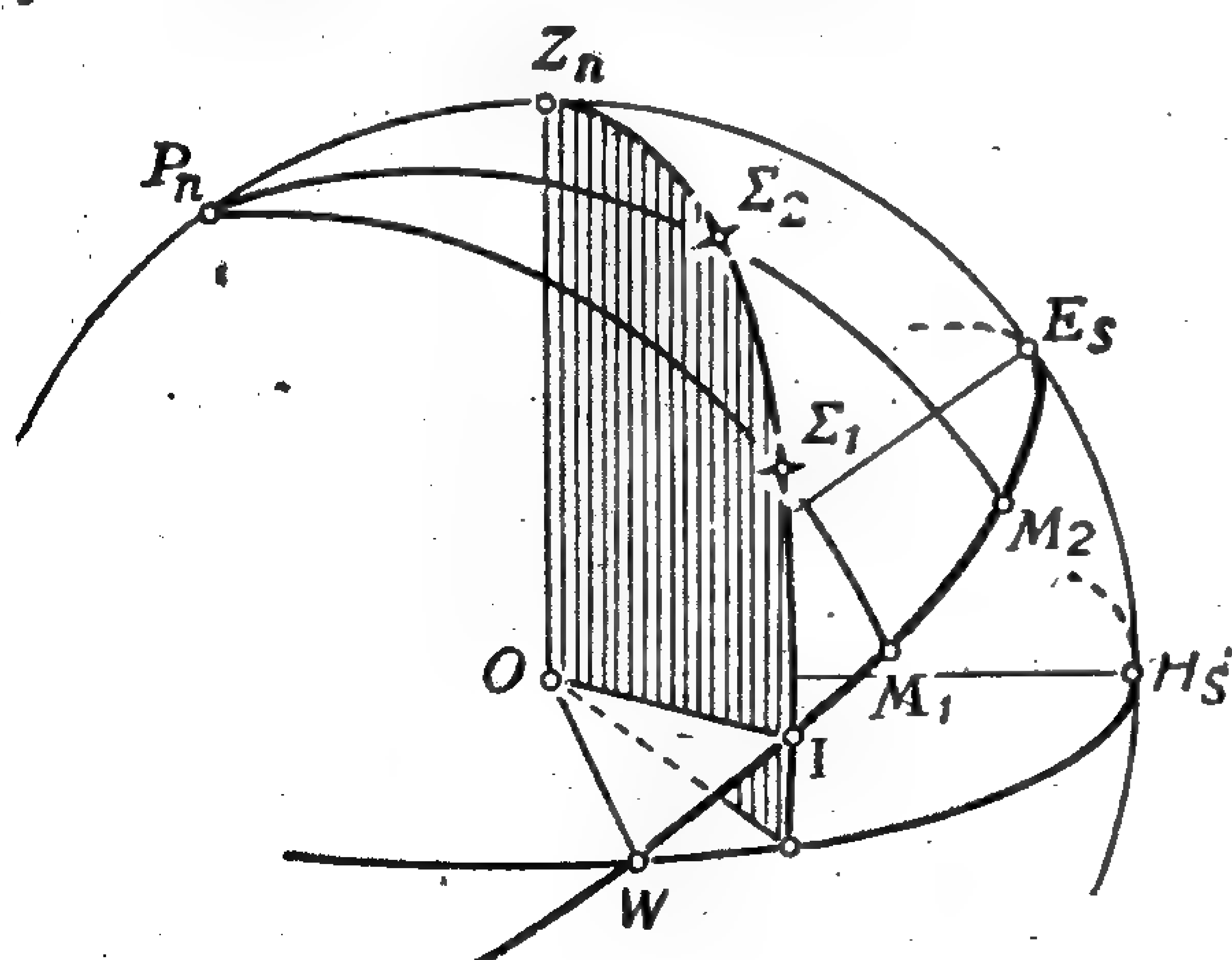
$$\cos(H_1+M)=2N\sin M\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}\tau,$$

ако ставимо

$$N=\cos\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\sin\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\sec\delta_2.$$

2. Уједно видимо да бисмо из добивене једначине могли одредити и посматрачеву географску ширину, да је, поред већ познатих величина, био дат још и тренутак било првог, t_1, било другог, t_2, посматрања. Са тим податком би, у исти мах, било и z одређено из једне од полазних једначина.

116. Претставимо на сл. 67 са Σ_1 и Σ_2 некретнице у тренутку кад су се нашле на вертикалу азимута A, за посматрача на географској ширини φ. Означимо часовни угао друге звезде, $\sphericalangle Z_nP_n\Sigma_2$, са $H_2=E_sM_2$. Ако сад приметимо да је, у правоуглом сферном троуглу Z_nIE_s, $E_sZ_n=\varphi$, и $\sphericalangle Z_nIE_s$ означимо са η, а лук небеског екватора IM_2 са σ, видимо да је



Сл. 67.

$$\sin(\sigma+H_2)=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\eta.$$

С друге стране, из правоуглог сферног троугла Σ_2M_2I имамо

$$\sin\sigma=\operatorname{tg}\delta_2\operatorname{ctg}\eta \quad \cdots \text{(a)}$$

Дељењем ових двеју једначина добивамо

$$\sin(\sigma+H_2)\operatorname{cosec}\sigma=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\delta_2,$$

то јест

$$\operatorname{tg}\varphi=\sin(\sigma+H_2)\operatorname{cosec}\sigma\operatorname{tg}\delta_2.$$

Приметимо ли, даље, да из правоуглог сферног троугла Σ_1IM_1 имамо

$$\sin[\sigma-(\alpha_2-\alpha_1)]=\operatorname{tg}\delta_1\operatorname{ctg}\eta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

дељењем једначинâ (a) и (b) добивамо

$$\frac{\sin\sigma}{\sin[\sigma-(\alpha_2-\alpha_1)]}=\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1},$$

уствари једначину која одређује σ. Доиста, из ње имамо

$$\frac{\sin\sigma+\sin[\sigma-(\alpha_2-\alpha_1)]}{\sin\sigma-\sin[\sigma-(\alpha_2-\alpha_1)]}=\frac{\operatorname{tg}\delta_2+\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2-\operatorname{tg}\delta_1}.$$

А одавде добивамо

$$\frac{2\sin\left[\sigma-\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}{2\cos\left[\sigma-\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)}=\frac{\sin(\delta_2+\delta_1)}{\sin(\delta_2-\delta_1)},$$

то јест $\operatorname{tg}\left[\sigma-\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\right]=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\delta_2+\delta_1)\operatorname{cosec}(\delta_2-\delta_1).$

Помоћни угао σ је овим изразом одређен. Да бисмо могли посматрачеву географску ширину израчунати, потребно би било да знамо и тренутак (t) посматрања, другим речима да знамо $H_2=t-\alpha_2$, јер α_2 сматрамо да је познато.

Претпостављајући да је познат и тренутак (t) посматрања, из правоуглог сферног троугла Z_nIE_s имали бисмо

$$\sin\varphi=\operatorname{tg}(\sigma+H_2)\operatorname{ctg}A,$$

то јест

$$\operatorname{ctg}A=\sin\varphi\operatorname{ctg}(\sigma+H_2);$$

а тиме је одређен и азимут вертикала.

117. У положајном сферном троуглу $Z_nP_n\Sigma$ имамо са уобичајеним ознакама

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos H.$$

За одређено место на Земљи, дакле φ, и уочену некретницу, Σ, деклинације δ, имаћемо за промену зенитске даљине у току дана

$$-\sin z\,dz=-\cos\varphi\cos\delta\sin H\,dH,$$

то јест, ако још извршимо смену

$$\sin A=\sin H\cos\delta\operatorname{cosec}z,$$

$$dz=\cos\varphi\sin A\,dH.$$

Одавде закључујемо да је

1) за $A_s=0$ и $A_i=\pi$, то јест у тренуцима горње и доње кулминације звезде, промена зенитске даљине њене најспорија;

2) за $A_w = \frac{\pi}{2}$ и $A_E = \frac{3\pi}{2}$, то јест у тренуцима пролаза звезде кроз посматрачев први вертикал, западни (W) и источни (E),

$$\frac{dz}{dH} = \pm \cos\varphi,$$

дакле промене зенитске даљине су најбрже; уједно видимо и то да оне не зависе од координата звезде, другим речима, исте су, за истог посматрача, код свих некретница које пролазе кроз први вертикал;

3) да промене зенитских даљина некретница буду стално, то јест преко целог дана, једнаке променама часовног угла, дакле, да буде

$$dz = dH,$$

треба да буду у исти мах

$$\text{и} \quad \cos\varphi = 1 \quad \text{и} \quad \sin A = 1, \quad \text{дакле и} \quad \varphi = 0^0 \quad \text{и} \quad A = 90^0.$$

Другим речима, треба посматрач да се налази на Земљину екватору и звезда да буде у првом вертикалу, а то значи екваторска, дакле $\delta = 0^0$.

118. *Први начин.* Означимо са A_d азимут звезде у тренутку њене највеће дигресије, па развијмо азимут, као функцију времена, по Тајлорову обрасцу. Имаћемо

$$A = A_d + \left(\frac{dA}{dH}\right)_d t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d t^2 + \ldots\ldots$$

Ограничимо ли се на мале вредности t, имаћемо за промену азимута за t секунада, од тренутка највеће дигресије,

$$\Delta A = A_d - A = -\left[\left(\frac{dA}{dH}\right)_d t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d t^2\right].$$

Како, међутим, знамо да је у тренутку највеће дигресије $\frac{dA}{dH} = 0$, за промену азимута добивамо

$$\Delta A = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d t^2.$$

Да бисмо нашли други извод азимута по часовном углу, поћи ћемо од четвороелементног обрасца типа

$$\sin c \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} A \sin B + \cos B \cos c,$$

који, примењен на положајни сферни троугао $Z_n P_n \Sigma$, даје

$$\cos\varphi \operatorname{tg}\delta = -\operatorname{ctg} A \sin H + \cos H \sin\varphi.$$

Из овог обрасца имамо

$$\operatorname{ctg} A = \sin\varphi \operatorname{ctg} H - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} H,$$

Диференцирањем по H добивамо одавде

$$\operatorname{cosec}^2 A \sin^2 H \frac{dA}{dH} = \sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \cos H.$$

Диференцирајући још једном по H имаћемо, ако притом узмемо у обзир да је у тренутку највеће дигресије $\left(\frac{dA}{dH}\right)_d = 0$,

$$\operatorname{cosec}^2 A_d \sin^2 H \left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d = \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \sin H_d,$$

то јест

$$\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d = \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \sin^2 A_d \operatorname{cosec} H_d.$$

Узмемо ли у обзир да је, у тренутку највеће дигресије звезде, положајни сферни троугао $Z_nP_n\Sigma$ правоугли, јер је $\sphericalangle P_n\Sigma Z_n = q = 90^0$, имаћемо

$$\cos\varphi = \cos\delta \operatorname{cosec} A_d,$$

и $$\operatorname{cosec} H_d = -\sin\delta \sec A_d,$$

то јест $$\cos\varphi \operatorname{cosec} H_d = -\sin\delta \cos\delta \sec A_d \operatorname{cosec} A_d.$$

Сменимо ли ову вредност у изразу за други извод азимута добивамо

$$\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)_d = -\sin^2\delta \operatorname{tg} A_d.$$

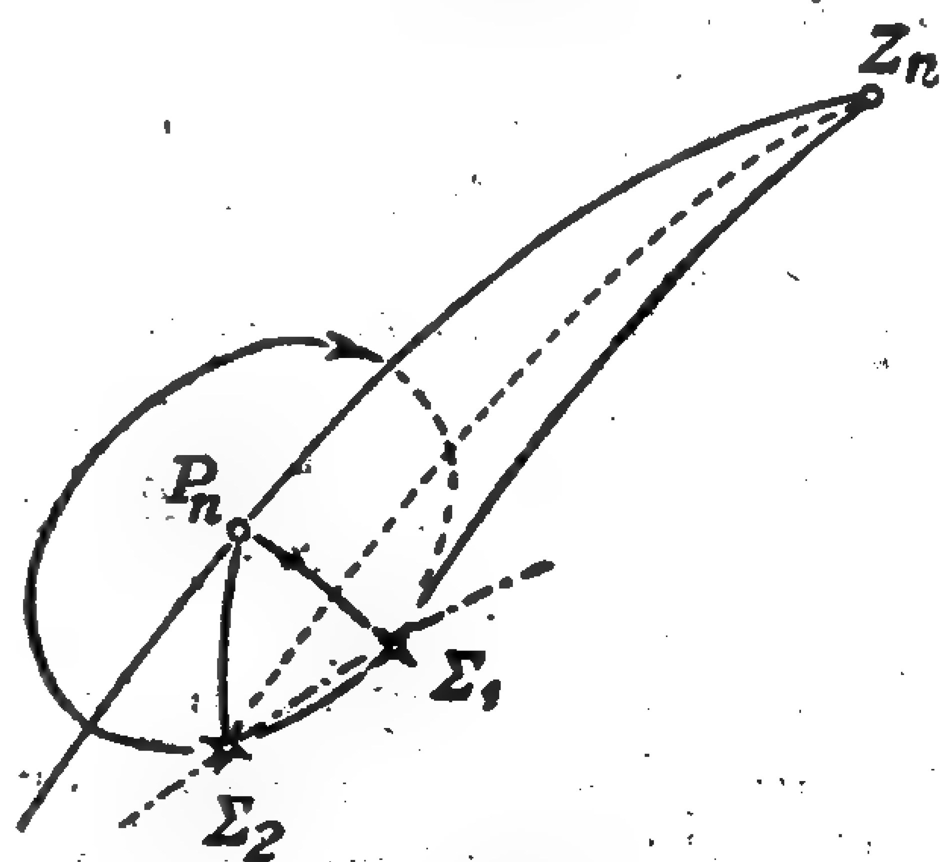
И тако за промену азимута за t^s после тренутка највеће дигресије звезде

добивамо $$\Delta A = -\frac{1}{2} t^2 \sin^2\delta \operatorname{tg} A_d.$$

Да бисмо ову промену добили у секундама угла, треба у изразу на десној страни, прво, број времених секунада помножити са 15 и, друго, десну страну помножити са arc 1″, дакле

$$\Delta A = \left[-\frac{1}{2}(15\,t)^2 \sin^2\delta \operatorname{tg} A_d \operatorname{arc} 1''\right]''.$$

Други начин. Претставимо на сл. 68 са Σ_1 некретницу у тренутку њене највеће дигресије, а са Σ_2 њен положај t секунада касније. Повуцимо кроз ова два положаја лук великог круга $\Sigma_1\Sigma_2 = \sigma$. Означимо, сем тога: $Z_n\Sigma_1 = z$, $Z_n\Sigma_2 = z + \Delta z$; $\sphericalangle \Sigma_1 Z_n \Sigma_2 = \Delta A$; $\sphericalangle P_n\Sigma_1\Sigma_2 = q$; $\sphericalangle \Sigma_1 P_n \Sigma_2 = t$; $Z_nP_n = \frac{\pi}{2} - \varphi$;



Сл. 68.

$P_n\Sigma_1 = P_n\Sigma_2 = \frac{\pi}{2} - \delta$; и приметимо да је $\sphericalangle Z_n\Sigma_1 P_n = \frac{\pi}{2}$.

Из сферног троугла $Z_n\Sigma_2\Sigma_1$ имамо онда:

$$\sin\sigma\cos q = \sin(z+\Delta z)\sin\Delta A,$$

а из сферног троугла $P_n\Sigma_2\Sigma_1$, пак

$$\sin\sigma\cos q = \sin\delta\cos\delta - \sin\delta\cos\delta\cos t = 2\sin\delta\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}t.$$

Дакле,
$$\sin(z+\Delta z)\sin\Delta A = 2\sin\delta\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}t.$$

Први члан на левој страни можемо развити. Ако су прираштаји довољно малени, а то смо већ претпоставили, тако да можемо њихове производе, квадрате и више степене занемарити, имаћемо:

$$\Delta A\sin z = \frac{1}{2}t^2\sin\delta\cos\delta.$$

С друге стране, из сферног троугла $Z_nP_n\Sigma_1$ је

$$\sin\varphi\sin z = -\cos\varphi\cos z\cos A.$$

Или, ако узмемо у обзир да је

$$\cos z = \sin\varphi\operatorname{cosec}\delta,$$

налазимо

$$\sin z = -\cos\varphi\operatorname{cosec}\delta\cos A.$$

И тако за промену азимута добивамо

$$\Delta A = -\frac{1}{2}t^2\sec\varphi\sin^2\delta\cos\delta\sec A.$$

А како из сферног троугла $P_n\Sigma_1Z_n$ имамо да је

$$\cos\delta = \cos\varphi\sin A,$$

за промену азимута звезде у тренутку њене највеће дигресије добивамо коначно

$$\Delta A = -\frac{1}{2}t^2\sin^2\delta\operatorname{tg}A,$$

или, у секундама угла,

$$\Delta A = -\frac{1}{2}(15t)^2\sin^2\delta\operatorname{tg}A\operatorname{arc}1''.$$

3. Некретница је циркумполарна за посматрача на северној географској ширини φ, ако је $+\delta > 90^0 - \varphi$; у нашем случају, ако је $\delta > +45^0\,11'47''$. Из прегледа сјајних некретница у Годишњаку нашег неба за 1956, стр. 98 – 100, видимо да тај услов задовољава, између осталих, и α Persei (Mirfak), чија је деклинација $\delta = +49^0\,42'\,23''$. Њен азимут у тренутку највеће дигресије дат је изразом

$$\sin A = \pm\cos\delta\sec\varphi,$$

или, ако га трансформишемо за нумеричку примену, биће

$$\operatorname{tg} A = \cos\delta\,[\operatorname{cosec}(\delta+\varphi)\operatorname{cosec}(\delta-\varphi)]^{\frac{1}{2}}$$

Према томе ћемо за промену азимута у западној највећој дигресији имати:

$\delta =$	$+49^0\,42'\,23''$,	$[\operatorname{cosec}(\delta+\varphi)]$	0·00 135,	за $t = 10^s$,	$\frac{1}{2}(15\,t)^2 = 11250$:		
$\varphi =$	$+44\;\;48\;\;13$,	$[\operatorname{cosec}(\delta-\varphi)]$	1·06 821,	$\left[\frac{1}{2}(15\,t)^2\right]$	4·051,		
$\delta+\varphi =$	94 30 36,	S	1·06 956,	$2[\sin\delta]$	9·765 – 10,		
$\delta-\varphi =$	4 54 10;	$\frac{1}{2}S$	0·53 478,	$[\operatorname{tg} A]$	0·345		
		$[\cos\delta]$	9·81 070,	$[\operatorname{arc} 1'']$	4·686 – 10,		
		$[\operatorname{tg} A]$	0·34 548;	$[\Delta A]$	8·847 – 10,		

према томе је $A_d = 65^0\,42'\,17''$; $\Delta A = -0''{\cdot}07$.

119. До израза за израчунавање малих промена висине и азимута некретница долазимо диференцирањем познатих образаца

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H, \tag{1}$$

$$\cos h\sin A = \cos\delta\sin H. \tag{2}$$

Диференцирањем првог обрасца по H имаћемо

$$\cos h\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi\cos\delta\sin H.$$

Како је, међутим,

$$\cos\delta\sin H = \cos h\sin A,$$

то, пошто извршимо смену и скратимо, добивамо за промену висине

$$\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi\sin A. \tag{I}$$

Диференцирамо ли (2) имаћемо

$$-\sin h\sin A\,dh + \cos h\cos A\,dA = \cos\delta\cos H\,dH.$$

Но ако узмемо у обзир да је

$$dh = -\cos\varphi\sin A\,dH = -\cos\delta\sin q\,dH,$$

где q означава паралактички угао, горњи израз за промену азимута, после ове смене, постаје

$$\cos h\cos A\,dA = \cos\delta\,(-\sin q\sin A\sin h + \cos H)\,dH.$$

За израз у загради, на десној страни, имамо, према обрасцу за углове,

$$\cos H - \sin q\sin A\sin h = \cos A\cos q;$$

те тако, пошто сменимо и скратимо, добивамо за промену азимута

$$\frac{dA}{dH} = \cos\delta \cos q \sec h. \qquad \text{(II)}$$

Да бисмо ове промене добили изражене у секундама угла за секунду звезданог времена, треба у изразима (I) и (II) ставити:

$$dh = (dh)'' \operatorname{arc} 1'', \qquad dA = (dA)'' \operatorname{arc} 1'', \qquad dH = 15 \operatorname{arc} 1'',$$

и добивамо за секундске промене

$$(dh)'' = -15 \cos\varphi \sin A,$$
$$(dA)'' = -15 \cos\delta \sec h \cos q.$$

Одавде се види да је:

а) при излазу некретнице: $(dh)'' > 0$, јер је $A > \pi$; $(dA)'' = 15 \cos\delta \cos q$, јер је $h = 0$;

б) при пролазу кроз први вертикал, то јест за $A = \pm\frac{\pi}{2}$, $(dh)'' = \mp 15 \cos\varphi$,

ово је, уједно, и највећа секундска промена висине некретнице у току дана. Што се тиче промене азимута некретнице при пролазу (ако уопште пролази) кроз први вертикал, то јест кад је $A = \pm\frac{\pi}{2}$, значи и

$$\cos\delta \cos q = \sin\varphi \cos h,$$

она постаје

$$(dA)'' = 15 \sin\varphi;$$

в) у тренутку горње кулминације, то јест за $A = 0$, или $A = \pi$, биће

$$(dh)'' = 0;$$

а како је, у том тренутку, $q = 0$, или $q = \pi$ (према томе да ли некретница кулминира јужно или северно од посматрачева зенита), биће

$$(dA)'' = 15 \cos\delta \sec h =$$
$$= 15 \cos\delta \operatorname{cosec}[\pm(\varphi - \delta)].$$

Ово је, уједно, и највећа секундска промена азимута некретнице у току дана.

Сл. 69.

120. 1. Претставимо на сл. 69 са Σ_1 и Σ_2 два блиска положаја некретнице која кулминира са северне стране посматрачева зенита, рецимо, у кратком временом размаку Δt звезданог времена. Ако Δt узмемо довољно малено, моћи ћемо сматрати мали правоугли троугао на сфери $\Sigma_1 \Sigma_2 Q$ као — равни. Његова хипотенуза је $\Sigma_1 \Sigma_2 = \sigma$, то јест лук паралела деклинација δ који некретница описује за Δt.

Промена висине некретнице за Δt звезданог времена претстављена је страном троугла $Q\Sigma_2 = \Delta h$; а то је, као што видимо, пројекција хипотенузе σ на вертикал $Z_n\Sigma_2$ звезде, дакле

$$\Delta h = Q\Sigma_2 = \sigma \cos \eta = \Delta t \cos \delta \cos \eta;$$

према томе, свакако је мања од σ. Она ће бити највећа кад је $\cos \eta = 1$, или $\eta = 0$. Промена висине је тада

$$\Delta h = \Delta t \cos \delta,$$

а знака је: позитивна са источне, негативна са западне стране меридијана. Ову промену достиже звезда кад јој вертикал постане тангента на паралел звезде, дакле у положају означеном на слици са Σ_n, то јест у тренутку највеће дигресије њене.

2. За промену висине добивамо, из обрасца

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

ако диференцирамо,

$$\cos h\, dh = -\cos \varphi \cos \delta \sin H\, dH.$$

Извршимо ли смену

$$\cos \varphi \sin H = \cos h \sin q,$$

добивамо, пошто скратимо,

$$dh = -\cos \delta \sin q\, dH,$$

где је са q означен паралактички угао.

Израз на десној страни достиже највећу апсолутну вредност кад је $|\sin q| = 1$, то јест $q = \pm \frac{\pi}{2}$, дакле у положају највеће дигресије звезде. Промена за секунду звезданог времена је тада, у секундама угла,

$$(dh)'' = \pm 15 \cos \delta \operatorname{arc} 1''.$$

121. У положајном сферном троуглу $Z_nP_n\Sigma$ имамо

$$\cos h \sin q = \cos \varphi \sin H,$$
$$\cos h \cos q = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H.$$

Ако их диференцирамо добивамо

$$-\sin h \sin q\, dh + \cos h \cos q\, dq = \cos \varphi \cos H\, dH,$$
$$-\sin h \cos q\, dh - \cos h \sin q\, dq = \cos \varphi \sin \delta \sin H\, dH.$$

Помножимо ли прву са $\cos q$, другу једначину са $-\sin q$, па саберемо, имаћемо

$$\cos h\, dq = \cos \varphi (\cos q \cos H - \sin q \sin H \sin \delta)\, dH.$$

Ако још приметимо да је израз у загради, на десној страни, једнак $\cos A$, добивамо коначно

$$dq = \cos \varphi \cos A \sec h\, dH.$$

До истог израза смо могли доћи и полазећи, било од обрасца

$$\cos q = \cos H \cos A + \sin H \sin A \sin \varphi,$$

било од обрасца

$$\sin H \operatorname{ctg} q + \sin \delta \cos H = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

122. Означимо висину звезде у тренутку њене горње кулминације, то јест кад је њен часовни угао $H=0$, са h_0. Ставимо ли да је h функција часовног угла и развијемо ли h у Маклоренов ред, имаћемо

$$h = h_0 + \left(\frac{dh}{dH}\right)_0 dH + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2h}{dH^2}\right)_0 dH^2 + \dots$$

Ако се ограничимо на мали времени размак пре или после кулминације звезде, за промену њене висине налазимо

$$\Delta h = \left(\frac{dh}{dH}\right)_0 dH + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2h}{dH^2}\right)_0 dH^2.$$

Да бисмо могли израчунати промену висине, треба, као што видимо, да нађемо први и други извод њен по часовном углу. Први смо већ користили и знамо (в. решење Зад. 119, израз (I)) да је

$$\frac{dh}{dH} = -\cos \varphi \sin A.$$

Одавде добивамо за други извод висине по часовном углу

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos \varphi \cos A \frac{dA}{dH}.$$

Знамо, међутим, да је

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A.$$

Одавде диференцирањем налазимо

$$0 = (\cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \cos A)\frac{dh}{dH} + \cos h \cos \varphi \sin A \frac{dA}{dH}.$$

Уврстимо сад овде, место израза у загради, вредност која му одговара према познатом обрасцу и, место првог извода висине по часовном углу, раније нађену вредност његову, па ћемо имати

$$0 = -\cos \delta \cos q \cos \varphi \sin A + \cos h \cos \varphi \sin A \frac{dA}{dH}.$$

Одавде налазимо за извод азимута

$$\frac{dA}{dH} = \cos \delta \cos q \sec h,$$

тако да за други извод висине добивамо

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos\varphi \cos A \cos\delta \cos q \sec h\,.$$

У задатку се тражи вредност промене висине у тренутку горње кулминације α Tauri (Aldebaran). Но у том тренутку је

$$\frac{dh}{dH} = 0, \qquad h_0 = 90^0 - (\varphi - \delta), \qquad A = 0, \qquad q = 0.$$

Према томе, за промену висине имаћемо

$$\Delta h = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2h}{dH^2}\right)_0 dH^2 = -\frac{1}{2}\cos\varphi \cos\delta \operatorname{cosec}(\varphi - \delta)\, dH^2.$$

Унесемо ли овамо вредности података из задатка биће:

$\varphi = +44^0\,48'\,13''$,	$[\cos\varphi]$	$9{\cdot}85\,097 - 10$,	
$\delta = +16\;\;25\;\;19$,	$[\cos\delta]$	$9{\cdot}98\,191 - 10$,	
$\varphi - \delta = \;\;28\;\;22\;\;54$;	$[\operatorname{cosec}(\varphi - \delta)]$	$0{\cdot}32\,299$,	
	$\left[\frac{1}{2}\right]$	$9{\cdot}69\,897 - 10$,	
$dH = 60 \operatorname{arc} 1^s$,	$2\,[900]$	$5{\cdot}90\,848$,	
$= 60{\cdot}15 \operatorname{arc} 1''$,	$[\operatorname{arc} 1'']$	$4{\cdot}68\,557 - 10$,	
$dH^2 = (900)^2 \operatorname{arc} 1''$;	$[\Delta h]$	$0{\cdot}44\,889_n$;	$\Delta h = -2''{\cdot}81.$

123. Претставимо на сл. 70 са Σ_1 небеско тело у тренутку кад је оно било на зенитској даљини, рецимо, z. И претпоставимо да је, место z, посматрач добио као мерену зенитску даљину $Z_n\Sigma_2 = Z_n\Sigma_1 + Q\Sigma_2 = z + \Delta z$. Услед тога је за посматрани часовни угао нашао, место $\sphericalangle Z_nP_n\Sigma_1 = H$, часовни угао $Z_nP_n\Sigma_2 = H + \Delta H$.

Ако претпоставимо да је грешка Δz довољно малена, биће и dH малено. У том случају можемо мали правоугли троугао на сфери $Q\Sigma_1\Sigma_2$ третирати као р а в н и правоугли троугао. Ако означимо деклинацију небеског тела са δ, троуглова хипотенуза, $\Sigma_1\Sigma_2$, као лук паралела деклинације δ над углом код пола, ΔH, биће $\Sigma_1\Sigma_2 = \Delta H \cos\delta$.

Сл. 70.

С друге стране, ако означимо са q паралактички угао, $P_n\Sigma_1Z_n$, и приметимо да је $\sphericalangle P_n\Sigma_1Z_n = \sphericalangle Q\Sigma_1\Sigma_2 = q$ имаћемо из троугла $Q\Sigma_1\Sigma_2$

$$Q\Sigma_2 = \Delta z = \Sigma_1\Sigma_2 \sin q, \qquad \text{дакле} \qquad \Delta z = \Delta H \cos\delta \sin q.$$

Одавде добивамо

$$\Delta H = \Delta z \sec \delta \operatorname{cosec} q.$$

Додамо ли још да је у положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma_1$

$$\cos \delta \sin q = \cos \varphi \sin A,$$

и извршимо ли ту смену, имаћемо коначно за промену поправке часовника у функцији грешке зенитске даљине

$$\Delta H = \Delta z \sec \varphi \operatorname{cosec} A.$$

До овог израза долазимо аналитичким путем диференцирањем обрасца

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

Тако добивамо

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin H \, dH,$$

а, после познате смене,

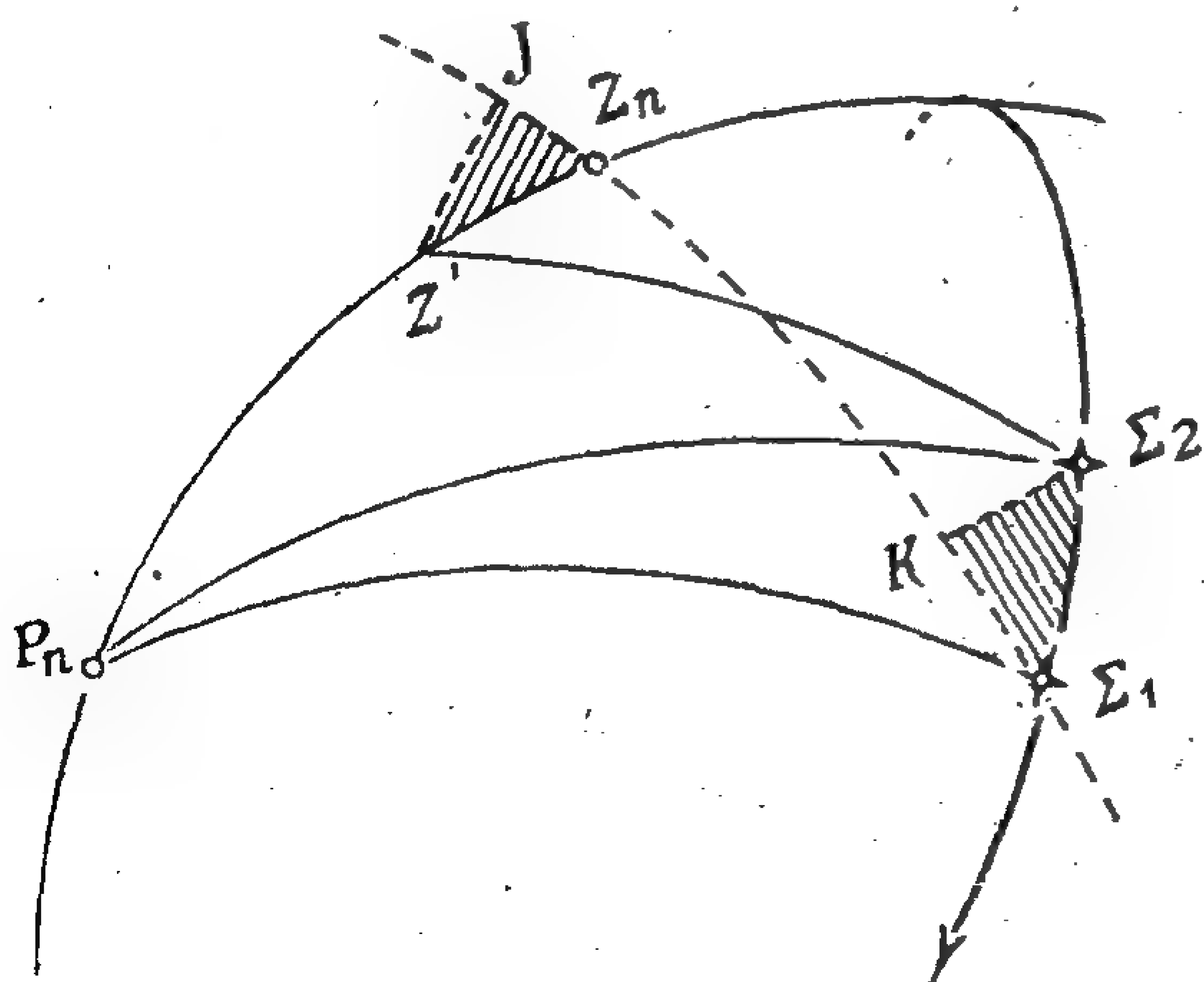
$$\cos \delta \sin H = \sin z \sin A,$$

и пошто скратимо, добивамо већ нађени израз

$$dH = dz \sec \varphi \operatorname{cosec} A.$$

Из овог израза видимо да ће, при одређеној вредности грешке dz (извесног посматрача, једним инструментом), грешка ΔH бити утолико мања уколико буде био мањи фактор $\operatorname{cosec} A$. Овај је најмањи за $A = \pm \frac{\pi}{2}$, што значи кад се небеско тело посматра у првом вертикалу.

2. Претставимо на сл. 71 са Σ_1 положај небеског тела у тренутку посматрања, на зенитској даљини, рецимо, $z = Z_n \Sigma_1$. Да је, при одређивању (или читању) часовног угла, посматрач узео за своју колатитуду $Z_n P_n$, он би за часовни угао био нашао $\sphericalangle Z_n P_n \Sigma_1$. Но он је за колатитуду узео $Z' P_n = Z_n P_n - \Delta\varphi$. Услед тога је за мерену зенитску даљину он уствари узео $Z' \Sigma_2 = Z_n \Sigma_1 = z$, те је, тако, за часовни угао нашао $\sphericalangle Z' P_n \Sigma_2 = Z_n P_n \Sigma_1 - \Delta H$.



Сл. 71.

Претпоставићемо да је учињена грешка $\Delta\varphi$ довољно малена, тако да можемо сматрати лукове великих кругова $Z'\Sigma_2$ и $Z_n\Sigma_1$ довољно блиске један другом, да лукове — пројекције можемо узети (в. сл. 71) $Z_n J = \Sigma_1 K$. Ако су ти услови остварени, онда је у малом правоуглом троуглу $Z_n Z' J$

$$J Z_n = -\Delta\varphi \cos A,$$

а у троуглу, опет правоуглом, $\Sigma_2 K \Sigma_1$,

$$K\Sigma_1 = \Delta z = \Sigma_1\Sigma_2 \sin q = \Delta H \cos\delta \sin q,$$

где је положајни угао $P_n\Sigma_2 Z' = \sphericalangle K\Sigma_2\Sigma_1$.

Са поменутом претпоставком налазимо

$$-\Delta\varphi \cos A = \Delta H \cos\delta \sin q,$$

дакле

$$\Delta H = -\Delta\varphi \cos A \sec\delta \operatorname{cosec} q.$$

Узмемо ли и то још у обзир да је у положајном сферном троуглу $Z_n P_n \Sigma_1$

$$\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A,$$

налазимо за поправку часовног угла у функцији грешке географске ширине, $\Delta\varphi$,

$$\Delta H = -\Delta\varphi \operatorname{ctg} A \sec\varphi.$$

Из овог израза, уједно, видимо да ће, при одређеној величини грешке $\Delta\varphi$, грешка у часовном углу бити најмања за $A = \pm\frac{\pi}{2}$.

До истог израза за грешку ΔH можемо доћи и аналитичким путем. Ако диференцирамо образац

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H,$$

сматрајући за промењиве у њему само φ и H, добивамо

$$0 = (\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos H)\, d\varphi - \cos\varphi \cos\delta \sin H\, dH.$$

Извршимо ли у њему познате смене из положајног сферног троугла $Z_n P_n \Sigma$, имаћемо

$$0 = -\sin z \cos A\, d\varphi - \cos\varphi \sin z \sin A\, dH.$$

Одавде, пошто скратимо, налазимо опет, као и горе,

$$\Delta H = -d\varphi \operatorname{ctg} A \sec\varphi.$$

124. У тренутку залаза небеског тела, то јест за $z = \frac{\pi}{2}$, имамо из положајног сферног троугла за азимут и часовни угао обрасце

$$\cos A = -\sec\varphi \sin\delta \qquad \text{и} \qquad \cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

то јест

$$A = \arccos(-\sec\varphi \sin\delta),$$

$$H = \arccos(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta).$$

За разлику ћемо имати, према томе,

$$A - H = \arccos(-\sec\varphi \sin\delta) - \arccos(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta).$$

То је, као што видимо, за одређеног посматрача, функција само деклинације небеског тела. Према томе ће услов за максимум те разлике бити

$$\frac{d(A-H)}{d\delta}=0.$$

Значи

$$\frac{\sec\varphi\cos\delta}{\sqrt{1-\sec^2\varphi\sin^2\delta}}-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\delta\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta}}=0,$$

то јест

$$\frac{\cos\delta}{\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\delta}}=\frac{\sin\varphi}{\cos\delta\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\delta-\sin^2\varphi\sin^2\delta}}.$$

Приметимо ли, међутим, да је

$$\cos^2\varphi\cos^2\delta-\sin^2\varphi\sin^2\delta=(1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\delta)-\sin^2\varphi\sin^2\delta=\cos^2\varphi-\sin^2\delta,$$

добивамо, пошто скратимо, за услов

$$\cos^2\delta=\sin\varphi,\qquad \text{то јест}\qquad \cos\delta=\pm\sqrt{\sin\varphi}.$$

125. Према задатку су, у обрасцу за положајни сферни троугао

$$\sin\delta=\sin\varphi\sin h-\cos\varphi\cos h\cos A,$$

величине φ и A константне. Тражи се да се одреди највећа вредност деклинације небеског тела као функције висине. До услова за максимум доћи ћемо диференцирајући горњу једначину. Тако ћемо имати

$$\cos\delta\, d\delta=(\sin\varphi\cos h+\cos\varphi\sin h\cos A)\,dh.$$

Одавде добивамо за услов

$$\frac{d\delta}{dh}=0=(\sin\varphi\cos h+\cos\varphi\sin h\cos A)\sec\delta,$$

то јест, ако искључимо случај небеског тела за које би било $\delta=\frac{\pi}{2}$, добивамо

$$\sin\varphi\cos h+\cos\varphi\sin h\cos A=0,$$

дакле

$$\operatorname{ctg} h=-\operatorname{ctg}\varphi\cos A.$$

Одавде видимо да ће, за посматрача на северној Земљиној хемисфери, некретница моћи тај услов задовољити над хоризонтом, то јест за $h>0$, дакле и $\operatorname{ctg} h>0$, само ако је

$$\cos A<0,\quad \text{значи}\quad A>\pm\frac{\pi}{2}.$$

Зато мора бити $\delta<\varphi$. Значи, дакле, деклинација некретнице треба да буде већа од посматрачеве географске ширине да би могла, на одређеном вертикалу, бити највећа од деклинација свих осталих некретница које, у том тренутку, пролазе кроз исти вертикал.

А услов нам казује да, у том тренутку и положају некретиице, положајни сферни троугао $Z_n P_n \Sigma$ постаје правоугли, са правим — паралактичким углом.

Тај услов добивамо и непосредно из

$$\cos\delta\, d\delta = (\sin\varphi\cos h + \cos\varphi\sin h\cos A)\, dh$$

ако члан у загради, на десној страни, изразимо помоћу паралактичког угла,

$$\cos\delta\, d\delta = \cos\delta\cos q\, dh.$$

Одатле, пошто скратимо, имамо

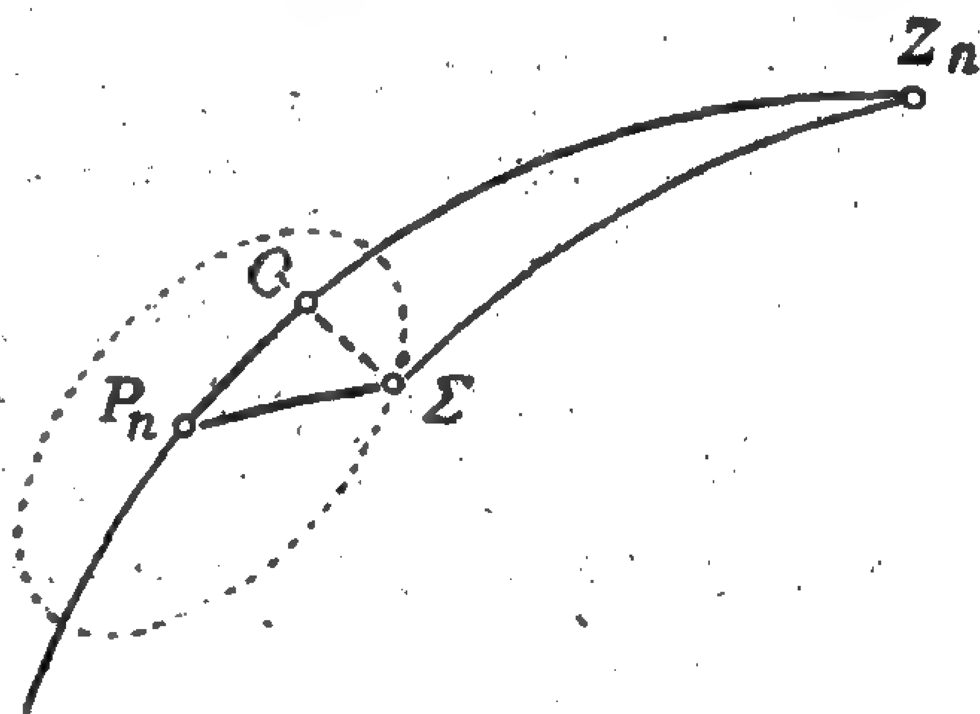
$$\frac{d\delta}{dh} = \cos q,$$

то јест, за услов добивамо $\cos q = 0$, дакле $q = \pm\frac{\pi}{2}$.

126. Због своје велике деклинације, или мале поларне даљине (мање од 1^0), Северњача (α Ursae minoris) остаје непрекидно, у току свог привидног дневног кретања, у непосредној близини северног небеског пола, дакле и посматрачева меридијана. Сем тога, она је и довољно сјајна, тако да је и мањим дурбином видљива, са северне Земљине хемисфере, такорећи преко целог дана. Због тога се често искоришћује за брзо одређивање приближне географске ширине посматрачеве. Метода за ово одређивање заснива се на решењу које овде дајемо.

Претставимо са Σ положај Северњаче на часовном углу H и зенитској даљини (в. сл. 72) $Z_n\Sigma = z$. Из положаја Σ замислимо повучен лук великог круга ΣQ нормално на посматрачев меридијан. Онда из правоуглог сферног троугла $\Sigma Q P_n$ имамо, ако страну QP_n означимо са x:

$\cos H = \mathrm{ctg}\, p\, \mathrm{tg}\, x$, то јест $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, p \cos H$.



Сл, 72.

Величина p, то јест поларна даљина Северњаче, па, према томе, и величина x су мале величине, мање од 1^0, или, у радијанима, мање од 0·017. Према томе, ако занемаримо треће и више степене тих величина, биће

$$x = p\cos H. \tag{1}$$

Ово, уосталом, видимо и непосредно са слике.

Са слике, даље, видимо да је

$$Z_n Q + QP_n = \frac{\pi}{2} - \varphi = z + \varepsilon + x, \tag{2}$$

где смо са ε означили малу, непознату поправку (за коју се хипотенуза, z, правоуглог сферног троугла $\Sigma Z_n Q$ разликује од катете QZ_n).

Из сферног троугла $Z_n P_n \Sigma$ имамо

$$\cos z = \sin\varphi\cos p + \cos\varphi\sin p\cos H, \qquad (3)$$

где су све величине, сем φ, познате. Ако искористимо околност што су величине p, ε и x мале (чак је ε реда p^2) и дозволимо себи да занемаримо треће и више степене поларне даљине, дакле и величине x (а квадрате и више степене поправке ε), имаћемо, с једне стране,

$$\cos p = 1 - \frac{1}{2}p^2 \qquad \text{и} \qquad \sin p = p,$$

а, с друге стране, користећи (2) и (1),

$$\sin\varphi = \cos[z + (\varepsilon + p\cos H)] = \cos z\left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon + p\cos H)^2\right] - \sin z(\varepsilon + p\cos H),$$

$$\cos\varphi = \sin[z + (\varepsilon + p\cos H)] = \sin z\left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon + p\cos H)^2\right] + \cos z(\varepsilon + p\cos H).$$

Уврстимо ове вредности у (3) и добићемо, занемарујући треће и више степене поларне даљине,

$$\cos z = \left[\cos z\left(1 - \frac{1}{2}p^2\cos^2 H\right) - \varepsilon\sin z - p\sin z\cos H\right)\left(1 - \frac{1}{2}p^2\right) +$$

$$+ p\left[\sin z\left(1 - \frac{1}{2}p^2\cos^2 H\right) + \varepsilon\cos z + p\cos z\cos H\right)\cos H,$$

то јест

$$\cos z = \cos z - \frac{1}{2}p^2\cos z\cos^2 H - \varepsilon\sin z - p\sin z\cos H - \frac{1}{2}p^2\cos z +$$

$$+ p\sin z\cos H + p^2\cos z\cos^2 H = \cos z - \varepsilon\sin z - \frac{1}{2}p^2\cos z\sin^2 H.$$

Одавде налазимо за непознату поправку

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}p^2\,\mathrm{ctg}\, z\sin^2 H.$$

Уврстимо ли је у (2) имаћемо, у угловним секундама, ако још, место зенитске даљине, уведемо висину Северњаче,

$$\varphi = h - p\cos H + \frac{1}{2}p^2\,\mathrm{tg}\, h\sin^2 H\,\mathrm{arc}\,1''.$$

Одавде, у исти мах, видимо и да ће приближна географска ширина посматрачева, ако се занемаре квадрати и виши степени поларне даљине Северњаче, бити

$$\varphi = h - p\cos H.$$

САДРЖАЈ

I. Vrednosti srednje refrakcije
II. Približna rešenja Keplerove jednačine

S a d r ž a j

- - - - - - - - - -

Celu zbirku zadataka složiti, koliko god je to tehnički moguće, kao štampano prvo izdanje prvog dela iz 1956. g.

S a d r ž a j

1/2 h.f.

— курзив обичан!

1/11

~~U V O D~~

~~I. PREGLED OBRAZACA SFERNE TRIGONOMETRIJE~~

5. Obrasci za prelaz sa apsolutnih na relativne koordinate. Položaje dveju bliskih tačaka na nebeskoj sferi možemo odredjivati bilo pomoću njihovih sfernih koordinata, u odnosu na neki od koordinatnih sistema (α_1, δ_1 i α_2, δ_2 ; ili λ_1, β_1 i λ_2, β_2) — ili takozvanih a p s o l u t n i h koordinata — bilo pomoću veličinâ kojima je jednoznačno odredjen položaj jedne od njih prema drugoj (poznatih apsolutnih koordinata, recimo pomoću veličina: $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$; ili $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$; ili s, q) — ili takozvanih r e l a t i v n i h koordinata jedne prema drugoj.

Uočimo dve bliske tačke na nebeskoj sferi. Neka to budu tačke Σ_0 i Σ na sl. 7 , i označimo:

sl. 7

sfernu daljinu (uvek pozitivnu) $\Sigma_0\Sigma$ sa s;

paralaktički ugao $P_n\Sigma_0\Sigma$ sa q_0 , a $P_n\Sigma\Sigma_0$ sa $\pi + q$;

ili ugao izmedju $P_n\Sigma$ i produžetka luka $\Sigma_0\Sigma$ sa q;

(apsolutne) sferne koordinate tačke Σ_0 sa L_0, B_0 , a tačke Σ sa L i B . Kraćeg pisanja radi stavimo još:

$$L - L_0 = \Delta L, \qquad B - B_0 = \Delta B, \qquad q - q_0 = \Delta q.$$

Pretpostavićemo sad da su nam date relativne koordinate druge tačke, Σ , u odnosu prema prvoj, Σ_0 , dakle, veličine s i q_0 ; uz to još i koordinata B_0 tačke Σ_0 . Pokazaćemo da se pomoću tih veličina mogu odrediti veličine: ΔL , ΔB i Δq . Drugim rečima, ako nam se dâ još i L_0 , moći ćemo odrediti apsolutne koordinate druge tačke, Σ.

Do traženih obrazaca najbrže ćemo doći ako na sferni trougao $P_n\Sigma_0\Sigma$ (v. sl. 7) primenimo grupu (A.) obrazaca, izvedenih na str.

~~68~~ - ~~70~~ Sferne trigonometrije.[1] Ako uporedimo sl. 25 sa str. 68 iz te knjige i našu sl. 73, videćemo odmah da

na sl. 25		na sl. 86	
strani b	odgovara	strana	$\frac{\pi}{2}-B_0$;
" c	"	"	s;
" $b-a$	"	"	ΔB;
uglu A	"	ugao	q_0;
" $(\varepsilon-A-B)$	"	"	$(\pi-q_0-\pi+q)=q-q_0$;
" C	"	"	ΔL;

Zamenom dobivamo, ako zanemarimo treće i više stepene male veličine s,

$$\cos B_0 \Delta L = s \sin q_0 + s^2 \sin q_0 \cos q_0 \,\mathrm{tg}\, B_0,$$
$$\Delta B = s \cos q_0 - \tfrac{1}{2} s^2 \sin^2 q_0 \,\mathrm{tg}\, B_0,$$
$$\Delta q = s \sin q_0 \,\mathrm{tg}\, B_0 + \tfrac{1}{2} s^2 \sin q_0 \cos q_0 (1 + 2\,\mathrm{tg}^2 B_0).$$

A ako je s dovoljno malo, da se može zanemariti i kvadrat te veličine, imaćemo:

$$\cos B_0 \Delta L = s \sin q_0, \quad \text{to jest} \quad \Delta L = s \sin q_0 \sec B_0,$$
$$\Delta B = s \cos q_0, \qquad \Delta q = s \sin q_0 \,\mathrm{tg}\, B_0$$

Naravno, ovi obrasci vrede ako se uočene tačke, dakle Σ_0 i Σ, ne nalaze u neposrednoj blizini nebeskih polova.

U obrnutom slučaju, to jest kad su date sferne koordinate, L_0, B_0 i L, B, za odredjivanje relativnih koordinata, s i q, koristićemo Gausovu grupu obrazaca:

$$\cos s = \sin B_0 \sin B + \cos B_0 \cos B \cos(L - L_0),$$
$$\sin s \sin q_0 = \cos B \sin(L - L_0),$$
$$\sin s \cos q_0 = \cos B_0 \sin B - \sin B_0 \cos B \cos(L - L_0).$$

Sa uvedenim oznakama za razlike sfernih koordinata i koristeći se poznatim vezama iz trigonometrije, prvi od ovih obrazaca možemo napi-

----

[1] V. V. Mišković — Opšta astronomija. Prvi deo. Sferna trigonometrija. Zavod za izdavanje udžbenika NRS, Beograd, 1960.

sati:

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}s = \sin B_0 \sin B + \cos B_0 \cos B - 2\cos B_0 \cos B \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta L,$$

ili

$$\sin^2\tfrac{1}{2}s = \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta B + \cos B_0 \cos B \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta L.$$

Na desnim stranama ove, kao i preostalih dveju jednačina iz Gausove grupe, možemo izvršiti smenu $B = B_0 + \Delta B$; u tom slučaju dobivamo

$$\sin^2\tfrac{1}{2}s = \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta B + \cos B_0 \cos(B_0+\Delta B)\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta L,$$
$$\sin s \sin q_0 = \cos(B_0+\Delta B)\sin \Delta L,$$
$$\sin s \cos q_0 = \sin \Delta B + 2\sin B_0 \cos(B_0+\Delta B)\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta L.$$

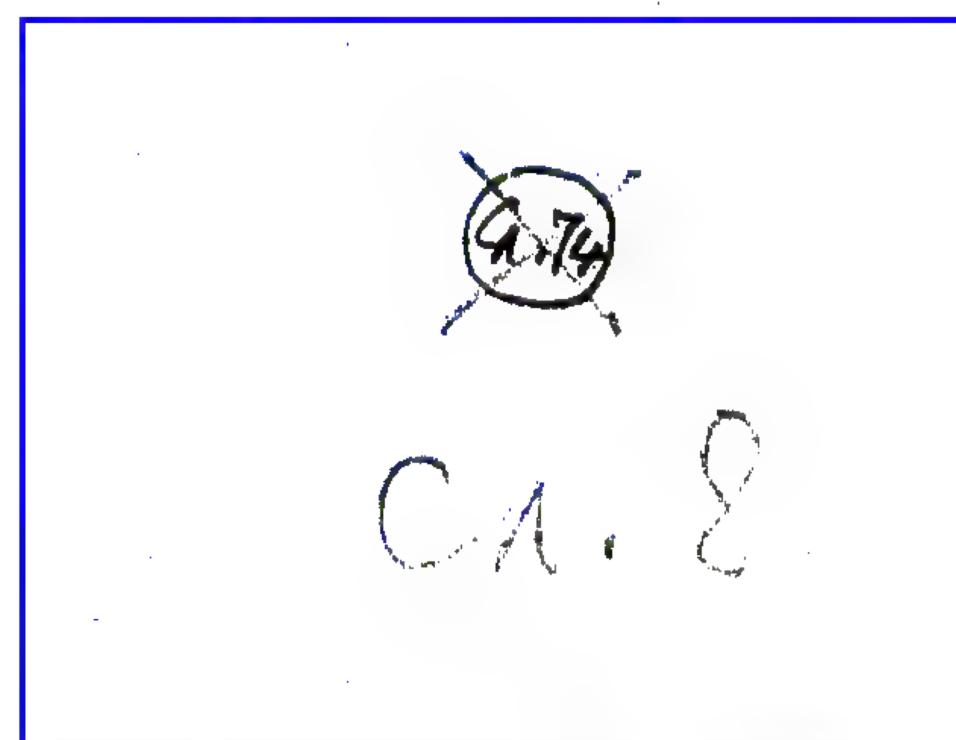
Pretpostavimo li da su uočene tačke blizu jedna druge, samo da se ne nalaze u neposrednoj blizini nebeskih polova, iz ovih obrazaca dobivamo, ako zanemarimo veličine trećeg i višeg reda u odnosu prema s, ΔL i ΔB

$$s^2 = (\Delta B)^2 + \cos^2 B_0 (\Delta L)^2 - \sin B_0 \cos B_0\, \Delta B (\Delta L)^2,$$
$$s \sin q_0 = \cos B_0\, \Delta L - \sin B_0\, \Delta B\, \Delta L, \qquad \text{(E)}$$
$$s \cos q_0 = \Delta B + \tfrac{1}{2}\sin B_0 \cos B_0 (\Delta L)^2.$$

A ako se zanemare veličine drugog i viših redova, dobivamo

$$s^2 = (\Delta B)^2 + \cos^2 B (\Delta L)^2,$$
$$s \sin q_0 = \cos B_0\, \Delta L, \qquad \text{(F)}$$
$$s \cos q_0 = \Delta B.$$

Ovi obrasci imaju i geometrijsko svoje značenje. U tački Σ_0 zamislimo položenu tangentnu ravan na sferi, i u njoj pravougli koordinatni sistem sa osama $\Sigma_0\Xi$ u $\Sigma_0 H$. Sa sl. 8 vidimo da je osa $\Sigma_0 H$ tangenta na meridijanu kroz tačku Σ_0 , i to usmerena ka polu, P_n . Osa $\Sigma_0\Xi$ je tangenta na paralelu kroz tačku Σ_0 , a usmerena je tako da



ugao izmedju $\Sigma_0\Xi$ i $\Sigma_0 H$, računat u smeru sfernih koordinata tačke Σ , bude jednak $+\frac{\pi}{2}$. Kako je u izrazima o kojima je reč zanemaren kvadrat veličine s, možemo tačku Σ , na sferi, zameniti njenom projekcijom na tangentnu ravan, S. Za polarne koordinate tačke S ima-

mo, u ovom slučaju, $\underline{s}$ i $\frac{\pi}{2} - \underline{q}_0$, a za pravolinijske, ako ih označimo sa ξ i η ,

$$\xi = \underline{s} \sin \underline{q}_0 = \Delta \underline{L} \cos \underline{B}_0 , \qquad \eta = \underline{s} \cos \underline{q}_0 = \Delta \underline{B} .$$

Odavde, opet, dobivamo

$$tg\, \underline{q}_0 = \frac{\Delta \underline{L}}{\Delta \underline{B}} \cos \underline{B}_0 , \qquad \underline{s}^2 = (\Delta \underline{B})^2 + (\Delta \underline{L})^2 \cos^2 \underline{B}_0 .$$

A to su isti izrazi koje bismo našli da smo (v. sl. 7) iz Σ spustili luk meridijana $\Sigma \underline{U}$, narmalno na paralel kroz Σ_0 , i tako dobiveni mali pravougli trougao na sferi, sa hipotenuzom $\Sigma_0 \Sigma = \underline{s}$ i katetama $\Sigma \underline{U} = \Delta \underline{B}$ i $\Sigma_0 \underline{U} = \Delta \underline{L} \cos \underline{B}_0$, — smatrali kao ravni.

2. Диференцијални обрасци положајног сферног троугла / gr. 1/2 [illegible]

$$dz = -\cos q\, d\delta + \cos A\, d\varphi + \begin{cases} \cos\varphi \sin A\, dH, \\ \cos\delta \sin q\, dH, \end{cases}$$

$$d\delta = \cos H\, d\varphi - \cos q\, dz + \begin{cases} \sin z \sin q\, dA, \\ \cos\varphi \sin H\, dA, \end{cases}$$

$$d\varphi = \cos A\, dz + \cos H\, d\delta + \begin{cases} \cos\delta \sin H\, dq, \\ \sin z \sin A\, dq, \end{cases}$$

$$dH = \sin\varphi\, dA - \sin\delta\, dq + \begin{cases} \cos\varphi \sin A\, dz, \\ \cos\delta \sin q\, dz, \end{cases}$$

$$dA = \cos z\, dq + \sin\varphi\, dH + \begin{cases} \sin z \sin q\, d\delta, \\ \cos\varphi \sin H\, d\delta, \end{cases}$$

$$dq = -\sin\delta\, dH + \cos z\, dA - \begin{cases} \cos\delta \sin H\, d\varphi, \\ \sin z \sin A\, d\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin z\, dA &= \sin q\, d\delta - \cos z \sin A\, d\varphi + \cos\delta \cos q\, dH, \\ \cos\delta\, dq &= -\sin H\, d\varphi - \sin\delta \sin q\, dz + \cos\varphi \cos H\, dA, \\ \cos\varphi\, dH &= \sin A\, dz + \sin\varphi \sin H\, d\delta + \sin z \cos A\, dq, \\ \sin z\, dq &= -\sin A\, d\varphi + \cos z \sin q\, d\delta + \cos\varphi \cos A\, dH. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\beta &= \cos q\, d\delta - \sin\varepsilon \cos\lambda\, d\alpha - \sin\lambda\, d\varepsilon, \\ \cos\beta\, d\lambda &= \sin q\, d\delta + \cos\delta \cos q\, d\alpha + \sin\beta \cos\lambda\, d\varepsilon, \\ \cos\beta\, dq &= \sin\beta \sin q\, d\delta - \sin\varepsilon \sin\lambda\, d\alpha + \cos\lambda\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\delta &= \cos q\, d\beta + \sin\varepsilon \cos\alpha\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon, \\ \cos\delta\, d\alpha &= -\sin q\, d\beta + \cos\beta \cos q\, d\lambda - \sin\delta \cos\alpha\, d\varepsilon, \\ \cos\delta\, dq &= \sin\delta \sin q\, d\beta - \sin\varepsilon \sin\alpha\, d\lambda + \cos\alpha\, d\varepsilon. \end{aligned}$$

IV. ASTRONOMSKA REFRAKCIJA

1. Definicije. Na sl. 9 predstavljeni su sa:

P — posmatrač (na dnu Zemljine atmosfere, visine PK);

Z — posmatračev zenit;

S — stvarni položaj uočenog nebeskog tela;

SI — put svetlosnog zraka sa uočenog tela do nailaska na Zemljinu atmosferu;

z — prava zenitska daljina uočenog nebeskog tela (S);

IP — putanja kojom je zrak prošao kroz Zemljinu atmosferu;

PS_0 — pravac u kojem posmatrač vidi uočeno nebesko telo;

z_0 — prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;

R — razlika izmedju prave i prividne zenitske daljine ili (astronomska) refrakcija posmatranog tela:

$$R = z - z_0, \text{ to jest } \quad z = z_0 + R.$$

Astronomska refrakcija dejstvuje samo u ravni odredjenoj posmatračevom vertikalom (PZ) i položajem uočenog nebeskog tela (S). Ona ne utiče na azimut; ona samo smanjuje zenitsku daljinu (povećeva visinu) uočenog nebeskog tela.

Ako se i uočeno telo nalazi (ne izvan, već) u Zemljinoj atmosferi, promenu u pravcu koju pretrpi zrak na putu od uočenog tela do posmatrača zovemo (za razliku od astronomske) - terestričkom refrakcijom.

2. Izraz za astronomsku refrakciju. Pod odredjenim pretpostavkama o obliku Zemlje, sklopu Zemljine atmosfere i uslovom da posmatrano nebesko telo nije pri samom horizontu (z_0 blizu 90°), a na osnovi poznatog zakona o prelamanju svetlosti, — dobiva se izraz za astronomsku refrakciju u obliku konvergentnog reda, po sve većim, samo neparnim, stepenima tangensa prividne zenitske daljine, dakle, oblika:

$$R = A \operatorname{tg} z_0 - B \operatorname{tg}^3 z_0 + C \operatorname{tg}^5 z_0 - D \operatorname{tg}^7 z_0 + \cdots\cdots, \qquad (I)$$

gde koeficijenti A, B, C, D, zavise od veze izmedju indeksa ref-

rakcije i daljine (poluprečnika) atmosferskog sloja; drugim rečima, zavise od fizičkih uslova atmosfere u trenutku posmatranja. Zato, da bi posmatrana zenitska daljina tela mogla biti oslobodjena dejstva refrakcije, posmatrač treba, u trenutku posmatranja, da pročita i stanja termometra i barometra kraj instrumenta.

Za zenitske daljine manje od 75° dovoljna tačnost, za sve praktične potrebe, postiže se i samo sa prva dva člana (I), dakle,

$$R = A\,tg\,z_0 - B\,tg^3 z_0 . \qquad \text{(II)}$$

Ako se ne iziskuje naročita tačnost, može se, za zenitske daljine manje od 45°, astronomska refrakcija i jednostavno smatrati proporcionalnom tangensu posmatrane zenitske daljine. Drugim rečima, refrakcija se može predstaviti izrazom

$$R = k\,tg\,z_0 , \qquad \text{(III)}$$

gde se koeficijent k zove konstanta refrakcije i ima za vrednost, pri 0°C i 760 mm visine živina stuba, k = 60".3.

3. – Tablice astronomske refrakcije. Izračunavanje vrednosti astronomske refrakcije, u svakom konkretnom slučaju, olakšano je tablicama za refrakciju (v. Tablice na str.). Ove se sastoje iz: Tablice takozvane normalne, ili srednje, refrakcije, u kojoj nalazimo, za sve zenitske daljine od 0° do 88°, vrednosti refrakcije, pri temperaturi 0°C, visini od 760 mm živina stuba, na morskom nivou i geografskoj širini 45°; i Tablica popravaka (τ i β) pomenutih srednjih vrednosti za pročitana stanja termometra, odn. barometra, kako bi se dobila prava vrednost refrakcije.

Označimo vrednost srednje refrakcije, dobivenu iz prve tablice, (ako treba interpolovanu) za posmatranu zenitsku daljinu, sa R_0. Ako sa pročitanim stanjem termometra uzmemo iz gornje tablice vrednost faktora (τ) ; sa pročitanim stanjem barometra uzmemo iz donje tablice faktor (β) , — vrednost stvarne refrakcije dobiva se iz izraza:

$$R = R_0 (1+\tau)(1+\beta). \qquad \text{(IV)}$$

4. Izrazi za dejstva refrakcije

A. — Dejstvo refrakcije na izlaz, odn. zalaz, nebeskog tela. — Usled dejstva refrakcije, posmatrač sa Zemlje vidi izlaz nebeskog tela pre no što ono dospe u njegov horizont, a zalaz vidi pošto se telo stvarno već spusti pod njegov horizont.

Ako iznos refrakcije u horizontu (za $z = 90^{\circ}$) označimo sa dz (= 35'), njeno dejstvo na trenutak izlaza, odnosno zalaza, nebeskog tela deklinacije δ, na geografskoj širini φ, dato je izrazom

$$dH = dz \sec\varphi \sec\delta \operatorname{cosec} H_0,$$

gde je H_0 odredjeno izrazom $\cos H_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$

Promena u azimutu izlaza, odnosno zalaza, data je izrazom

$$dA = dz \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} A_0,$$

gde je A_0 odredjeno izrazom $\cos A_0 = -\sin\delta \sec\varphi.$

B. — Dejstvo refrakcije na ekvatorske koordinate.

$$dH \cos\delta = dz \sin q,$$
$$d\delta = -dz \cos q,$$
$$dq = -dz \operatorname{tg}\delta \sin q \operatorname{tg} z,$$

gde q predstavlja paralaktički ugao kod tela (Σ') u položajnom sfernom trouglu $PZ\Sigma$.

5. Izraz za depresiju horizonta.

Neka na sl. 10 predstavljaju:

P — posmatračevo oko na uzvišenju h (= AP) nad morskom površinom;

ABB_r — deo morske (sferne) površine sa središtem u O;

H_1H_2 — horizontalnu ravan od koje posmatrač meri visine nebeskih tela;

B — tačku do koje bi dopirao posmatračev vid da nema atmosfere;

B_r — tačku do koje kroz atmosferu dopire posmatračev vid;

Δ — ugao pod kojim posmatrač vidi tačku B_r (odredjen horizontalnom ravni i tangentom TP, na putanju zraka u tački P) i koji

smo nazvali depresija horizonta;

ε — u lučnim minutama predstavlja daljinu vida u nautičkim miljama.

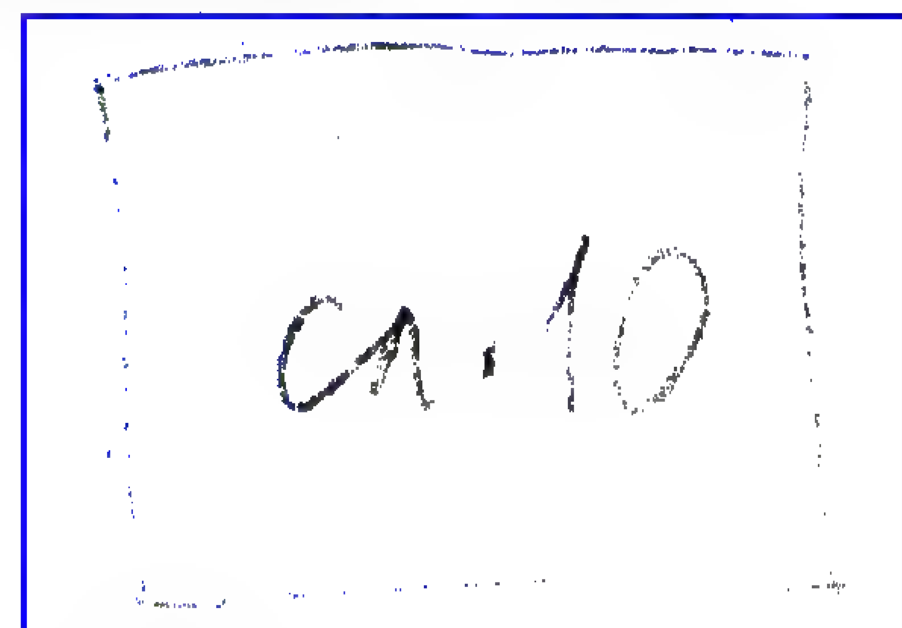
I sa slike vidimo da prisustvo atmosfere, dakle (terestrička) refrakcija, smanjuje depresiju horizonta (jer je $\Delta < \widehat{BPH_1}$), a povećava daljinu posmatračeva vida (za $\widehat{BB_r}$).

Da bismo došli do izraza za Δ i ε, označićemo:

poluprečnik Zemljine sfere sa $R = OA = OB_r$;

poluprečnik putanje zraka, koji ćemo izjednačiti sa kružnim lukom — sa $\rho = CP = CB_r$;

duž CA sa s.



Tako imamo iz trougla AOC:

$$s^2 = R^2 + (\rho - R)^2 + 2R(\rho - R)\cos\varepsilon .$$

Primetimo li da je ugao ε neznatan, jer je i visina h neznatna, i uzmemo da je

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 ,$$

poslednja jednačina će preći u

$$s^2 = \rho^2 - R(\rho - R)\varepsilon^2 .$$

S druge strane, iz trougla ACP imamo

$$h^2 = \rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos\gamma .$$

Primetimo li da je i ugao γ, iz već pomenutog razloga, neznatan, i uzmemo li $\cos\gamma = 1$, iz poslednje jednačine dobivamo

$$s = \rho - h .$$

Unesemo li ovu vrednost za s u prethodnu jednačinu, nalazimo

$$R(\rho - R)\varepsilon^2 = 2\rho h - h^2 .$$

Ako još kvadrat visine, na desnoj strani, zanemarimo, nalazimo

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\rho h}{R(\rho - R)}} .$$

Za depresiju horizonta, $\Delta = \widehat{TPH_1} = \widehat{APC}$, nalazimo iz trougla APC,

$$\sin\Delta = \frac{\rho - R}{\rho}\sin\varepsilon ,$$

odnosno, iz već pomenutog razloga,

$$\Delta = \frac{\varrho - R}{\varrho}\sqrt{\frac{2\varrho h}{R(\varrho - R)}} = \sqrt{\frac{2(\varrho - R)h}{\varrho R}}.$$

Iz dobivenih izraza vidimo da i daljina vida i depresija horizonta zavise i od poluprečnika krivine putanje zraka. Taj poluprečnik je, opet, funkcija temperature, gustine, pritiska atmosfere duž puta kojim svetlost prolazi. A ti nam podaci nisu poznati, odnosno samo su nam približno poznati. Prema tome, i tražene vrednosti za depresiju horizonta i daljinu vida biće, u svakom slučaju, samo približne. Duga praksa je pokazala da se sa prosečnom vrednošću $\varrho = 6R$ dobivaju dovoljno tačni rezultati za sve svrhe. Ako, dakle, za Zemljin poluprečnik uzmemo $R = 6370 \times 10^3$ m, visinu posmatračeva oka izražavamo u metrima, nalazimo za tražene veličine, vodeći računa o terestričkoj refrakciji, i to za depresiju horizonta

$$\Delta = 3437'.75 \times 5.12 \times 10^{-4}\sqrt{h} = 1'.76\sqrt{h};$$

za daljinu (D) vida, u nautičkim miljama,

$$D = 3437'.75 \times 6.14 \times 10^{-4}\sqrt{h} = 2'.11\sqrt{h}.$$

V. Елементи теорије кретања планета и комета

1. Oznake i nazivi u eliptičkoj putanji (v. sl. 78).

S — Sunce

P — planeta

$A\Pi$ — apsidna linija = velika osa

Π — perihel

A — afel

O — središte elipse

F — prazna žiža = antifokus

SR — parametar

$O\Pi = OA = a$ — velika poluosa

$OB = b$ — mala poluosa

$OS : O\Pi = OS : SB = e = \sin\varphi$ — ekscentričnost

(FO : OB =)

φ — ugao ekscentričnosti

$SP = r$ — radijevektor = poteg

$FP = \varrho$ — antifokusni poteg

v — prava anomalija

E — ekscentrična anomalija

w — antifokusna anomalija

сл. 11

сл. 12

2. Važniji obrasci

$$p = \begin{cases} a(1-e^2), \\ a\cos^2\varphi, \\ b\sqrt{1-e^2}; \end{cases} \qquad \cos\varphi = \sqrt{1-e^2}, \quad b = a\sqrt{1-e^2}, \quad b^2 = pa;$$

$$\sqrt{1\pm e} = \sqrt{2}\cos(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\varphi), \quad \sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \sqrt{1+e}\ \ \sqrt{1-e} = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \qquad \rho\sin w = a\sqrt{1-e^2}\sin E,$$

$$r\cos v = a(\cos E - e), \qquad \rho\cos w = a(\cos E + e),$$

$$\sin v = \sqrt{1-e^2}\sin E(1-e\cos E)^{-1}, \qquad \sin w = \sqrt{1-e^2}\sin E(1+e\cos E)^{-1},$$

$$\cos v = (\cos E - e)(1-e\cos E)^{-1}, \qquad \cos w = (\cos E + e)(1+e\cos E)^{-1},$$

$$r\sin^2\tfrac{1}{2}v = a(1+e)\sin^2\tfrac{1}{2}E, \qquad \rho\sin^2\tfrac{1}{2}w = a(1-e)\sin^2\tfrac{1}{2}E,$$

$$r\cos^2\tfrac{1}{2}v = a(1-e)\cos^2\tfrac{1}{2}E, \qquad \rho\cos^2\tfrac{1}{2}w = a(1+e)\cos^2\tfrac{1}{2}E,$$

$$tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\tfrac{1}{2}E, \qquad tg\tfrac{1}{2}w = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\tfrac{1}{2}E,$$

$$\sin E = \sqrt{1-e^2}\sin v(1+e\cos v)^{-1} = \sqrt{1-e^2}\sin w(1-e\cos w)^{-1} = \sqrt{\sin v\sin w}\sec(v-w),$$

$$\cos E = (\cos E + e)(1+e\cos v)^{-1} = (\cos w - e)(1-e\cos w)^{-1} = \cos(v+w)\sec(v-w),$$

$$tg^2\frac{E}{2} = tg\tfrac{1}{2}v\, tg\tfrac{1}{2}w.$$

3. Keplerovi zakoni

I. Putanje planeta su elipse u čijoj jednoj žiži se nalazi Sunce.

$$r = p(1+e\cos v)^{-1} = a(1-e^2)(1+e\cos v)^{-1}; \qquad x = a\cos E, \quad y = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\sin E;$$

$$r = a(1-e\cos E); \qquad \rho = a(1+e\cos E).$$

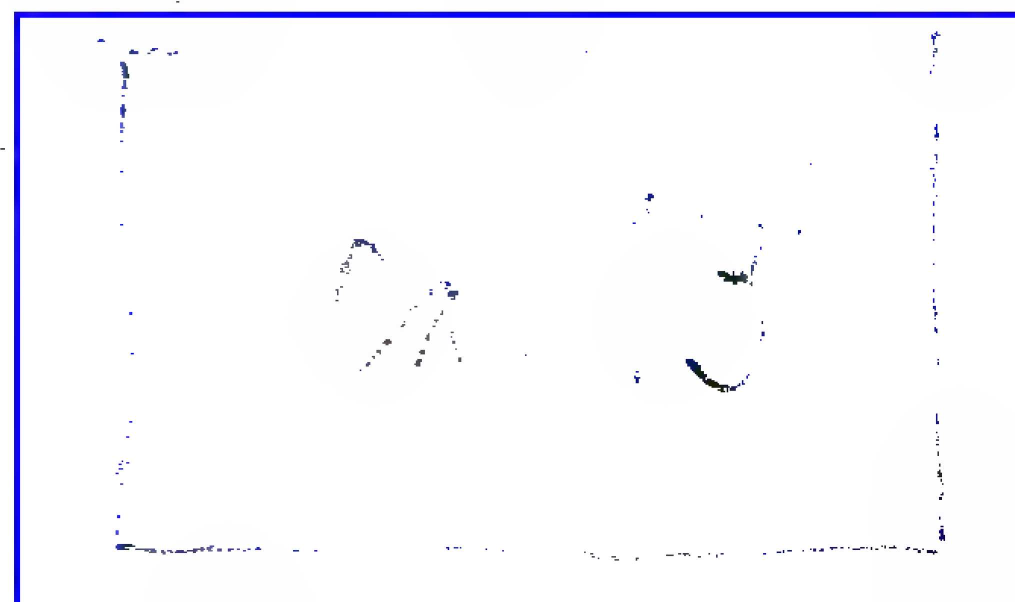
II. Radijivektori planeta prelaze za jednaka vremena jednake površine.

Sa sl. 13 se vidi da je površina (ΔS) eliptičkog sektora SP_iP_j stalno sadržana izmedju dveju odredjenih površinâ: kružnih sektorâ $SP_iQ_j = \frac{1}{2}r_i\Delta v$ i $SP_jQ_i = \frac{1}{2}r_j^2\Delta v$, ili da je

$$\frac{1}{2}r_i^2\Delta v < \Delta S < \frac{1}{2}r_j^2\Delta v;$$

dakle i

$$\frac{1}{2}r_i^2\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{1}{2}r_j^2\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$



Odavde sleduje, ako pustimo da $\Delta t \to 0$, za površinsku brzinu izraz

$$2\dot{S} = r^2\dot{v}.$$

Drugi Keplerov zakon kaže da je

$$r^2\dot{v} = 2\dot{S} = C, \text{ или, у правоуглим координатама, } 2\dot{S} = x\dot{y} - y\dot{x} = C.$$

Integraljenjem drugog dela leve od gornjih jednačina dobivamo

$$S = \tfrac{1}{2}C(t - t_0),$$

relaciju koja kaže da su površine što ih prelazi radijevektor planete - proporcionalne vremenu.

Za vrednost ove konstante dobivamo, ako primetimo da za vreme (T) jednog planetina obilaska njen radijevektor predje površinu cele (putanjske) elipse,

$$CT = 2ab\pi,$$

a odavde

$$C = \frac{2ab\pi}{T} = \frac{2\pi a^2}{T}\sqrt{1-e^2}.$$

(III) Kvadrati trajanja obilazaka planetâ oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosa njihovih putanja.

$$T_1^2 : a_1^3 = T_2^2 : a_2^3 = T_3^2 : a_3^3 = \cdots\cdots$$

4. Zakon opšte gravitacije

Svake dve materijalne čestice — masâ, recimo, m_1 i m_2 — privlače se silom (F) koja je pravo proporcionalna proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenja (r) jedne od druge,

$$F = k^2\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gde je sa k^2 označena gravitaciona konstanta. U jedinicama CGS - sistema to je sila kojom se uzajamno privlače dve materijalne čestice, jediničnih masâ ($m_1 = m_2 = 1g$), sa jedinice udaljenja jedna od druge ($r = 1$ cm).

Dimenzije su ove konstante $M^{-1}L^3T^{-2}$. Numerička njena vrednost zavisi od usvojenih jedinicâ.

Izmedju konstanata C i k postoji veza koju možemo lako postaviti. Prema zakonu opšte gravitacije imamo za ubrzanja u odnosu prema centru

masa:

planete, mase m_o, (u smeru ka Suncu): $\gamma_m = -k^2 \frac{M}{r^2}$;

Sunca, mase M, (u smeru ka planeti): $\gamma_M = +k^2 \frac{m_o}{r^2}$;

za relativno ubrzanje planete, u odnosu prema Suncu $\gamma = -k^2 \frac{M+m_o}{r^2}$.

S druge strane, ima m_o za radijalno ubrzanje planete prema Suncu

$$\gamma = -\frac{C^2}{pr^2}.$$

I tako za traženu vezu izmedju konstanata C i k dobivamo

$$C = k\sqrt{p}\sqrt{M+m_o},$$

odnosno, ako Sunčevu masu usvojimo za jedinicu,

$$C = k\sqrt{p}\sqrt{1+m}.$$

5. – Tačan oblik III Keplerova zakona. Izjednačavanjem kvadrata poslednjeg sa ranije nadjenim izrazom za dvostruku brzinu,

$$k^2 a(1-e^2)(1+m) = \frac{4\pi^2 a^4}{T^2}(1-e^2),$$

nalazimo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(1+m)}{4\pi^2}.$$

Drugim rečima, za dve planete, okarakterisane veličinama-prva sa: m, a, T; druga sa: m_1, a_1, T_1 imaćemo za tačan oblik III Keplerova zakona

$$\frac{a^3}{T^2}\frac{1}{1+m} = \frac{a_1^3}{T_1^2}\cdot\frac{1}{1+m_1}.$$

6. – Keplerova jednačina. Desnu stranu jednačine koja izražava II Keplerov zakon,

$$r^2 dv = C dt,$$

možemo izraziti pomoću ekscentrične anomalije i dobivamo

$$a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)dE = C dt = \frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2}dt,$$

odnosno

$$(1-e\cos E)dE = \frac{2\pi}{T}dt.$$

Integraljenjem dobiva se Keplerova jednačina

$$E - e\sin E = n(t-t_o) = M,$$

gde su uvedene oznake

n - za srednje siderično kretanje u jedinici vremena (obično dnevno);

t_o - za trenutak prolaza planete kroz perihel, kad je E = 0;

M - za srednju anomaliju planete.

7. Rešavanje Keplerove jednačine. Keplerova jednačina omogućuje da se odredi ekscentrična anomalija (E), kad su date srednja anomalija (M) i ekscentričnost (e) heliocentrične putanje tela. Drugim rečima, omogućuje da se, za dati trenutak, odredi položaj tela na putanji. Jednačina se, kao transcendentna, rešava sukcesivnim aproksimacijama. Postoji veliki broj metoda za rešavanje Keplerove jednačine. Ovde ćemo prikazati tri od ovih metoda. [redacted]

Metoda pomoću reda. U 13. dat je red koji ekscentričnu anomaliju predstavlja beskonačnim redom po sve većim stepenima ekscentričnosti sa koeficijentima sin i cos multipala srednje anomalije,

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{1}{3!\,2^2}e^3(3^2\sin 3M - 3\sin M) + \cdots\cdots$$

Ako je ekscentričnost putanje malena, red je brzo konvergentan, što znači da se, za dato e i M, može vrednost ekscentrične anomalije dobiti dovoljno tačna i sa prva dva do tri člana. Ukoliko je ekscentričnost veća, mora se i više članova reda uzeti da bi se postigla odredjena tačnost.

Pri tome treba imati u vidu da vrednosti e, e^2, e^3, ..., moraju biti izražene u uglovnim jedinicama.

Metoda sukcesivnih aproksimacija. Najneposrednija i najpoznatija je metoda kojom se Keplerova jednačina,

$$E - e\sin E = M$$

rešava polazeći od jedne približne vrednosti ekscentrične anomalije, dakle približnog rešenja jednačine. Niže ćemo videti kako se nalazi ovo približno rešenje. Neka to bude E_1. Popravku ovog približnog rešenja, to jest onu malu veličinu koju bi trebalo dodati toj polaznoj, približnoj, vrednosti, da bi se dobila tačna vrednost ekscentrične anomalije, označimo sa ΔE_1. Znači

$$E_1 + \Delta E_1 - e\sin(E_1 + \Delta E_1) = M,$$

odnosno, ako razvijemo,

$$E_1 + \Delta E_1 - e\sin E_1\cos\Delta E_1 - e\cos E_1\sin\Delta E_1 = M.$$

Ako je E_1 bilo izabrano dovoljno približno tačnoj vrednosti, popravka ΔE_1 će biti mala količina. Ukoliko je manja, utoliko će se pre, u poslednjoj jednačini, moći uzeti $\cos\Delta E_1 = 1$ i $\sin\Delta E_1 = \Delta E_1$. U tom slučaju će poslednja jednačina preći u

$$(E_1 - e\sin E_1) + \Delta E_1(1 - e\cos E_1) = M.$$

Kako su E_1 i e poznate veličine, i vrednost prvog člana na desnoj strani je poznata; označimo je sa M_1. Za nepoznatu popravku ćemo, prema tome, imati

$$\Delta E_1 = (M - M_1)(1 - e\cos E_1)^{-1}.$$

No ($E_1 + \Delta E_1$) još ne mora biti i, mahom, i nije rešenje date Keplerove jednačine, već samo njegova približnija vrednost od one polazne vrednosti. Tačnija od ove biće — ako stavimo da je $E_2 = E_1 + \Delta E_1$ — $E_2 + \Delta E_2$. I tako ćemo imati

$$E_2 + \Delta E_2 - e\sin(E_2 + \Delta E_2) = M.$$

Za nepoznatu popravku ove, približnije, vrednosti nepoznate dobićemo (sad)

$$\Delta E_2 = (M - M_2)(1 - e\cos E_2)^{-1}.$$

Ovaj postupak se mora ponoviti dok se ne dodje do vrednosti ($E_k + \Delta E_k$), koja zadovoljava datu Keplerovu jednačinu.

Kao prva približna vrednost (E_1) može se uzeti vrednost date srednje anomalije (M). Kao tačnija se može uzeti (v. u 13. red za E)

$$E_1 = M + e\sin M, \quad \text{ili još tačnija} \quad E_1 = M + e\sin M + \tfrac{1}{2}e^2\sin 2M,$$

to jest vrednost prvih triju članova reda.

Postoje i tablice (v. Tabl.   ), sa dvostrukim argumentom — srednjom anomalijom, kao vertikalnim (0° - 180°) i ekscentričnošću, kao horizontalnim — iz kojih se može odrediti (bilo računski, bilo grafički) približna vrednost ekscentrične anomalije, rešenja date Keplerove jednačine.

~~Приказаћемо три од ових метода: прву, помоћу бесконачног реда; другу, помоћу сукцесивних апроксимација, која се сматра као најприступачнија; и трећу, Гаусову методу сукцесивних апроксимација, која се сматра као најелегантнија.~~

(Гаусова метода. Приказаћемо је онако како је сам Гаус приказао, у свом познатом делу „Theoria motus corporum coelestium (§ 13), и илустроваћемо је на истом нумеричком примеру.

Дате су величине: $M = 332^\circ 28' 54''.77$ и $e = \sin\varphi = 0\cdot 245\,3162$, треба решити једначину

$$E - e\sin E = M.$$

Ако је E_1 приближно решење, нека је тачно $E = E_1 + x$. Напомињемо да се нумерички рад овом методом изводи логаритмима са седам (евентуално и осам) децимала.

Изразимо e у секундама и означимо са e''; дакле $e \times 206\,264''.8 = e''$. Потражимо, затим, у логаритамским таблицама $\log\sin E_1$ и $\log(e''\sin E_1)$, и извадимо, уједно, прираштај $\log\sin E_1$ за $1''$ прираштаја угла E_1 — и означимо га са λ — и прираштај $\log(e''\sin E_1)$ за јединицу броја $e''\sin E_1$ — и означимо га са μ.

Метода почива на претпоставци да се може сматрати — ако је E_1 довољно приближно решење, дакле x мала величина — да је прираштај логаритма синуса пропорционалан прираштају угла, дакле да је

$$\log\sin(E_1+x) - \log\sin E_1 = \pm\lambda x;$$

и да је прираштај броја пропорционалан прираштају његова логаритма, дакле

$$\frac{e''\sin(E_1+x) - e''\sin E_1}{1} = \frac{1}{\mu}\left\{\log[e''\sin(E_1+x)] - \log(e''\sin E_1)\right\}.$$

Из ових релација следује

$$e''\sin(E_1+x) - e''\sin E_1 = \frac{1}{\mu}\left[\log\sin(E_1+x) - \log\sin E_1\right] = \pm\frac{\lambda}{\mu}x.$$

Према томе ћемо за тражено решење имати

$$E_1 + x = M - e''\sin(E_1+x) = M + e''\sin E_1 \pm \frac{\lambda}{\mu}x, \qquad (1)$$

односно

$$M + e''\sin E_1 - E_1 = x\left(1 \mp \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Одавде налазимо

$$x = \frac{\mu}{\mu\mp\lambda}\left(M + e''\sin E_1 - E_1\right).$$

И ако ову вредност унесемо у последњи члан (1), имаћемо за тражено решење

$$E_1 + x = M + e''\sin E_1 \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda}(M + e''\sin E_1 - E_1),$$

у којем треба узимати: горњи знак – у првом и четвртом, а доњи знак – у другом и трећем квадранту.

Ево како та метода изгледа у примени и шта може да дâ. Са вредностима које смо дали за поретку треба, пре свега, израчунати e''.

$[e]$	9.389 7263,
$[\rho'']$	5.314 4251,
$[e'']$	4.704 1514;

Као приближно решење, од којега ћемо поћи, узећемо $E_1 = M + e''\sin M$, заокружено на најближи цео број степени.

Са $[\sin M]$ 9.664 6482n налазимо $[e''\sin M]$ 4.368 7996n, тојест $e''\sin M = -23\,377''.6 = -6^\circ\ 29'\ 37''.6$; тако да за приближно решење добивамо $E_1 = 326^\circ\ 0'\ 0''$.

Шема према којој се изводи нумерички рад изгледа овако:

E_k	326° 0′ 0″,	324° 16′ 19″.60	324° 16′ 29″.47
$[\sin E_k]$	9.747 5657n	9.766 3656n	9.766 3367n
$[e''\sin E_k]$	4.451 7131n	4.470 5170n	4.470 4881n
$\lambda =$	31	29	30
$\mu =$	153	147	147
$\mu - \lambda =$	122	118	117
$\lambda : (\mu - \lambda) =$	0.254	0.2458	0.2564
$e''\sin E_k =$	− 28 295″.22	− 29 547″.25	− 29 545″.28
$(e''\sin E_k)^\circ =$	− 7° 51′ 35″.22	− 8° 12′ 27″.25	− 8° 12′ 25″.28
$M + e''\sin E_k =$	324 37 19.55	324 16 27.52	324 16 29.49
$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\Delta_k^{\circ} =$	− 0 20 59.95	+ 7.92	+ 0.01
$\Delta_k^{\circ} =$	− 1° 22′ 40″.45	+ 1.95	+ 0.02
$\Delta_k'' =$	− 4960″.45		

$E = 324^\circ\ 16'\ 29''.50.$

До овог резултата се долази и са свега две апроксимације, ако се за прву приближну вредност узме из таблице (на стр.   ) интерполована вредност $E_1 = 324^\circ\ 16'\ 37''$.

8. — Razvijanja E, v, w, r u redove. Pobrojane veličine, kao i razne njihove funkcije, daju se lako razviti u beskonačne redove po sve većim stepenima ekscentričnosti, a sa koeficijentima sin i cos multipala srednje anomalije. Svi ti redovi su, blagodareći okolnosti što su ekscentričnosti planetskih putanja neznatne, brzo konvergentni, tako da već i dva, tri prva njihova člana daju dovoljno približne brojne vrednosti razvijene veličine. Zato dajemo ovde, naravno, bez dokaza, one od tih redova, tačnije rečeno, njihove prve članove, kojima ćemo se koristiti pri rešavanjima pojedinih zadataka.

R e d z a E:

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{1}{3!\,2^2}e^3(3^2\sin 3M - 3\sin M) + \cdots;$$

R e d z a v:

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \frac{1}{12}e^3(13\sin 3M - 3\sin M) + \cdots;$$

R e d z a w:

$$w = M + \qquad + \frac{1}{4}e^2\sin 2M - \frac{1}{6}e^3(\sin 3M - 3\sin M) + \cdots;$$

R e d z a r:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos M - \frac{1}{2}e^2(\cos 2M - 1) - \frac{1}{2!\,2^2}e^3(3\cos 3M - 3\cos M) - \cdots.$$

Kretanja po paraboli

9. — Osnovne jednačine. Ako je $e = 1$, putanja tela je parabola, u čijoj se žiži nalazi Sunce, S (v. sl. 14). Tačka Π putanje zove se perihel. Ako se sa r označi radijevektor, a sa v prava anomalija tela, jednačina putanje je

$$r = p(1+\cos v)^{-1} = q\sec^2\tfrac{1}{2}v,$$

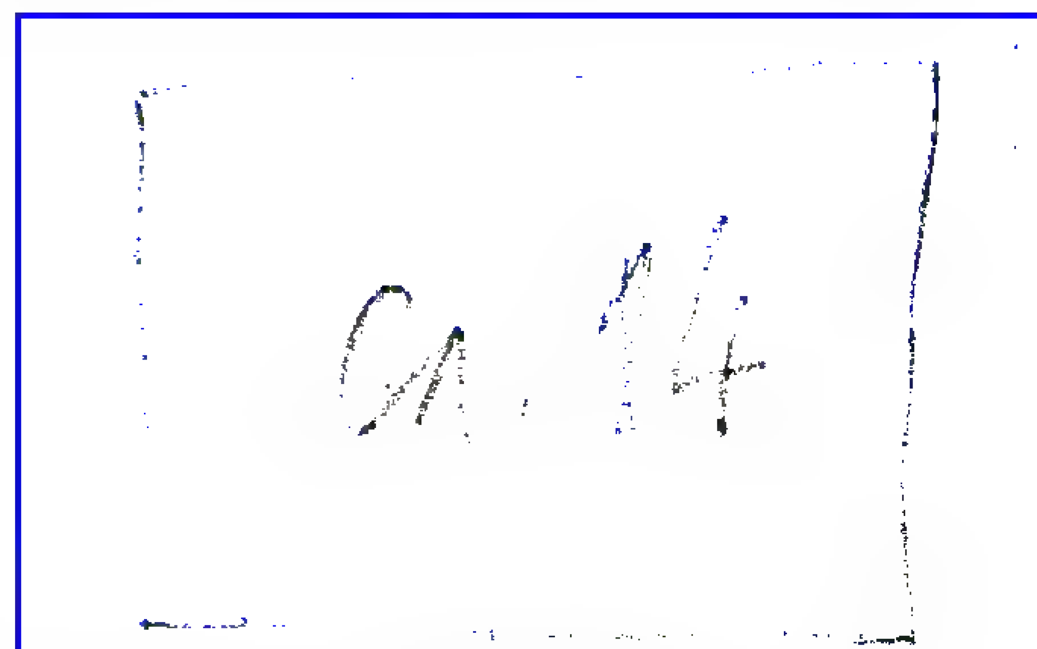
gde $q = \frac{1}{2}p$ predstavlja perihelsku daljinu tela (komete) od Sunca.

Jednačina koja izražava zakon površina,

$$r^2\,dv = C\,dt = k\sqrt{p(1+m)}\,dt,$$

postaje sad

$$q^2\sec^4\tfrac{1}{2}v\,dv = k\sqrt{2q(1+m)}\,dt.$$



Ako je telo zanemarljive mase, dakle $m = 0$, poslednja jednačina postaje

$$2(1+\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}v)\,d(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}v) = k\sqrt{2}\,q^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Odatle, integraleći, dobivamo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^{3}\frac{1}{2}v = k\sqrt{2}\,q^{-\frac{3}{2}}(t-t_0),$$

gde t_0 označava trenutak prolaza tela (komete) kroz perihel, ili trenutak kad je $v = 0$.

Ako se poslednja jednačina svede na oblik

$$25\operatorname{tg}^{3}\frac{1}{2}v + 75\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \frac{75k}{\sqrt{2}}\,q^{-\frac{3}{2}}(t-t_0),$$

nalazi se, kako v, za datu vrednost $(t - t_0)$, tako i $(t - t_0)$, za dato v, pomoću poznatih Barker-ovih tablica. — латиницом!

VI. [redacted] Sunčevo prividno godišnje kretanje

1. Sunčevo prividno kretanje. U odnosu prema nekretnicama Sunce neprekidno menja svoj položaj na prividnoj nebeskoj sferi. Pomera se od zapada ka istoku. Rektascenzija mu se neprekidno povećava — iako ne uniformno — prosečno za po 1°, ili 4^m, dnevno; dok mu deklinacija prolazi kroz sve vrednosti od — 23° 27' do + 23° 27' i ponovo do — 23° 27', tako da se posle godinu ($365\frac{1}{4}$) dana Sunce ponovo nalazi na svom polaznom položaju (360°).

U tom razmaku podleži neprekidnim promenama i vrednost Sunčeva prividnog prečnika. Njegova veličina prolazi kroz sve vrednosti izmedju 32'36" i 31'33" i ponovo do 32'36". Kako su prividni prečnici obrnuto proporcionalni daljinama tela od posmatrača, ovo dokazuje da se i daljine Sunca od Zemlje, u toku godine, neprekidno menjaju izmedju odredjenih granica.

2. Oblik i dimenzije Sunčeve prividne putanje. Pomoću ovih podataka može se konstruisati putanja koju Sunce prividno opiše u toku godine i odrediti njen oblik, dimenzije, položaj u prostoru i njena orijentacija. Kad se konstruiše vidi se da je ta putanja elipsa (v.sl. 15), čiju jednu od žiža zauzima Zemlja (T); ta elipsa je ekscentričnosti oko 1/60, dakle jedva primetne, što će reći da je skoro kružna oblika. Tom puta-

njom Sunce se kreće po Keplerovim zakonima: radijevektor Zemlja - Sunce prevaljuje za jednaka vremena jednake površine: $S_1TS_2 = S_3TS_4 = \ldots. C$.

Tačka Π na putanji, koja odgovara najmanjoj daljini Sunca od Zemlje, zove se p e r i g e j; tačka A, koja odgovara najvećoj udaljenosti Sunca od Zemlje, zove se a p o g e j. Obe zajedno zovu se a p s i d i; prava što ih spaja - a p s i d n a l i n i j a; to je ujedno i velika osa putanje. сл. 15 сл. 16

U perigejski položaj Sunce dospeva oko 31. decembra, u apogejski oko 1. jula. No ovo Sunčevo kretanje, kao i njegova putanja — prividni su samo: oni su posledica Zemljina heliocentričnog kretanja. Na sl. 16 je ovo i predočeno. Dok Zemlja, oko nepokretnog Sunca, u jednoj od žižâ (S) njene (puno izvučene) heliocentrične putanje, stvarno predje iz položaja T u položaj T_1, dakle radijevektor, ST, opiše površinu TST_1, — za posmatrača sa Zemlje, koji ovu smatra nepokretnom, Sunce za to vreme predje (u istom smeru), na svojoj prividnoj putanji, površinu STS_1 = površini TST_1. Dok Zemlja, dakle, stvarno, prolazi kroz svoje heliocentrične položaje: T, T_1, T_a, ... T — nama, sa Zemlje, izgleda kao da je Sunce, za to vreme, prošlo kroz položaje: S, S_1, S_a, ... S, na njegovoj p r i v i d n o j putanji.

3. Sunčeva prividna godišnja putanja na nebeskoj sferi. Sunčevim prividnim kretanjem odredjen je u prostoru položaj ravni u kojoj se ona obavlja (v. sl. 17). Ova ravan, u preseku sa prividnom nebeskom sferom, odredjuje veliki krug koji zovemo e k l i p t i k a; a samu ravan zovemo ekliptička ravan. Ova ravan je nagnuta prema ravni nebeskog ekvatora pod uglom od oko 23°27'. One se, dakle, seku duž prave koja se zove l i n i j a e k v i n o k c i j a (ekvinokcijska ili ravnodnevička linija). Ovim pravcem su odredjene i tačke preseka ekliptike i nebeskog ekvatora, koje zovemo e k v i n o k c i j s k i m (ravnodnevičkim) tačkama. Onu od ovih dveju kroz koju Sunce prolazi kad njegova deklinacija prelaze sa negativnih (južne strane ekvatora) na pozitivne vrednosti (severnu stranu nebeskog ekvatora) — a prolazi oko 21. marta — zovemo prolećnjom ekvinokcijskom tačkom. Obeležavamo je znakom ♈. Pravac ove usvo-

jen je kao početni od kojega se računaju rektascenzije nebeskih tela. Njoj suprotnu tačku, kroz koju Sunce prolazi pri prelazu sa pozitivnih na negativne deklinacije — a prolazi oko 23. septembra — zove se jesenjom ekvinokcijskom tačkom. Obeležavamo je znakom ♎. Сл. 17

Normala na ekvinokcijskoj liniji zove se l i n i j a s o l s t i c i j a ($E_e E_h$). Presek ove sa ekliptikom odredjuje, na severnoj nebeskoj hemisferi, letnju solsticijsku tačku (E_e), u kojoj Sunce dostiže najveću pozitivnu deklinaciju — oko 22. juna; na južnoj nebeskoj hemisferi, zimsku solsticijsku tačku (E_h), u kojoj dostiže — oko 22. decembra — svoju najveću negativnu deklinaciju. Normala na ekliptičkoj ravni, ili ekliptička osa, odredjuje ekliptičke polove: severni (Π_n) i južni (Π_s). Сл. 18

Ekliptička ravan i njena osa iskorišćene su za uvodjenje novog koordinatnog sistema, takozvanog ekliptičkog koordinatnog sistema, koji takodje omogućuje da se jednoznačno odredi položaj tačke na prividnoj nebeskoj sferi. Za početak ovog koordinatnog sistema (v. sl. 18) može se uzeti bilo Sunčevo središte (heliocentrični), bilo Zemljino središte (geocentrični), bilo neka treća tačka. Njegova osnovna ravan je ekliptička ($\Upsilon Q E_e ♎ E_h$); početni pravac u njoj je — pravac (OΥ) ka proletnjoj ekvinokcijskoj (Υ) tački. Smer je usvojen direktni; to jest smer Zemljina heliocentričnog ili Sunčeva prividnog godišnjeg kretanja.

Koordinate u ovom koordinatnom sistemu (v. sl. 18) zovu se longituda (λ) i latituda (β) tačke. Longituda se računa od 0° do 360°; latituda od 0° do 90°, pozitivno ka severnom, negativno ka južnom ekliptičkom polu. Prema tome ekliptičke koordinate tačke Σ (na sferi poluprečnika uzeta za jedinicu) su $\lambda = \Upsilon Q = \widehat{\Upsilon O Q}$ = sfernom uglu $\Upsilon \Pi_n \Sigma$; a latituda $\beta = Q\Sigma = \widehat{QO\Sigma}$.

Sunčev položaj na ekliptici odredjen je njegovom longitudom; latituda Sunca je stalno jednaka nuli.

Obrasci za odredjivanje ekliptičkih koordinata (λ, β) kad su date ekvatorske ($\alpha, \delta, \varepsilon$), i obrnuto, dati su u Pregledu obrazaca, u prvom delu Zbirke rešenih zadataka iz Opšte astronomije, na str. 14 i 15. Kad se

radi o Suncu, čija je latituda nula, pomenuti obrasci postaju jednostavniji; imamo, u tom slučaju,

$$\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,\qquad \sin\delta = \sin\lambda\sin\varepsilon,$$
$$\sin\lambda\sin\varepsilon = \sin\delta\qquad tg\,\delta = \sin\alpha\, tg\,\varepsilon,$$
$$\sin\lambda\cos\varepsilon = \cos\delta\sin\alpha,\qquad tg\,\alpha = tg\,\lambda\cos\varepsilon.$$
$$tg\,\lambda = tg\,\alpha\cos\varepsilon;$$

4. Pojedinosti Sunčeva prividnog dnevnog kretanja. Sunčevo prividno godišnje kretanje, ili neprekidne promene Sunčeve longitude povlače za sobom neprekidne promene kako njegovih rektascenzija tako i deklinacija. Samo, dok promene rektascenzija iznose prosečno oko 1° ili 4^{m} dnevno, promene deklinacije kreću se izmedju 0' i, najviše, 24' dnevno. Dakle, Sunce u toku prividnog dnevnog kretanja nebeske sfere ne opisuje — kao što nekretnice to čine — neprekidno isti paralel.

Na sl. 19 prikazana je (shematski) Sunčeva putanja na nebeskoj sferi usled njena prividnog dnevnog kretanja. Na slici predstavljaju:

Сл. 19

$E\gamma QE'_q$ — nebeski ekvator; P_n - severni nebeski pol;

$E_n S_2 S_1 \gamma U E_s$ — ekliptiku; Π_n - severni ekliptički pol;

$E_1 S_1 E'_1$ — nebeski paralel koji bi Sunce prividno opisalo kad mu se deklinacija ne bi u toku dana menjala;

$S_1\Sigma_1 E'_2 E_2 S_2 \Sigma_2$ — Sunčeva dnevna putanja na prividnoj nebeskoj sferi u razmaku dok na ekliptici predje iz položaja S_1 u S_2.

Zato, ako se traži veća tačnost, ili kad treba da se predstavi stvarni tok pojava i pojedinosti Sunčeva prividnog kretanja na raznim tačkama Zemljine površine, — moraju se uzimati u obzir promene koje u tim pojedinostima nastaju usled neprekidnih promena deklinacije i Sunčevih koordinata uopšte.

a) *Promene azimuta tačaka izlaza.* Azimuti (A) tačaka izlaza i zalaza, tela sa deklinacijom δ, na geografskoj širini φ, odredjen je izrazom

$$\cos A = -\sin\delta\sec\varphi.$$

32

ne ekvinokcija: сл. 20 сл. 21

proletnjeg e.: V_+, i jesenjeg e.: V_-,

u poredjenju sa tačkama (W) i azimutima zalazâ pri nepromenjivoj deklinaciji.

b) P o p r a v k a m e r i d i j a n a. Usled neprekidne promene Sunčeve deklinacije, meridijanska ravan nije više ravan simetrije za Sunčevu dnevnu putanju na nebeskoj sferi. Drugim rečima, jednakim azimutima i časovnim uglovima (računatim od meridijana mesta u oba smera) ne odgovaraju jednake Sunčeve visine; i obratno: jednakim Sunčevim visinama s obe strane meridijana ne odgovaraju jednaki azimuti, ni jednaki časovni uglovi (sem u dane solsticija).

Na sl. 22 predstavljeni su, u projekciji na posmatračevu horizontsku ravan: osnovni pravci S - N i E - W, položaji zenita, Z_n, i severnog nebeskog pola (P_n). Sem toga prikazani su shematski delovi prividne dnevne putanje. сл. 22

IV — putanje nekretnice, sa deklinacijom $\varnothing$, u trenucima kad se ova našla na visini h, pre prolaza kroz meridijan (P_nZS) — u položaju I — i, na istoj visini, posle prolaza kroz meridijan — u položaju V;

IV_1 — putanje Sunca, u vreme izmedju zimskog i letnjeg solsticija; drugim rečima dok je $d\varnothing<0$; i to onog dana kad se, na visini h pre prolaza kroz meridijan, našlo jednovremeno sa nekretnicom deklinacije $\varnothing$;

IV_2 — putanje Sunca, u vreme izmedju letnjeg i zimskog solsticija, dakle dok je $d\varnothing>0$; i to onog dana kad se na visini h, posle prolaza kroz meridijan, našlo jednovremeno sa nekretnicom deklinacije $\varnothing$.

Ako sad označimo sa l_e i l_w čitanja horizontalnog kruga (doteranog) teodolita, pri prolazima nekretnice na visini h; p r e i p o s l e prolaza kroz meridijan, na tako zvanim korespondentnim visinama), pravac meridijana — zahvaljujući simetričnosti prividne dnevne putanje nekretnica — odgovaraće čitanju l_o, odredjenim izrazom

$$l_o = \frac{1}{2}(l_e + l_w).$$

Pri posmatranjima Sunca, medjutim, usled promena njegove deklinacije, u prvom slučaju, to jest kad je $d\delta < 0$, ili kad Sunce opiše luk $\dot{I}V_1$ — ako označimo čitanja kruga

pravca $Z_n\dot{I}$ sa l_e, a pravca Z_nV_1 sa l_1, imaćemo

$$l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_1) < l_0,$$

a u drugom slučaju, to jest kad je $d\delta > 0$, ili kad Sunce opiše luk $\dot{I}V_2$ — ako čitanja kruga označimo:

pravca $Z_n\dot{I}$ sa l_e, a pravca Z_nV_2 sa l_2, biće:

$$l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_2) > l_0.$$

Označimo, sad, azimute pravaca: $Z_n\dot{I}$ sa A_e, pravca ZnV_2 sa A_2, a razliku $l_2 - l_w$ sa Δl. Onda sa slike vidimo da će biti, ako još primetimo da je

$$l_w = 360° - A_e,$$

$$\Delta l = l_2 - l_w = A_2 - (360° - A_e) = A_e + A_2 - 360°,$$

to jest

$$l_2 = l_w + A_e + A_2 - 360°.$$

Prema tome je

$$l_m = \frac{1}{2}(l_e + l_2) = \frac{1}{2}(l_e + l_w) + \frac{1}{2}(A_e + A_2 - 360°),$$

to jest

$$l_0 = l_m - \frac{1}{2}\Delta l.$$

Veličina $\frac{1}{2}\Delta l$, za koju treba popraviti aritmetičku sredinu čitanja na horizontalnom krugu što odgovaraju Sunčevim korespondentnim visinama, da bi se dobilo čitanje pravca meridijana — zove se popravka meridijana.

Iznos ove popravke možemo odrediti polazeći od obrasca

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A.$$

Ako ga diferenciramo, smatrajući φ i h kao konstantne veličine (h zbog toga što se radi o korespondentnoj visini), dobićemo

$$\cos\delta\, d\delta = \cos\varphi \cos h \sin A\, dA.$$

Zamenom iz sinusnog obrasca proizvoda

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H,$$

dobivamo za promenu azimuta usled promene deklinacije

$$dA = \sec\varphi \operatorname{cosec} H\, d\delta.$$

Za ovoliko se, dakle, razlikuje azimut pravca posmatranja po prolazu

kroz meridijan (korespondentne visine) od azimuta pravca prvog posmatranja (pre prolaza kroz meridijan).

Označimo sad sa τ vreme proteklo od prvog do drugog posmatranja. Onda se može uzeti da je, u trenutku posmatranja, Sunčev časovni ugao iznosio, približno, $H=\frac{1}{2}\tau$. Ako, sem toga, dnevnu promenu Sunčeve deklinacije označimo sa $\Delta\delta$ i pretpostavimo da se ona, u toku jednog dana, menja proporcionalno vremenu, onda ćemo (moći) staviti

$$d\delta=\frac{\Delta\delta}{24}\tau.$$

U tom slučaju za popravku meridijana nalazimo

$$\frac{1}{2}\Delta l=\frac{1}{2}dH=\frac{\tau}{2}\times\frac{\Delta\delta}{24}\sec\varphi\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\tau.$$

V) P o p r a v k a p o d n e. Kao što aritmetička sredina azimuta Sunčevih korespondentnih visina nije jednaka nuli, tako ni aritmetička sredina vremena prolaza kroz te visine ne odgovara trenutku Sunčeva prolaza kroz lokalni (mesni) meridijan. U trenutku koji predstavlja aritmetičku sredinu vremena posmatranja Sunce će se stvarno nalaziti z a p a d n o od meridijana ako mu se deklinacija u to vreme povećava, a i s t o č n o od meridijana, ako u razmaku izmedju posmatranja Sunčevih korespondentnih visina deklinacija opada.

Promenu u časovnom uglu u funkciji promene deklinacije nalazimo ako diferenciramo obrazac, iz položajnog sfernog trougla,

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos H,$$

smatrajući u njemu z i φ kao konstantne veličine. Tako dobivamo

$$dH=(tg\varphi\operatorname{cosec}H-tg\delta\operatorname{ctg}H)d\delta$$

Ako proteklo vreme u časovima izmedju posmatranja korespondentnih visina označimo sa τ ; pretpostavimo da se Sunčeva deklinacija u tom razmaku menja proporcionalno vremenu; i označimo dnevnu promenu Sunčeve deklinacije na dan posmatranja sa $\Delta\delta$, za promenu deklinacije u razmaku τ imaćemo

$$d\delta=\frac{\Delta\delta}{24}\tau;$$

a za promenu časovnog ugla, usled ove promene deklinacije, imaćemo (u vremenim jedinicama)

~~ = грн не штампати!

$$z_m = z_0 - \frac{1}{2}(\text{tg}\varphi - \text{tg}\delta)\, d\delta^2,$$

$$dH = \frac{1}{15}\,\frac{\Delta\delta}{24}\,\tau\,(\text{tg}\varphi\,\text{cosec}H - \text{tg}\delta\,\text{ctg}H)$$

Polovina ove veličine, koja se algebarski dodaje aritmetičkoj sredini vremena posmatranja Sunčevih korespondentnih visina, zove se p o p r a v k a p o d n a.

4) A z i m u t i č a s o v n i u g a o S u n č e v e k u l m i n a c i j e. Iz prethodnih rezultata sleduje zaključak da, zbog promena deklinacije, Sunce ne kulminira u meridijanu. Ono dostiže svoju najveću visinu, odnosno najmanju zenitsku daljinu, z_m:

zapadno (v. sl. 20) od meridijana u doba kad je $d\delta > 0$,

istočno (v. sl. 21) od meridijana u doba kad je $d\delta < 0$;

na azimutu: $A_c = \frac{\Delta\delta}{2\pi}\sec\varphi$,

na časovnom uglu: $H_c^{\prime\prime} = \frac{\Delta\delta}{2\pi}(\text{tg}\varphi - \text{tg}\delta)$

gde z_0 i δ označava zenitsku daljinu, odnosno Sunčevu deklinaciju u trenutku prolaza kroz meridijan.

5. Nejednakosti trajanja obdanica i obnoćnica. Trajanja obdanica na raznim geografskim širinama, u toku Sunčeva prividnog godišnjeg kretanja, odredjujemo pomoću izraza

$$\cos H = -\,\text{tg}\varphi\cdot\text{tg}\delta, \qquad \text{ili} \qquad H = \arccos(-\text{tg}\varphi\,\text{tg}\delta),$$

čija apsolutna vrednost predstavlja (približno) polovinu Sunčeva dnevnog luka. Ako sa τ označimo trajanje obdanice, vidimo da se, za odredjeno mesto na Zemlji, u toku godine, ta trajanja kreću izmedju

$$\tau_m = 2\arccos(\text{tg}\varphi\,\text{tg}\varepsilon) \qquad \text{i} \qquad \tau_M = 2\arccos(-\text{tg}\varphi\,\text{tg}\varepsilon).$$

Vidimo sem toga iz (1), da je $H \gtrless 90^\circ = 6^h$, prema tome da li su δ i φ istog ili suprotnog znaka; a da je $H = 90^\circ = 6^h$ ako je: bilo δ, bilo φ jednako 0°.

Dalje vidimo da gornja jednačina ne daje realne korene za H ako je

$$|\text{tg}\varphi\,\text{tg}\delta| > 1, \qquad \text{ili} \qquad |\delta| > 90^\circ - |\varphi|.$$

Znači Sunce je za dotično mesto, tog dana, cirkumpolarno: i to, ako su δ i φ istog znaka, Sunce ne zalazi; ako su δ i φ suprotnih znakova, Sunce ne izlazi.

U izrazima (1), medjutim, nisu uzete u obzir promene koje u trajanjima obdanica izazivaju promene Sunčeve deklinacije u razmaku od

početka do svršetka obdanice. One su, za umerene geografske širine, skoro neznatne. Iznosi im se mogu izračunati iz izraza

$$dH = tg\varphi \sec\delta \, cosec H \, d\delta .$$

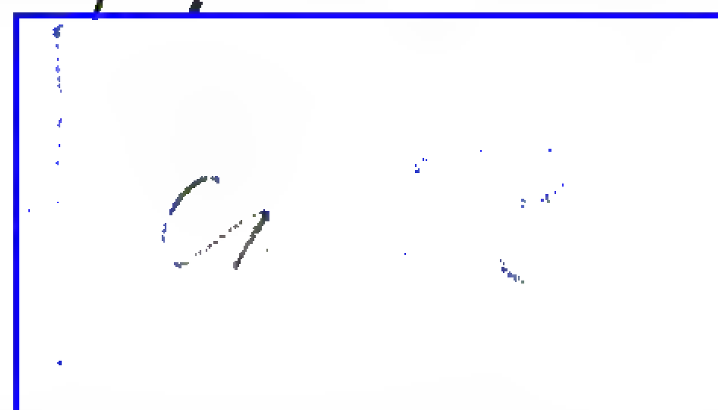
U izrazima (1) nisu uzeti u obzir ni dejstvo astronomske refrakcije, kao ni činjenica da se počeci i svršeci obdanice računaju od trenutka dodira sa ravni horizonta mesta — gornjeg ruba Sunčeva kružnog diska. Produženi trajanja obdanica, usled ovih dejstava i okolnosti, odredjeni su izrazom

$$dH' = 51' \sec\varphi \sec\delta \, cosec H, \text{ ili } dH^{(s)} = 204^{s} \sec\varphi \sec\delta \, cosec H .$$

Za ovoliko, stvarno, obdanica ranije počinje, odnosno kasnije se svršava, usled prisustva atmosfere oko Zemlje.

Све ове појединости, као и њихове промене у току године и за разне географске ширине на Земљи, могу се приказати на једном графику, какав видимо на сл. 23, нарочито ако је овај изведен прецизно и у довољно великој размери.

На сл. 23 представљена је у (ортографској) пројекцији небеска сфера (гледана из правца E или W) на меридијанску раван места географске ширине $\varphi = +44°48'$, дакле и Београда. На њој видимо представљене са:



O — посматрача, чији је зенит Z_n;

P_n — северни небески пол;

H_nH_s — пројекција посматрачева хоризонта;

E_1E_2 — пројекција небеског екватора, издељена на часове, означене са 0–12, за источну половину, и са 12–24, за западну половину хоризонта;

27 (6 ■. Trajanja sumraka) Blagodareći prisustvu atmosfere oko Zemlje čoveku je omogućeno da se koristi Sunčevom svetlošću – izvesno vreme – i posle Sunčeva zalaza, po svršetku obdanice. Te vremene razmake, po zalazu i pre izlaza Sunca, u toku kojih Zemljina površina biva okasjavana zracima odbijenim i rasutim od gornjih slojeva atmosfere, zovemo – sumracima (svitanja, odnosno sutoni). I to, ono vreme što Sunce provede, u toku svog prividnog dnevnog puta, između almukantara $z = 96°$ i horizonta ($z = 90°$), odnosno horizonta ($z = 90°$) i almukantara $z = 96°$, zove se – građanski sumrak. A vreme što Sunce provede između almukantara $z =$ 108° i horizonta, odnosno horizonta i almukantara $z = 108°$, zove se astronomski sumrak. 37

Trajanja (τ) sumraka na geografskoj širini φ, na dan kad je Sunčeva deklinacija δ, izračunavamo iz $\tau = H_\sigma - H_o$, gde H_o predstavlja časovni ugao Sunca, određen izrazom

$$\cos H_o = -tg\,\varphi\, tg\,\delta,$$

a H_σ časovni ugao Sunca na zenitskoj daljini z_σ, određen izrazom

$$\sin\tfrac{1}{2}H_\sigma = \left[\sin\tfrac{1}{2}(z_\sigma + \varphi - \delta)\sin\tfrac{1}{2}(z_\sigma - \varphi + \delta)\sec\varphi\sec\delta\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Stavljajući u ovaj izraz $z_\sigma = 96°$, odnosno $z_\sigma = 108°$, nalazimo vrednosti vrednosti Sunčevih časovnih uglova od kojih treba oduzeti vrednosti H_o, koji odgovaraju istim podacima, da bi se dobilo trajanje građanskog, odnosno astronomskog sumraka.

Као и трајања обданица могу се, на исти начин, одредити и трајања сумракâ, грађанских и астрономских, у току године и за разне географске ширине, са графика представљена на сл. 23. На слици су, у ту сврху, представљени са:

G_1G_2 – пројекција алмукантара са зенитском даљином $z = 96°$, којом је одређена граница свршетка, односно почетка, грађанског сумрака;

A_1A_2 – пројекција алмукантара са зенитском даљином $z = 108°$, којом је одређена граница свршетка, односно почетка, астрономског сумрака.

Постављањем посматрачева хоризонта, H_nH_s, заједно са овим алмукантарима, на изабрану географску ширину моћи ће се – ако је график довољно прецизно изведен – са њега читати и све појединости о сумрацима, за сваки дан у години за који се повуче Сунчев дневни паралел.

~~~ = грк не могу.
~~~

Z A D A C I

IV. Astronomska refrakcija

127 ~~132~~ Posmatrane su visine cirkumpolarne zvezde u obema njenim uzastopnim kulminacijama i nadjene su vrednosti:

u gornjoj k.: $h_s = 70^\circ 30' 40''$; u donjoj k.: $h_i = 15^\circ 16' 17''$.

Odrediti njene prave zenitske daljine u tim trenucima.

128 ~~133~~ Ako su, u trenucima posmatranja, pomenutih u prethodnom zadatku, pročitana i stanja termometra i barometra kraj posmatrača — u trenutku gornje k.: $+12^\circ.8C$ i 738 mm, a u trenutku donje k.: $+8^\circ.2C$ i 740 mm, — odrediti, pomoću tako dopunjenih podataka, geografsku širinu posmatrališta i deklinaciju posmatrane cirkumpolarne zvezde.

129 ~~134~~ Sa izvesnog mesta na severnoj hemisferi posmatrana je nekretnica, u trenutku njene gornje kulminacije, na zenitskoj daljini $z_s = 6^\circ 33' 44''.5$, pri $+16^\circ.4C$ i 748 mm; a, u trenutku njene donje kulminacije, na zenitskoj daljini $z_i = 71^\circ 27' 39''.3$, pri $+11^\circ.8C$ i 750 mm. Odrediti tačnu posmatračevu geografsku širinu i deklinaciju posmatrane nekretnice (v. Zad. 89, iz I dela Zbirke), uzimajući u obzir i dejstvo refrakcije.

130 ~~135~~ Odrediti geografsku širinu mesta i koordinate nekretnice koja, u tom mestu, izlazi u $12^h 33^m 24^s$ zv. vr., koja prolazi kroz posmatračev zenit i provodi nad njegovim horizontom, uzimajući u obzir i dejstvo refrakcije, $14^h 19^m 48^s$ zv. vr. (v. Zad. 97, iz I dela Zbirke).

131 ~~136~~ Posmatrana je nekretnica iz mesta čija je geografska širina $\varphi = +38^\circ 58' 53''$, na zenitskoj daljini $z = 69^\circ 42' 30''$, u vertikalu azimuta $A = 300^\circ 10' 30''$. Odrediti deklinaciju i časovni ugao zvezde, vodeći računa i o astronomskoj refrakciji.

132 ~~137~~ Naći visinu na kojoj se nalazi posmatrač na obali, ako se zna da prividna depresija njegova horizonta (dakle, imajući u vidu pri-

O½ kt

sustvo atmosfere) iznosi 1^o.

Odrediti posmatračevu daljinu vida u kilometrima.

✓ 133 ~~138.~~ Odrediti geografsku širinu mesta za koje izvesna cirkumpolarna zvezda dostiže prividne zenitske daljine u gornjoj kulminaciji $z_g = 30^o\ 10'\ 37''$, u donjoj kulminaciji $z_1 = 60^o\ 10'\ 57''$. Za dejstvo refrakcije zadovoljiti se izrazom $R = k\,tgz$.

✓ 134 ~~139.~~ Iz mesta geografske širine $\varphi = +44^o\ 48'\ 13''.2$ posmatrana je cirkumpolarna u obema kulminacijama, na prividnim zenitskim daljinama $z_g = 17^o\ 18'\ 48''.2$ i $z_1 = 73^o\ 1'\ 11''.6$.

1) Odrediti vrednost konstante k u izrazu za refrakciju $R = k\,tgz$.

2) Odrediti vrednosti konstanata A i B u izrazu za refrakciju $R = A\,tgz - B\,tg^3z$, ako se zna da je deklinacija zvezde bila $\delta = +62^o\ 7'\ 20''.2$.

✓ 135 ~~140.~~ Sa broda na pučini, sa 12 m visine nad morskom površinom, 17. maja 1962. izmerena je maridijanska visina donjeg ruba Sunčeva kružnog diska i nadjena $h_{\odot} = 40^o\ 58'\ 54''$. Odrediti geografsku širinu paralela na kojem se brod tada nalazio.

✓ 136 ~~141.~~ Izračunati, za posmatrača na geografskoj širini $\varphi = +41^o\ 22'\ 30''$, iznos refrakcije u trenutku najveće digresije nekretnice čija je deklinacija $\delta = +64^o\ 13'20''$.

1. Odrediti za koliko ova nekretnica dospeva, za tog posmatrača, usled dejstva refrakcije, ranije, odnosno kasnije, u najveću digresiju.

2. Izračunati promenu koju u paralaktičnom uglu porizvodi refrakcija u najvećoj digresiji te nekretnice.

✓ 137 ~~142.~~ Ako refrakcija nema uticaja na deklinaciju posmatrane nekretnice, pokazati da se ova nalazi u najvećoj digresiji.

138 ~~143.~~ Izmedju raznih nekretnica koje za pasmatrača na $\varphi = +38^o$

dospevaju, u toku njihova prividnog dnevnog kretanja, i u položaje u kojima refrakcija ne dejstvuje na deklinaciju, izabrati jednu i za nju izračunati:

1) karakteristične položaje u toku njena prividnog dnevnog kretanja;

2) najveću vrednost dejstva refrakcije kod nje.

139 ~~144.~~ Ako se posmatranjima ne može dostići tačnost od 0".1, drugim rečima, ako se ova veličina mora zanemariti, do koje se zenitske daljine možemo zadovoljavati izrazom za refrakcijom R = ktgz ?

140 ~~145.~~ Pretpostavljajući da je Zemljina sfera opkoljena homogenim slojem atmosfere, visine h nad Zemljinom površinom, pokazati da je

$$R = \arcsin\left[\frac{a\sin z}{a+h}\left(n^2 - 2n\cos R + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

gde su označeni sa:

R - iznos refrakcije;

a - poluprečnik Zemljine sfere;

z - prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;

n - indeks refrakcije vazduha.

[Smart]

141 ~~146.~~ Ako izmedju poluprečnika (r) atmosferskog sloja (koncentrična sa Zemljinom površinom) i indeksa refrakcije (n) tog sloja postoji veza $r n^{m+1} = Const.$, pokazati da je iznos astronomske refrakcije dat (Simpson-ovim) izrazom

$$R = \frac{1}{m}\left[z_0 - \arcsin\left(\frac{\sin z_0}{n^m}\right)\right],$$

gde su označeni sa

m - neki broj

z_0 - prividna zenitska daljina posmatranog nebeskog tela;

n_0 - indeks refrakcije na površini Zemlje.

[Smart]

142 ~~147.~~ Polazeći od Simpson-ova izraza za refrakciju,

$$R = \frac{1}{m}\left[z - \arcsin\left(\frac{\sin z}{n_0^m}\right)\right],$$

izvesti Bradley-ev izraz,

$$R = \frac{2}{m}\,\frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\,\mathrm{tg}\left(z - \tfrac{1}{2} m R\right).$$

[Smart]

143 ~~148.~~ Ako mesto R = k tg z, gde z označava prividnu zenitsku daljinu, uzmemo za iznos astronomske refrakcije $R = K\,\mathrm{tg}\,\zeta$, gde ζ označava pravu zenitsku daljinu tog tela, pokazati da je

$$K = m(1 - m \,\mathrm{arc}\,1'' \sec^2 z).$$

[Ball]

144 ~~149.~~ Pokazati da Bradley-ev izraz za refrakciju,

$$R = 58''.361\,\mathrm{tg}\,(z - 4.09\,R),$$

i Cassini-ev izraz za refrakciju,

$$R = 58''.294\,\mathrm{tg}\,z - 0''.06682\,\mathrm{tg}^3 z,$$

daju praktično iste vrednosti, dok zenitske daljine nisu velike.

[Ball]

145 ~~150.~~ Ako se za dejstvo refrakcije zadovoljimo izrazom R = k tg z, pokazati da će njeno dejstvo na prividnu daljinu dveju bliskih nekretnica (komponenata dvojne zvezde) biti dato izrazom

$$ds = ks\,(1 + \cos^2\eta\,\mathrm{tg}^2 z)\,\mathrm{arc}\,1'',$$

gde s predstavlja daljinu zvezda u sekundama ugla, a η ugao izmedju zenitske daljine zapadne nekretnice i luka s.

[Ball]

146 ~~151.~~ Ako izraz R = k tg z predstavlja iznos dejstva refrakcije, pokazati da će promena usled dejstva refrakcije ugla (η) izmedju zenitske daljine zvezde Σ i luka $\Sigma\Sigma_1$, do ovoj bliske, druge, zvezde, Σ_1, data izrazom

$$d\eta = \frac{1}{2}\,k \sin 2\eta\,\mathrm{tg}^2 z,$$

gde je z prividna zenitska daljina prve zvezde.

147 ~~152.~~ Pokazati da, usled dejstva refrakcije, mali luk almukantara

59

biva kraći (1 - k) - puta, a luk vertikala ($1 - k \sec^2 z$) - puta kraći, pri čemu z ne bi smelo premašiti, recimo, 80°.

[Ball]

148 ~~153.~~ Izvesti u obliku pogodnom za logaritamski račun izraz za časovni ugao izlaza, odnosno zalaza, središta Sunčeva prividnog kružnog diska, za posmatrača na geografskoj širini φ, uzimajući za iznos astronomske refrakcije u ravni horizonta $R = 35'$.

Iz nadjenog izraza neposredno izvesti sličan izraz za časovni ugao izlaza (odnosno zalaza) gornjeg ruba Sunčeva prividnog kružnog diska, za čiji se prividni poluprečnik može uzeti $r_\odot = 16'$.

149 ~~154.~~ Ako označimo sa R_* iznos refrakcije (u sekundama ugla) u trenutku izlaza, u mestu geografske širine φ, nekretnice sa deklinacijom δ — pokazati da se, usled dejstva refrakcije, menja vreme njena izlaza približno za:



$$\tau = \frac{R_*}{15}\left(\cos^2\delta - \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

[Ball]

150 ~~155.~~ Izvesti jednačinu krive u koju se deformiše Sunčev (ili Mesečev) kružni disk usled dejstva astronomske refrakcije, a u granicama u kojima se ovo dejstvo predstavlja izrazom $R = k \operatorname{tg} z$.

V/ Elementi teorije kretanja planeta i kometa

151 ~~156.~~ Izračunati polarne koordinate (r, v) planetoida koji se kreće po eliptičkoj putanji, velike poluose $a = 3.0$ a.j., sa ekscentričnošću $e = 0.1$, u trenutku kad je ekscentrična anomalija planetoida dostigla vrednost $E = 80°$.

152 ~~157.~~ Koliki je ugao ekscentričnosti heliocentrične putanje tela čija je afelska daljina četiri puta veća od perihelske?

153 ~~158.~~ Za koliko bi dana kometa dostigla pravu anomaliju $v = 60°$, ako se ona kreće po eliptičkoj putanji, ekscentričnosti $e = 0.8$, sa srednjim sideričkim dnevnim kretanjem $n = 300''$?

(nastavak na str. 35!)

154 ~~159.~~ Naći izraze za radijalnu i transverzalnu (normalnu na pravcu radijavektora) komponentu brzine i ubrzanja planete na njenoj putanji.

[Moulton]

155 ~~160.~~ Izvesti izraz za brzinu planete na njenoj heliocentričnoj putanji.

156 ~~161.~~ Odrediti u funkciji radijavektora (r) i vremena (t) radijalne i transverzalne komponente brzine i ubrzanja tačke koja se kreće po eliptičkoj putanji, oko jedne od njenih žiža, uniformnom uglovnom brzinom (ω).

[Moulton]

157 ~~162.~~ Izračunati brzine planete na njenoj heliocentričnoj putanji u trenucima prolaza kroz krajeve velike ose, male ose i parametra.

158 ~~163.~~ Rešiti Keplerovu jednačinu ako je e = 0.147, a M = 136°25'32".4.

159 ~~164.~~ Kometa se kreće po eliptičkoj putanji, čija je ekscentričnost e = 0.8. Ako joj je srednje sideričko dnevno kretanje n = 199", izračunati kad će vrednost kometine prave anomalije biti tačno jednaka dvostrukoj vrednosti njene ekscentrične anomalije.

160 ~~165.~~ Planeta se kreće po eliptičkoj putanji, čija je ekscentričnost e = 0.01673. Odrediti vrednost koju će njena ekscentrična anomalija (E) dostići po isteku četvrtine planetine periode (T) od njena prolaza kroz perihel.

161 ~~166.~~ Planeta obilazi svoju heliocentričnu putanju, ekscentričnosti (e = 0.24537, za T = 1035.438 dana. Izračunati za koje vreme planeta) dođe iz perihela do vrha parametra.

[Villié]

162 ~~167.~~ Odrediti priraštaj (ΔT) koji će u trajanju sideričke revolucije planete izazvati priraštaj (Δa) velike poluose njene heliocentrične putanje.

[Ball]

163 ~~168.~~ Koliko bi bilo trajanje sideričke revolucije tela Sunče-

va sistema, zanemarljive mase, čija bi perihelska daljina bila q = 1.2 a.j., a ekscentričnost njegove heliocentrične putanje e = o.2 ?

164 ~~169.~~ Ako V_π i V_A označavaju planetine putanjske brzine u perihelu, odnosno afelu, a φ ugao ekscentričnosti njene heliocentrične putanje, pokazati da je

$$V_\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = V_A \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

165 ~~170.~~ Ako se sa φ predstavi ugao ekscentričnosti, pokazati da je

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}E.$$

[Smart]

166 ~~171.~~ Na kojoj bi daljini kružila oko Sunca planeta sa dvostrukom Zemljinom masom, a sideričkom revolucijom jednakom Zemljinoj (Za Zemljinu masu uzeti M = 1/330000).

167 ~~172.~~ Koliko bi trajala sidericka revolucija i kolika bi bila brzina satelita koji bi se kretao, po kružnoj putanji, nad samom Sunčevom površinom ? [Russell]

168 ~~173.~~ Za koliko bi se produžilo trajanje Zemljine sideričke revolucije, kad bi joj masa postala zanemarljiva ? (Za Zemljinu masu uzeti M = 1/330000). [Russell]

169 ~~174.~~ Planetoid se kreće po putanji čija je velika poluosa 4 a.j., a ekscentričnost e = 0.555. Izračunati polarne koordinate (r, v) koje će planetoid imati godinu dana (uzeti okruglo 365 dana) po prolazu kroz perihel.

170 ~~175.~~ Izračunati, bez upotrebe ikakvih tablica, vrednost prave anomalije, koja odgovara ekscentričnoj anomaliji E = 30°, ako je ekscentričnost putanje e = 1/60.

171 ~~176.~~ Pokazati da se srednja anomalija (M) planete, čija je velika poluosa heliocentrične putanje a, može predstaviti u jednom od

ovih oblika:

a) $\mathcal{M} = 2\pi\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{t}{T_0}$; b) $\mathcal{M} = 2\pi\left[\frac{a_0}{p}(1-e^2)\right]^{\frac{3}{2}}\frac{t}{T_0}$; c) $\mathcal{M} = k\sqrt{1+m}\,a^{-\frac{3}{2}}t$. [BaU]

✓ 172 ~~177.~~ Siderička revolucija (T) Halejeve komete iznosi (uzećemo zaokrugljeno) 76 godina; ekscentričnost njene heliocentrične putanje je e = 0.96728. Izračunati brzine komete, u km/sec, u perihelu, na heliocentričnoj daljini r = 2 a.j. i u afelu.

✓ 173 ~~178.~~ Pokazati da izmedju planetine prave (v) i antifokusne anomalije (w) postoji veza

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}w = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v;$$

pomoću ove izvesti jednu od veza što postoje izmedju v, w i E.

✓ 174 ~~179.~~ Planeta se kreće po eliptičkoj putanji, ekscentričnosti e = o.4, sa srednjim sideričkim dnevnim kretanjem n = 100". Izračunati promene planetine ekscentrične i prave anomalije, u razmaku od 6^h, ako se zna da je zbir (ekscentričnih anomalija na kraju) tog vremenog razmaka iznosio 180°.

✓ 175 ~~180.~~ Izračunati razliku izmedju planetine ekscentrične i srednje anomalije u trenutku kad se ona nalazila na 0.625 heliocentrične daljine, izražene u jedinicama krive poluose njene putanje, čija je ekscentričnost e = 0.4.

Izračunati vreme proteklo od planetina prolaza kroz perihel do pomenutog trenutka, ako se zna da je njeno srednje siderično dnevno kretanje iznosilo n = 600".

✓ 176 ~~181.~~ Ako se drugi i viši stepeni ekscentričnosti planetine putanje mogu zanemariti, pokazati da se ekscentrična anomalija planete može predstaviti izrazom

$$E = \operatorname{arctg}\frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

177 ~~182.~~ Izračunati Marsovu masu kad se zna da trajanje sideričke revolucije (T_s) njegova bližeg satelita, Fobosa, iznosi 0.31891 dana, a srednja daljina ovog od planete iznosi 9400 km.

178 ~~183.~~ Odrediti granice izmedju kojih se menja, u toku planetina heliocentričnog kretanja, ugao izmedju pravca njena kretanja i pravca upravnog na radijuvektoru u položaju koji planeta zauzima.

179 ~~184.~~ Pokazati da se u svakoj tački planetine putanje njena brzina može razložiti u komponente: $V_v = \frac{C}{p}$, upravnu na radijuvektoru, i $V_a = \frac{eC}{p}$, upravnu na apsidnoj liniji, u kojima je sa C označena dvostruka površinska brzina planete, sa p parametar, a sa e ekscentričnost putanje. [Ball]

180 ~~185.~~ Odrediti datume u godini u koje Zemlja dospeva, na svojoj heliocentričnoj putanji, u položaje u kojima je prava heliocentrična uglovna brzina njena jednaka srednjoj. Za ekscentričnost Zemljine heliocentrične putanje uzeti e = 0.0167; za srednju heliocentričnu uglovnu brzinu uzeti $n = 3548''.192 = 0^{\circ}.985609$.

181 ~~186.~~ Pokazati da se površinske brzine planeta odnose kao kvadratni koreni njihovih parametara.

Objasniti značaj ovog stava.

182 ~~187.~~ Naći ekstremne vrednosti ekvacije centra i konstruisati geometrijski položaje na planetinoj putanji u kojima ekvacija dostiže te ekstremume. Uporediti vrednosti triju anomalija (v, E i M), u tim trenucima, za planetoid 4 Vesta, čiji ugao ekscentričnosti iznosi $\varphi = 5^{\circ}.099$, a velika poluosa putanje a = 2.3617.

183 ~~188.~~ Odrediti ekstremne vrednosti razlike prave i ekscentrične anomalije planete. Uporediti vrednosti svih triju anomalija (v, E i M), u tim trenucima, za planetoid 4 Vesta, čija velika poluosa putanje iznosi a = 2.3617, a ugao ekscentričnosti $\varphi = 5^{\circ}.099$

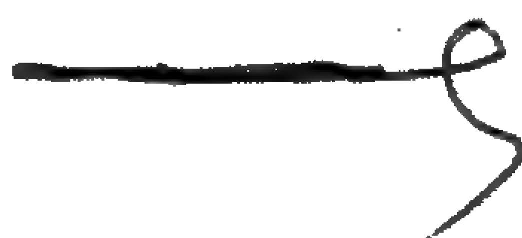
184 ~~189.~~ Odrediti geometrijsko mesto tačaka preseka produženih radijavektora pravih i ekscentričnih anomalija planetske putanje.

[Gruey]

185 ~~190.~~ Uporediti trajanja obilazaka oko Zemlje veštačkih satelita: Eksplorera VI (izbačen 1959. avg. 7.), koji je kroz perigej prolazio na visini od 244 km nad Zemljom, a u apogeju prolazio na 48202 km geocentrične daljine; i veštačkog satelita koji bi u perigeju prolazio na istoj visini nad Zemljom, a u apogeju dopirao do Mesečeve srednje geocentrične daljine.

186 ~~191.~~ Pokazati da se anomalija (w) oko prazne žiže — ako se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti planetine putanje — menja proporcionalno vremenu.

187 ~~192.~~ Ako se u pravouglom koordinatnom sistemu konstruiše kriva $y = \sin x$, pa kroz tačku na apscisi $x = M$ povuče prava pod uglom sa apscisnom osom $\chi = \operatorname{arcctg} e$, sa Q označi tačka u kojoj ova prava seče sinusoidu, njena apscisa sa ? , — pokazati da je ? = E.



VI SUNČEVO PRIVIDNO GODIŠNJE KRETANJE

188 ~~193.~~ Koje su nebeske ekvatorske koordinate ekliptičkih polova, a koje ekliptičke koordinate nebeskih polova ?

189 ~~194.~~ Koje tačke na nebeskoj sferi imaju deklinacije jednake latitudama, a koje rektascenzije jednake longitudama ?

190 ~~195.~~ Pokazati da je deklinacija nekretnice jednaka njenoj longitudi, ako joj je rektascenzija jednaka latitudi.

191 ~~196.~~ Kako se za izvestan datum u godini odredjuje približna Sunčeva rektascenzija ?

Odrediti približne Sunčeve rektascenzije za 11. mart, 2. avgust i 19. januar.

192 ~~197.~~ Kolika je (približno) geografska širina mesta kroz čiji zenit Sunce prolazi oko 31. marta ?

193 ~~198.~~ Koje najveće i koje najmanje visine može Sunce dostići (u toku godine) nad horizontom Beograda, i kad ih dostiže?

194 ~~199.~~ Koliku visinu dostiže Sunce u meridijanu mesta geografske širine $\varphi = -20^\circ$, ako mu je deklinacija $+18^\circ$?

195 ~~200.~~ Izračunati ekliptičke koordinate zvezde α Aurigae (Kočijaša), čije su nebeske ekvatorske koordinate

$$\alpha = 5^h\ 13^m\ 21^s.96 \quad i \quad \delta = +45^\circ\ 57'\ 19''.4,$$

uzimajući za nagib ekliptike $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 8''.3$.

196 ~~201.~~ Koje ekstremne vrednosti dostiže u Beogradu zenitska daljina Sunčeva onog dana kad mu je izlazna amplituda bila 0°?

197 ~~202.~~ U trenutku kad pol ekliptike dospe u posmatračev zenit, kolike su horizontske koordinate nekretnice čije su ekliptičke koordinate (λ, β)?

Kolika je geografska širina tog posmatrača?

198 ~~203.~~ Ako se zna da Sunčevi prividni prečnici iznose: u perigeju

32' 36", a u apogeju 31'32", pokazati da ekscentričnost Zemljine heliocentrične putanje iznosi oko 1/60.

199 ~~204.~~ Kolike su horizontske koordinate u Beogradu nekretnice čija je rektascenzija $\alpha = 7^h$, deklinacija $\delta = +34^\circ\ 48'$, na dan 21. marta, 1 čas po Sunčevu zalazu?

200 ~~205.~~ Odrediti ugao izmedju ekliptike i horizonta mesta geografske širine φ, u trenutku kad visina γ- tačke dostigne vrednost h.

201 ~~206.~~ Ako su rektascenzije Sunca, u trenucima njegovih gornjih kulminacija, bile

20. marta $\alpha_1 = 23^h\ 58^m\ 29^s$, a 21. marta $\alpha_2 = 0^h\ 2^m\ 7^s$,

odrediti trenutak proletnje ravnodnevice.

202 ~~207.~~ Ako su deklinacije Sunca, u trenucima njegovih gornjih kulminacija, bile:

20. marta $\delta_1 = -0^\circ\ 20'\ 45''$, a 21. marta $\delta_2 = +0^\circ\ 3'\ 14''$,

odrediti trenutak proletnje ravnodnevice.

203 ~~208.~~ Za koje delove Zemljine površine Sunce onog dana kad mu deklinacija dostigne $\delta = +21^\circ\ 16'\ 36''$ uopšte ne zalazi, a za koje ne izlazi? U kojim mestima Sunce tog dana prolazi kroz zenit?

204 ~~209.~~ Izmedju kojih granica se kreću visine koje Sunce dostiže, u toku godine, u Beogradu, pri prolazu kroz prvi vertikal?

205 ~~210.~~ Izračunati nagib ekliptike pomoću dveju Sunčevih deklinacija,

$\mathcal{D}_1 = +6^\circ\ 26'\ 40''.0$ i $\mathcal{D}_2 = +13^\circ\ 12'\ 20''.0$,

ako se zna da tim deklinacijama odgovara razlika u Sunčevim rektascenzijama $\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 = 17^\circ\ 39'\ 9''.6$ [Villié] →

206 ~~211.~~ Kolika je dnevna promena Sunčeve rektascenzije u vreme ravnodnevicâ, kad se zna da je časovna promena Sunčeve deklinacije, u to vreme, 1'? i nagib ekliptike $\varepsilon = 23^\circ 27'$

207 ~~212.~~ Izračunati dnevne promene Sunčeve rektascenzije i deklinacije, u doba solsticija i ekvinokcija, znajući da je dnevna promena Sunče-

ve longitude (oko) 1°, a nagib ekliptike $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

208 ~~213.~~ Na kojoj geografskoj širini dostiže ponoćno Sunce visinu $h = +4^\circ 11'$, ako mu je u trenutku prolaza kroz meridijan tog mesta deklinacija bila $\delta = +20^\circ 8'$?

[redacted]

209 214. Pod pretpostavkom da je nagib ekliptike poznat sa greškom od 1", izmedju kojih datuma treba položaj Υ-tačke odredjivati pomoću Sunčevih rektascenzija, ako [redacted] dobivenom položaju Υ-tačke treba da bude obezbedena tačnost od $\pm 0^s.02$?

[redacted]

210 ~~215.~~ U kojim granicama se menja u Beogradu, u toku godine, meridijanska dužina senke na horizontalnoj ravni uspravnog stuba, visine 4 m ?

211 ~~216.~~ Kolika je dužina senke na horizontalnoj ravni uspravnog stuba, visine 25 m, u podne, u mestu geografske širine $\varphi = -20^\circ$, na dan kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +18^\circ$?

212 ~~217.~~ Izračunati geografsku širinu mesta i nagib ekliptike, ako se zna da su u dane letnjeg i zimskog solsticija, u podne, izmerene u tom mestu, na severnoj Zemljinoj hemisferi, dužine senke na horizontalnoj ravni vertikalnog stuba, visine 20 m, i za dužine nadjene 8.82 m i 57.11 m ?

213 ~~218.~~ Kolika je razlika u dužinama meridijanskih senki, na horizontalnoj ravni, vertikalnog stuba, visine 10 m, u dane ekvinokcija i solsticija, u mestima na meridijanu Beograda, od kojih je jedno 55 km severnije, a drugo isto toliko južnije od Beograda?

214 ~~219.~~ Naći geografsku širinu mesta na kojem, u podne, na dan let-

njeg solsticija, vertikalni stub baca na horizontalnu ravan senku dužine jednake visini stuba.

Odrediti Sunčevu visinu u ponoć tog datuma i u tom mestu.

215 ~~220.~~ Znajući tačnu vrednost deklinacije u trenutku Sunčeva prolaza kroz meridijan mesta, sa kolikom tačnošću će biti odredjena geografska širina mesta, ako je za meridijansku dužinu (D) senke na horizontalnoj ravni uspravne (zarezane) olovke (duge $l = 18cm$), nadjena vrednost $D = 22cm \pm 0{,}1cm$?

216 ~~221.~~ Koji će i koliki delovi Zemljine površine videti Sunce svih 24^h, a koji samo 12^h, u toku dana kada mu je deklinacija δ?

217 ~~222.~~ Kolika je geografska širina mesta u kojem astronomski sumrak traje celu noć onog datuma kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +14°$?

218 ~~223.~~ Izračunati deklinaciju Sunca, ako se zna da je trajanje obdanice, u Beogradu, iznosilo tačno 12^h.

219 ~~224.~~ Naći odnos trajanja obdanice prema obnoćnici u mestu geografske širine φ, onog dana kad je Sunčeva deklinacija bila δ.

220 ~~225.~~ Kolika je razlika u trajanjima obdanica, na dan 13. juna, u Beogradu i Bitolju, čije su geografske širine $\varphi_1 = +44° 48'$ i $\varphi_2 = +41° 2'$?

221 ~~226.~~ Naći izraz za promenu obdanice u toku godine u funkciji promena Sunčeve deklinacije. Rezultat primeniti na geografsku širinu Beograda u dane početaka godišnjih doba.

222 ~~227.~~ Odrediti datume u koje Sunce prolazi kroz ravan Mlečnog puta, čiji severni pol ima koordinate $\alpha = 12^h 48^m$ i $\delta = +27°$.

223 ~~228.~~ Za najduža trajanja obdanica u godini Ptolemej je našao u Sirakuzi $14^h 30^m$, a u Atini $14^h 36^m$. Uzimajući u obzir da je za nagib ekliptike Ptolemej uzimao $\varepsilon = 23° 51'$, odrediti geografske širine tih gradova.

224 ~~229.~~ Odrediti, pomoću geometrijske konstrukcije, odnos trajanja obdanice prema obnoćnici u mestu geografske širine φ, na dan kad je

Sunčeva deklinacija bila δ.

225 ~~230~~. Za koliko će, na dan ravnodnevice, ranije Sunce izaći za posmatrača, na geografskoj širini φ, koji se nalazi na uzvišenju 1/3200 Zemljina poluprečnika, nego za posmatrača koji bi se nalazio u podnožju istog uzvišenja ?

226 ~~231~~. Odrediti geografsku širinu tačke na Zemlji na kojoj, na dan letnjeg solsticija, odnos trajanja obdanice prema obnoćnici iznosi m.

227 ~~232~~. Ako je polarna daljina velikog kruga što prolazi kroz dva mesta, na istom Zemljinu pralelu, jednaka Sunčevoj deklinaciji, pokazati da je trajanje obnoćnice na tim mestima jednako razlici geografskih dužinâ tih mesta.

~~228~~ ~~233~~. Za koliki deo površine Zemljine sfere Sunce neće izaći onog dana kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +22^\circ\ 30'$. Za vrednost Sunčeva prividna poluprečnika uzeti $r_\odot = 16'$, a za iznos refrakcije u horizontu $R = 35'$.

228 ~~233~~. Kolika je (u lučnim minutama) razlika u azimutima Sunčevih izlaza, u dva uzastopna datuma, ako je prvog dana bila Sunčeva deklinacija δ, a drugog dana izlaz bio m minuta kasnije nego prethodnog dana ?

229 ~~234~~. Iz mesta geografske širine φ posmatrano je Sunce, čija je longituda bila Λ, u prvom vertikalu na visini h. Pokazati da je geografska širina posmatrališta

$$\varphi = \arcsin(\sin\Lambda \sin\varepsilon \operatorname{cosec} h).$$

[Ball]

230 ~~235~~. Pokazati da je za posmatrača na polarnom krugu dnevna promena tačke Sunčeva zalaza jednaka promeni njegove longitude.

~~236~~. ~~Naći geografsku širinu mesta na kojem Sunčev prolaz kroz prvi vertikal traje s sekunada (ne uzimajući u obzir dejstvo refrakcije).~~

231 ~~237~~. Pokazati da na mestu geografske širine φ, na dan solsticija, trajanje prolaza Sunčeva prividna diska kroz prvi vertikal mesta iznosi

u minutama

$$\tau = \frac{2}{15} r_{\odot} (\sin^2\phi - \sin^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

gde $r_{\odot}$ označava poluprečnik Sunčeva prividnog diska u lučnim minutama.

[Ball]

232 (237). Pokazati da je trajanje izlaza Sunčeva prividnog kružnog diska najduže na dan solsticija, a najkraće na dan ekvinokcija.

Izračunati trajanje izlaza Sunčeva prividnog kotura, na dan ekvinokcija, u mestu geografske širine $\varphi = +45°$, kad mu je prividni poluprečnik $= 16'$.

233 (238). Odrediti Sunčevu longitudu u trenutku kad se ono nadje podjednako (prividno) daleko od dveju nekretnica poznatih ekliptičkih koordinata.

234 (239). Ako dve nekretnice, sa koordinata (α_1, δ_1) i (α_2, δ_2) imaju istu longitudu, pokazati da je

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = (\cos\alpha_1 \, tg\delta_2 - \cos\alpha_2 \, tg\delta_1) \, tg\varepsilon.$$

[Smart]

235 (240). Odredjenog datuma i trenutka Sunčeva longituda je iznosila $\Lambda = 195°57'33''$, a Jupiterova rektascenzija, pri njegovu prolazu kroz ravan ekliptike $\alpha = 7^h\ 22^m\ 57^s$. Izračunati Sunčeve ekvatorske koordinate, Jupiterovu deklinaciju, kao i uglovnu daljinu Jupitera od Sunca, u tom trenutku, uzimajući za nagib ekliptike $\varepsilon = 23°\ 26'\ 54''$.

236 (241). Nekretnica poznatih koordinata (α, δ), izvesnog datuma, na izvesnom mestu, geografske širine φ, izlazi jednovremeno sa Suncem, čija je rektascenzija tog datuma $\mathcal{R}$. Pokazati da je

$$\mathcal{R} - \arcsin(\sin\mathcal{R} \, tg\varphi \, tg\varepsilon) = \alpha - \arcsin(tg\delta \, tg\varphi).$$

237 (242). Odrediti geografsku širinu mesta za koje zalaz Sunca na dan ekvinokcija traje 30^m.

238 (243). Dva bliska posmatrača, na istom meridijanu, posmatrali su jednovremeno Sunce na visinama h, odnosno $h + dh$. Ako je Sunčeva deklinacija bila $\mathcal{D}$, a geografska širina prvog posmatrača φ, pokazati da se geografska širina drugog od ove razlikuje za

$$\Delta\varphi = \Delta h \cos h \cos\varphi (\sin\delta - \sin h \sin\varphi)^{-1}.$$

239 ~~244.~~ Pokazati da je

$$tg\,\varphi_1 = tg\,\varphi_2 (1 + 3\sec^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

ako je za posmatrača na geografskoj širini φ_1, mesec dana pre jesenje ravnodnevice, trajanje obdanice jednako trajanju obdanice najdužeg dana u godini na mestu geografske širine φ_2.

240 ~~245.~~ Pokazati da je za posmatrača na tropskom pojasu časovni ugao Sunčev, čije su koordinate ($\textcircled{R}$, $\textcircled{D}$), kad se ekliptika poklopi sa vertikalom, dat izrazom

$$H = \arcsin (\sin\textcircled{R}\, ctg\textcircled{D}\, tg\varphi) - \textcircled{R}$$

~~251. Šta se sve i kako može odrediti iz posmatranja Sunca na istoj visini, pre i posle njegova prolaza kroz posmatračev meridijan?~~

241 ~~246.~~ Pokazati da će u trenutku kad je Sunčeva rektascenzija jednaka rektascenziji nekretnice, čije su koordinate (α, δ), a latituda (β) neznatna, — razlika izmedju longitudâ Sunca i nekretnice biti (približno)

$$\lambda - \Lambda = \beta \sin\delta\, ctg\alpha.$$

242 ~~247.~~ Pokazati da je — pod pretpostavkom da se Sunčeva longituda uniformno menja —

$$\ddot{\textcircled{R}} = 2\,\dot{\textcircled{R}}\,\dot{\textcircled{D}}\,tg\textcircled{D} \quad \text{i} \quad \ddot{\textcircled{D}} = -\tfrac{1}{2}(\dot{\textcircled{R}})^2 \sin 2\textcircled{D}.$$

243 ~~248.~~ Pokazati da je

$$\dot{\textcircled{R}} = \dot{\Lambda} \cos\varepsilon \sec^2\textcircled{D},$$

gde su $\textcircled{R}$, $\textcircled{D}$, Λ i ε — rektascenzija, deklinacija, longituda Sunčeva, odnosno nagib ekliptike.

244 ~~249.~~ Ako su izvesnog datuma, u blizini letnjeg solsticija, u podne, Sunčeve koordinate $\textcircled{R} = 90° - \eta$ i $\textcircled{D}$, pokazati da je nagib ekliptike dat izrazom

$$\varepsilon = \textcircled{D} + \eta^2 \sin 2\textcircled{D}$$

245 ~~250.~~ Od dva izraza za odredjivanje nagiba ekliptike:

tačna izraza — $tg\,\varepsilon = tg\textcircled{D}\, cosec\textcircled{R}$

ili približna izraza — $\varepsilon - \Omega = q^2 \sin 2\Omega \operatorname{cosec} 1''$,

gde je $q = 45° - \frac{1}{2}R$, koji je sa numeričkog gledišta pogodniji i zašto?

246 ~~251~~. Ako se zna da je nagib ravni Sunčeva ekvatora prema ravni ekliptike $i = 7° 15'$ i longituda ekvatorova uzlaznog čvora prema ekliptici $\Omega = 74° 22'$, a nagib ekliptike $\varepsilon = 23° 27'$ — odrediti koordinate Sunčeva severnog nebeskog polja.

Koja mu je od poznatih najbliža sjajna nekretnica ?

247 ~~252~~. U koje će datume u godini senke, na horizontalnoj ravni mesta $\varphi = +52°$, vertikalnog zida dužine l i visine a, usmerena pravcem E - W, imati jednake površine u podne i u 18^h. ?

248 ~~253~~. Kad će senka, na horizontalnoj ravni, pravouglog trouglog gnomona, čija je hipotenuza paralelna svetskoj osi, a osnova usmerena pravcem E - W, imati površinu jednaku gnomonovoj površini ?

249 ~~254~~. Pokazati da prav zid visine a, u ravni vertikala čiji je azimut A, na dan ekvinokcija, ne baca senku kad je časovni ugao Sunca $H = \operatorname{arctg}(\sin\varphi \operatorname{tg} A)$, a u podne tog dana senka ima širinu $x = a \operatorname{tg}\varphi \sin A$.

250 ~~255~~. Ako je na dan ekvinokcija, u podne, x dužina senke, na horizontalnoj ravni, u mestu geografske širine φ , a y dužina senke tog stuba na dan solsticija, kad se Sunce nadje u prvom vertikalu mesta — pokazati da je

$$x = y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi, \quad \text{gde je} \quad \psi = \arcsin(\sin\varepsilon \operatorname{cosec}\varphi).$$

~~262. Pokazati da sva mesta imaju trajanja obdanice, zajedno sa trajanjima sumraka, duža od 12^h dok je Sunčeva deklinacija manja od 18°.~~

251 ~~256~~. Pokazati da je za mesto na ekvatoru trajanje astronomskog sumraka u časovima odredjeno izrazom

$$\sigma = \frac{12}{\pi} \arcsin(\sin 18° \sec \delta).$$

252 ~~257~~. Pokazati da je na mestu geografske širine φ najkraće trajanje astronomskog sumraka, u časovima, odredjeno izrazom

$$\sigma = \frac{2}{15}\arcsin(\sin 9^\circ \sec\varphi).$$

253 ~~258~~. Izvesti izraz za najkraće trajanje astronomskog sumraka i odrediti (približno) datume u koje pada.

254 ~~259~~. Pokazati da je na mestu geografske širine φ trajanje (σ) večernjeg sumraka odredjeno izrazom

$$2\sin^2\frac{\sigma}{2} = \sec^2\varphi\left[1-\cosh\cos(q_1-q_2)\right],$$

gde su h Sunčeva visina u trenutku svršetka sumraka, a q_1 i q_2 paralaktički uglovi pri njegovu zalazu, odnosno svršetku sumraka.

~~260. Za datum kad je Sunčeva deklinacija δ i mesto geografske širine φ, izračunati, u vremenim sekundama, trajanje izlaza (zalaza) Sunčeva prividnog kotura, čiji je poluprečnik u sekundama luka $r_\odot$.~~

~~[redacted]. Izračunati trajanje izlaza Sunčeva prividnog kotura, na dan ekvinokcija, u mestu geografske širine $\varphi = +45^\circ$, kad mu je prividni poluprečnik $r_\odot = 16'$.~~

255 ~~261~~. Za dan kad je Sunčeva deklinacija $\delta = +3^\circ 30' 40''$, izračunati približno trajanje prolaza kroz meridijan mesta Sunčeva prividna kotura, čiji poluprečnik $R_\odot = 16'\ 5''$.

256 ~~262~~. Odrediti trajanje prolaza Sunčeva prividnog diska, poluprečnika $R_\odot$, preko horizontalnog končića teodolita, postavljena na geografskoj širini φ, ako se zna da je Sunčena deklinacija bila δ a njegova zenitska daljina, u trenutku posmatranja, z.

257 ~~263~~. Odrediti geografsku širinu posmatračevu iz trajanja izlaza, odnosno zalaza, nebeskog tela oblika kružnog diska merljiva prividnog prečnika.

Izvesti izraz za slučaj ako su izlazi (zalazi) posmatrani u doba ekvinokcija.

258 ~~264~~. Pretpostavljajući da je Zemljina heliocentrična putanja krug, odrediti trenutke u koje trajanja prolazâ prividnog Sunčeva kotura, poluprečnika jednaka 16', kroz posmatračev meridijan dostižu svoje ekstremne vrednosti, i izračunati kolike.

O½ kt 4975

259. Ako je 1. januara 1961. Zemljina heliocentrična daljina bila r, za koliko se promenila ova do 30. juna iste godine, ako se zna da su poluprečnici Sunčeva prividnog diska bili tih datuma $r'_{\odot}$, odnosno $r''_{\odot}$?

Izračunati tu promenu ako se zna da je

$$r = 147{,}01 \times 10^6 \text{ km}, \quad r'_{\odot} = 16'17''\!.50, \quad r''_{\odot} = 15'45''\!.39.$$

260. Naći približnu geografsku širinu mesta gde dejstvo refrakcije produžuje trajanje obdanice za 15^m u dane kad je Sunčeva deklinacija $\delta = -10^{\circ}$ i odrediti (približno) te datume.

261. Izvesti i prodiskutovati jednačinu krive, u funkciji geografske širine mesta i deklinacije Sunca, koju opisuje vrh senke na horizontalnoj ravni vertikalnog stuba visine a.

262. Ako označimo sa Λ, B i R Sunčeve ekliptičke koordinate i geocentrični radijevektor, sa ε nagib ekliptike, a sa X, Y, Z Sunčeve pravougle geocentrične ekliptičke koordinate (osa X usmerena ka γ-tački; Y-osa usmerena ka $\Lambda = +90^{\circ}$; Z-osa ka severnom ekliptičkom polu) - pokazati da su ove koordinate predstavljene izrazima (u jedinicama Sunčeve srednje daljine od Zemlje)

$$X = R\cos\Lambda, \qquad Y = R\sin\Lambda\cos\varepsilon - 19.3\,R\,B,$$

$$Z = R\sin\Lambda\sin\varepsilon + 44.5\,R\,B,$$

gde su numeričke vrednosti koeficijenata date u jedinicama sedme decimale, ako se zanemare drugi i viši stepeni Sunčeve latitude.

R E Š E N J A

191

IV ASTRONOMSKA REFRAKCIJA

(127) ~~(132)~~ Kako u zadatku nikakvi podaci nisu dati o temperaturi i atmosferskom pritisku, pri kojima su posmatranja izvršena, moramo se zadovoljiti popravkama posmatranih zenitnih daljinâ samo za iznose takozvane srednje (normalne) refrakcije.

Za posmatrane visine

$$h_i = 15°16'17'' \approx 15°16'.3 \quad i \quad h_s = 70°30'40'' \approx 70°30'.7,$$

dakle zenitske daljine

$$z_i \approx 74°43'.7 \quad i \quad z_s \approx 19°29'.3,$$

nalazimo u Tablici (na str.) vrednosti srednje refrakcije:

u donjoj k., za

$$z_i = 74°30', \quad R_i = 213''.7;$$
$$13.7, \quad \quad 3.4;$$

dakle $\quad z_i = 74\ 43.7, \quad R_i = 217.1;$

u gornjoj k. za

$$z_s = 19°0', \quad R_s = 20''.7;$$
$$29.3 \quad \quad 0.6$$
$$z_s = 19\ 29.3, \quad R_s = 21.3.$$

Prema tome prave zenitske daljine posmatrane nekretnice bile su, u trenucima njenih kulminacija,

$$z_i = 74°47'20'', \quad i \quad z_s = 19°29'42''.$$

(128) ~~(133)~~ Rešavajući prethodni zadatak našli smo (u Tablici na str.) za iznose srednje refrakcije, u trenucima posmatranja,

$$\text{za } z_i \approx 74°43'.7, \quad R_i = 3'37''.1 = 217''.1; \quad \text{za } z_s \approx 19°29'.3, \quad R_s = 0'21''.3.$$

Ove vrednosti treba još popraviti za pročitana stanja termometra i barometra.

U donjoj k.

za $12.8°C$, $\tau = -0.047$;

za 738 mm, $\beta = -0.029$;

$$R_i = 217''.1;$$
$$\tau R_i = -10.2;$$
$$\bar{R}_i = 206.9;$$
$$\beta \bar{R}_i = -6.0;$$
$$R_i = 200.9;$$
$$R_i = 3'21''.$$

u gornjoj k.

za $8.2°C$, $\tau = -0.031$;

za 740 mm, $\beta = -0.026$;

$$R_s = 21''.3;$$
$$\tau R_s = -0.7;$$
$$\bar{R}_s = 20.6;$$
$$\beta \bar{R}_s = -0.5;$$
$$R_s = 20.1;$$
$$R_s = 0'20''.$$

Prave zenitske daljine u obema kulminacijama bile su, prema tome,

$$z_i = 74°47'4'', \quad i \quad z_s = 19°29'40''.$$

Sa tim vrednostima za prave zenitske daljine u obema kulminacijama po-

smatrane nekretnice nalazimo:

za posmatračevu geografsku širinu $\varphi = 90° - \frac{1}{2}(z_i + z_s) = +42°\ 51'\ 40''$;

za deklinaciju posmatrane nekretnice $\delta = 90° - \frac{1}{2}(z_i - z_s) = +62\ \ 21\ \ 18.$

129 ~~134~~ Odredićemo, prvo, za svaku od posmatranih zenitskih daljina dejstvo refrakcije.

Za $z_s \approx 6°33'.7$ $\quad R_0 = 6'.3,\ +0.6,\ R_0 = 6.9,$ $\quad$ za $z_i \approx 71°27'.7$ $\quad R_0 = 173''.0,\ +4.4,\ R_0 = 177.4,$

za $16°.4\,C,\ \tau = -0.060$ $\quad \tau R_0 = -0.4,\ R_1 = 6.5,$ $\quad$ za $11°.8\,C,\ \tau = -0.043$ $\quad \tau R_0 = -7.6,\ R_1 = 169.8,$

za $748\,mm,\ \beta = -0.016$ $\quad \beta R_1 = -1.0,$ $\quad$ za $750\,mm,\ \beta = -0.013$ $\quad \beta R_1 = -2.2,$

za $z_s = 6°33'44''.5$ .... $R_s = 5.5$; za $z_i = 71°27'39''.3$ .... $R_i = 167.6.$

Zadatak ima — kao što je već bilo rečeno (v. ~~I deo Zbirke~~, str. 106) — dva rešenja, prema tome da li je zvezda u gornjoj kulminaciji prošla s e v e r n o ili j u ž n o od zenita. U prvom slučaju će biti:

$$\varphi_I = 90° - \frac{1}{2}(z_s + z_i), \qquad \delta_I = 90° + \frac{1}{2}(z_s - z_i).$$

U drugom slučaju će biti:

$$\varphi_{II} = 90° + \frac{1}{2}(z_s - z_i), \qquad \delta_{II} = 90° - \frac{1}{2}(z_s + z_i).$$

Sa nadjenim pravim zenitskim daljinama imaćemo:

$$z_s + z_i = 78°\ 4'\ 16''.9, \qquad \frac{1}{2}(z_s + z_i) = 39°\ 2'\ 8''.5;$$

$$z_s - z_i = -64\ \ 56\ \ 36.9, \qquad \frac{1}{2}(z_s - z_i) = -32\ \ 28\ \ 18.5.$$

Tražena rešenja će biti, prema tome

$$\varphi_I = +50°\ 57'\ 51''.5, \qquad \delta_I = +57°\ 31'\ 41''.5;$$

$$\varphi_{II} = +57\ \ 31\ \ 41.5, \qquad \delta_{II} = +50\ \ 57\ \ 51.5.$$

130 ~~135~~ Predstavimo na sl. 90 sa P_n i Z položaje severnog nebeskog pola i posmatračeva zenita; paralelom $\Sigma_R \Sigma Z$ — polovinu putanje što je nekretnica provede nad posmatračevim horizontom; sa Σ_R - položaj nakretnice u trenutku njena izlaza; sa Σ - položaj nekretnice u trenutku kad se nadje na 90° zenitske daljine, dakle u ravni posmatračeva horizonta.

U položajnom trouglu $ZP_n\Sigma_R$ poznati su nam od njegovih elemenata: strana $Z\Sigma_R = ZI + I\Sigma_R = 90°35'$, gde 35' predstavlja dejstvo astronomske

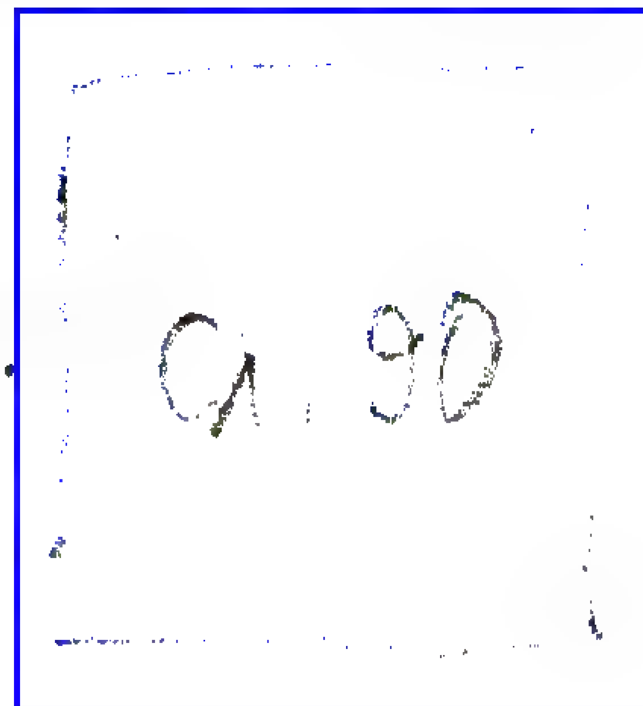
19385 III/4

refrakcije u horizontu; ugao $ZPn\Sigma_R$ na polu je časovni ugao izlaza: označićemo ga sa $-(H_0+\Delta H)$. Na ovaj način je istaknuto da je: $-H_0$ časovni ugao zvezde u trenutku njena prolaza (Σ) kroz ravan horizonta; a $-\Delta H$ - promena koju u časovnom uglu izaziva dejstvo refrakcije.

Prema zadatku je: $H_0+\Delta H = \frac{1}{2}(14^h 19^m 48^s) = 7^h\ 9^m\ 54^s$. Sem toga je $ZP_n = \Sigma_R P_n$, jer zvezda prolazi kroz posmatračev zenit.

Iz položajnog sfernog trougla $ZP_n\Sigma_R$ imamo:

$$\cos(90°35') = -\sin 35' = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos(H_0+\Delta H).$$



Odavde nalazimo

$$\sin^2\varphi = \frac{\cos(H_0+\Delta H)+\sin 35'}{\cos(H_0+\Delta H)-1} = \frac{N}{D},$$

izraz koji nam omogućuje da nadjemo φ, jer su na desnoj njegovoj strani sve veličine poznate.

Prema podacima zadatka, imamo:

$\cos(H_0+\Delta H) =$	$-0.30\,029,$	$[N]$	$9.46\,257\,n,$	
$\sin 35' =$	$0.01\,018,$	$[D]$	$0.11\,404\,n,$	
$N =$	$-0.29\,011,$	$2[\sin\varphi]$	$9.34\,853,$	
$D =$	$-1.30\,029;$	$[\sin\varphi]$	$9.67\,427,$	$\varphi = \delta = \pm 28°11'15''.$

Druga koordinata nekretnice, rektascenzija, ostaje nepromenjena, jer se smatra da se i trenutak izlaza, kao i časovni ugao, odnose na pravi izlaz (tačka I). Dakle

$$\alpha = t - (H_0+\Delta H) = 12^h\ 33^m\ 24^s - (-7^h\ 9^m\ 54^s) = 19^h\ 43^m\ 18^s.$$

131 (136). Do traženih veličina doći ćemo preko transformisane Gausove grupe u obrasce za odredjivanje δ i H, kad su dati φ, z i A, to jest preko obrazaca

$$\sin\delta = m\sin(\varphi-M),\quad \cos\delta\sin H = \sin z\sin A,\quad \cos\delta\cos H = m\cos(\varphi-M),$$

gde je stavljeno

$$\sin z\cos A = m\sin M,\quad \cos z = m\cos M.$$

Nepoznate veličine odredjene su iz ovih jednačina

$$\operatorname{tg} H = \sin M \operatorname{tg} A \sin(\varphi-M) \quad i \quad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\varphi-M)\cos H.$$

Kako se u zadatku traži da se dejstvo refrakcije uzme u obzir,

prvo ćemo odrediti iznos refrakcije, i to normalne, jer nikakvim drugim podacima ne raspolažemo o stanju atmosfere.

Sa posmatranom zenitskom daljinom, $z = 69^\circ 42' 30'' = 69^\circ 42'5$, nalazimo u tablici za refrakciju na str. :

za $z = 69^\circ 30'$ $159''5$,

za $12.5 \ldots\ldots 12.5 \times 0.14 \ldots\ldots 1.8$,

$R = 161.3$.

I tako za pravu zenitsku daljinu nalazimo $z_r = z + R = 69^\circ 45' 11''$.

$\varphi = +38^\circ 58' 53''$,		$[tg\, z_r]$	0.43 314,	M	$= 53^\circ 43' 40''$,
$z_r =$	69 45 11,	$[\cos A]$	9.70 126,	φ	$= 38\ 58\ 53$,
$A =$	300 10 30;	$[tg M]$	0.13 440;	$\varphi - M$	$= -14\ 44\ 47$.

Za nepoznate nalazimo:

$[\sin M]$	9.90 645,	$[tg(\varphi - M)]$	9.42 030 n,	dakle:
$[tg A]$	0.23 551 n,	$[\cos H_r]$	9.75 744,	$H = 304^\circ 53' 36''$,
$[\sec(\varphi - M)]$	0.01 454,	$[tg \delta_r]$	9.17 774 n;	
$[tg H_r]$	0.15 650 n,			$\delta = -8^\circ 33' 46''$.
$H_r = -55^\circ 6' 24''$;				

Dobivene vrednosti proverićemo na taj način što ćemo, sa datim podacima, neposredno izračunati dejstvo refrakcije na časovni ugao i deklinaciju. Izrazi za ova dejstva su, kao što znamo,

$$dH = \sin q \sec \delta\, dz \quad i \quad d\delta = -\cos q\, dz.$$

U njima je nepoznat samo položajni ugao, q, koji nalazimo iz obrazaca

$$\sin z \sin q = \cos \varphi \sin H_r, \qquad n \sin N = \cos \varphi \cos H_r,$$
$$\sin z \cos q = n \cos(\delta_r + N); \quad \text{gde je} \quad n \cos N = \sin \varphi.$$

Prema podacima u zadatku biće:

$[\cos \varphi]$	9.89 061,	$[\cos \varphi]$	9.89 061,	$[\sec \delta_r]$	0.00 480,
$[\cos H_r]$	9.75 744,	$[\sin H_r]$	9.91 393 n,	$[\sin q]$	9.83 229 n,
Σ	9.64 805,	Σ_1	9.80 454 n,	$[dz]$	2.20 763,
$[\sin \varphi]$	9.79 860,	$[n]$	9.88 663,	$[\cos q]$	9.86 542 n,
$[tg N]$	9.84 945,	$[\cos(\delta_r + N)]$	9.95 103,	$[dH]$	2.04 472 n,
$[\cos N]$	9.91 197,	Σ_2	9.83 766,	$[d\delta]$	2.07 305 n,

$[n] \quad 9{\cdot}88\,663$, $\quad \Sigma_1 - \Sigma_2 = [tg\,q] \quad 9{\cdot}96\,688\,n$,

$N = 35^\circ\,15'\,44''$, $\quad q = -42^\circ\,49'\,2''$;

$\delta_1 + N = 26\;41\;58$;

195

$dH = -110''.8$,

$d\delta = -118{\cdot}3$.

Rešavajući isti zadatak bez obzira na dejstvo refrakcije (v. zad. 91, ~~I deo~~ Zbirke, str. 107), našli smo za časovni ugao i deklinaciju zvezde:

$$H = 304^\circ\,55'\,27'' \quad i \quad \delta = -8^\circ\,31'\,47''.$$

Kako smo gore našli, refrakcija u ovim koordinatama proizvodi promene:

$$dH = -1'\,51'' \quad i \quad d\delta = -1'\,58''.$$

Prema tome, za prave ekvatorske koordinate posmatrane nekretnice nalazimo

$$H_r = 304^\circ\,53'\,36'' \quad i \quad \delta_r = -8^\circ\,33'\,45'',$$

koje se slažu sa ranije nadjenim vrednostima.

132 (~~137.~~) Prividna depresija posmatračeva horizonta, u minutama, data je izrazom

$$\Delta = 1'.76\sqrt{h},$$

gde h predstavlja u metrima izraženu visinu posmatračeva oka. Prema zadatku je, onda,

$$60 = 1{\cdot}76\sqrt{h}, \quad \text{to jest} \quad h = (34{\cdot}09)^2.$$

To jest, data prividna depresija horizonta odgovara visini posmatračeva oka od 1162 m.

Toj visini odgovara daljina vida, u nautičkim miljama,

$$D = 2'.11\sqrt{h} = 2{\cdot}11 \times 34{\cdot}09 \text{ n.m.} = 2{\cdot}11 \times 34{\cdot}09 \times 1{\cdot}852 \text{ km} = 133 \text{ km}.$$

133 (~~138.~~) Označimo: sa R_s i R_i — iznose refrakcije na posmatranim zenitskim daljinama; sa ζ_s i ζ_i — prave zenitske daljine u trenucima posmatranja. Onda, prema zadatku, imamo

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + R_s = z_s + k\,tg\,z_s,$$

$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + R_i = z_i + k\,tg\,z_i.$$

Odavde nalazimo

$$180^\circ - 2\varphi = z_s + z_i + k(tg\,z_s + tg\,z_i),$$

to jest $$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}\left[(z_s + z_i) + k(\operatorname{tg} z_s + \operatorname{tg} z_i)\right].$$

Prema podacima zadatka biće:

$$z_s = 30^\circ\ 10'\ 37'', \quad \operatorname{tg} z_s = 0.5815, \quad k = 60''.3,$$
$$z_i = 60\ 10\ 37, \quad \operatorname{tg} z_i = 1.7444, \quad \Sigma k = 138.7,$$
$$\Sigma_z = 90\ 21\ 14, \quad \Sigma = 2.3259, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma k = 69.8.$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma_z = 45\ 10\ 37; \quad \Sigma \approx 2.3;$$

Tako nalazimo: $\varphi = 90^\circ - 45^\circ\ 10'\ 37'' - 1'\ 10'' = +44^\circ\ 48'\ 12''.$

Da smo se poslužili tablicama za srednju refrakciju, našli bismo:

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + R_s = 30^\circ\ 10'\ 37'' + 34''.9 \approx 30^\circ\ 11'\ 12'',$$
$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + R_i = 60^\circ\ 10'\ 37'' + 1'\ 44''.5 \approx 60^\circ\ 12'\ 25''.$$

Odavde je $$\varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(30^\circ\ 11'\ 12'' + 60^\circ\ 12'\ 25'') = +44^\circ\ 48'\ 12''.$$

134 ~~139.~~ Predstavimo na sl. 91 sa:

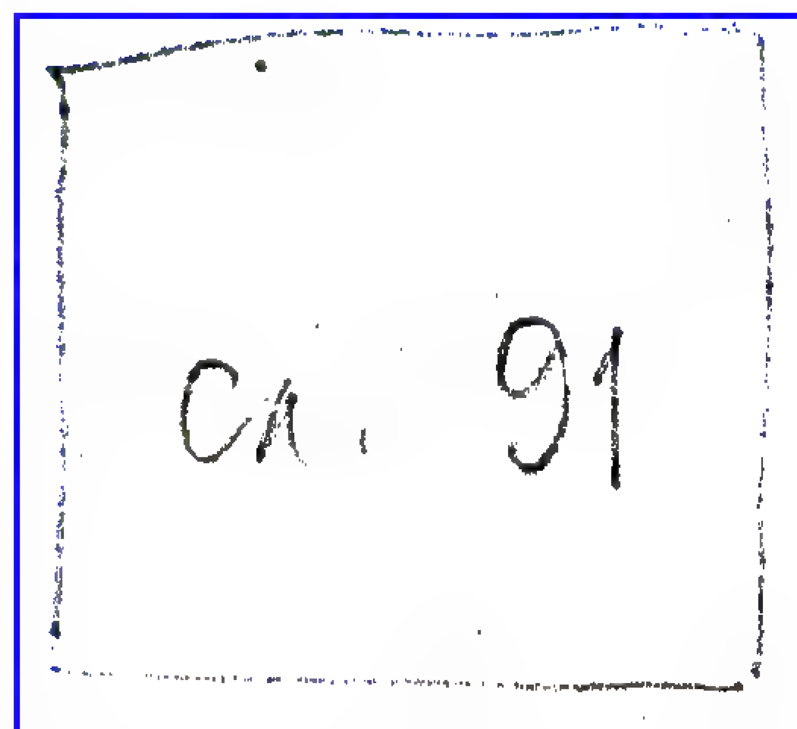
S_s i S_i - prave položaje posmatrane cirkumpolarne u gornjoj odn. donjoj kulminaciji;

ζ_s i ζ_i - prave zenitske daljine njene, u tim trenucima;

Σ_s i Σ_i - prividne položaje posmatrane cirkumpolarne;

z_s i z_i - prividne zenitske daljine njene;

R_s i R_i - iznose refrakcije u trenucima posmatranja.



Onda je

$$\zeta_s = z_s + R_s = z_s + k \operatorname{tg} z_s,$$
$$\zeta_i = z_i + R_i = z_i + k \operatorname{tg} z_i.$$

S druge strane, ako pretpostavimo da je i gornja kulminacija cirkumpolarne bila sa severne strane zenita, za prave zenitske daljine imaćemo:

$$\zeta_s = \delta - \varphi \quad i \quad \zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi).$$

Prema tome će biti

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + k \operatorname{tg} z_s, \tag{1}$$
$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + k \operatorname{tg} z_i. \tag{2}$$

U prvom pitanju zadatka deklinacija nekretnice je nepoznata. Stoga ćemo je iz ovih jednačina eliminisati. I dobićemo

$$180^\circ - 2\varphi = z_s + z_i + k(\operatorname{tg} z_s + \operatorname{tg} z_i).$$

Odavde možemo odrediti vrednost konstante k. Prema podacima zadatka biće:

$$\begin{array}{lll}
\varphi = +44^\circ\ 48'\ 13''.2, & z_s = 17^\circ\ 18'\ 48''.2, & \operatorname{tg} z_s = 0.3117, \\
2\varphi = \underline{89\ \ 36\ \ 26.4}, & z_i = \underline{73\ \ \ 1\ \ 11.6}, & \operatorname{tg} z_i = \underline{3.2749}, \\
180^\circ - 2\varphi = 90\ \ 23\ \ 33.6; & z_s + z_i = 90\ \ 19\ \ 59.8; & \Sigma = 3.5866, \\
 & & \Sigma \approx 3.59.
\end{array}$$

Prema tome je:

$$[180^\circ - 2\varphi - (z_s + z_i)] = 90^\circ 23' 33''.6 - 90^\circ 19' 59''.8 = 3'\ 33''.8 = 213''.8,$$

tako da nalazimo $k = 213''.8 : 3.59 = 59''.6.$

[Veća tačnost se i ne može na ovaj način postići].

Pošto smo odredili k, možemo odrediti, bilo iz (1), bilo iz (2), i deklinaciju posmatrane cirkumpolarne. Nalazimo

$$\delta = \varphi + z_s + k \operatorname{tg} z_s, \qquad \text{odnosno} \qquad \delta = 180^\circ - (\varphi + z_i) - k \operatorname{tg} z_i.$$

Sa podacima zadatka dobivamo:

$$\begin{array}{ll}
\varphi = +44^\circ\ 48'\ 13''.2, & \varphi = +44^\circ\ 48'\ 13''.2, \\
z_s = \ \ 17\ \ 18\ \ 48.2, & z_i = \underline{73\ \ \ 1\ \ 11.6}, \\
k \operatorname{tg} z_s = \underline{\qquad\qquad 18.6}, & \varphi + z_i = 117\ \ 49\ \ 24.8, \\
\delta = +62\ \ \ 7\ \ 20.0; & 180^\circ - (\varphi + z_i) = 62\ \ 10\ \ 35.2, \\
 & -k \operatorname{tg} z_i = \underline{-\ \ \ 3\ \ 15.2}, \\
 & \delta = +62\ \ \ 7\ \ 20.0.
\end{array}$$

2. Ako se pretpostavi da su atmosferski uslovi isti bili u trenucima oba posmatranja, za iznose refrakcije u tim trenucima imaćemo

$$R_s = A \operatorname{tg} z_s - B \operatorname{tg}^3 z_s \qquad i \qquad R_i = A \operatorname{tg} z_i - B \operatorname{tg}^3 z_i.$$

Primetimo li da je nekretnica bila i u gornjoj kulminaciji sa severne strane posmatračeva zenita, imaćemo

$$\zeta_s = \delta - \varphi = z_s + A \operatorname{tg} z_s - B \operatorname{tg}^3 z_s,$$

$$\zeta_i = 180^\circ - (\delta + \varphi) = z_i + A \operatorname{tg} z_i - B \operatorname{tg}^3 z_i.$$

Kako nam je, u ovom slučaju, data (pored geografske širine posmatrača) i deklinacija posmatrane cirkumpolarne, u poslednjim dvema jednačinama su nam nepoznate samo vrednosti koeficijenata A i B.

Sa poznatim podacima zadatka imaćemo, prema tome:

$$\delta = +62^\circ\ 7'\ 20''.2,\quad \varphi = +44\ 48\ 13.2,\quad \delta-\varphi = 17\ 19\ 7.0,\quad z_s = 17\ 18\ 48.2,\quad \delta-\varphi-z_s = 18.8;$$

$$\delta+\varphi = 106^\circ\ 55'\ 33.4,\quad 180^\circ-(\delta+\varphi) = 73\ 4\ 26.6,\quad z_i = 73\ 1\ 11.6,\quad 180^\circ-(\delta+\varphi)-z_i = 3\ 15.0;$$

$$tg\, z_s = 0.31172,\quad tg^3 z_s = 0.0303,\quad tg\, z_i = 3.2749,\quad tg^3 z_i = 35.12\ldots,$$

Iz jednačina:

$$0.3117 A - 0.0303 B = 18''8,$$

$$3.27 A - 35.12 B = 195''0,$$

nalazimo $A = 60''3$, i $B = 0.0640$.

I povodom ovih rezultata možemo ponoviti napomenu da se sa posmatranjem svega jedne cirkumpolarne, pri odredjivanju vrednosti ovih konstanata, ne može veća tačnost postići.

135 ~~140.~~ Pretposatvićemo da se brod nalazi na severnoj Zemljinoj hemisferi. Prema zadatku, Sunce je posmatrano u trenutku prolaza kroz meridijan broda. Prema tome je njegova geografska širina odredjena izrazom $\varphi = \delta_\odot + z_\odot = \delta_\odot + 90^\circ - h_\odot$, gde $\delta_\odot$, $z_\odot$ i $h_\odot$ označavaju: deklinaciju, odn. pravu zenitsku daljinu, odn. pravu visinu — središta Sunčeva prividnog diska.

U zadatku je data prividna visina ($\bar{h}_\odot$) donjeg ruba Sunčeva prividnog diska, merena od morskog horizonta. Zato treba, prvo, datu visinu popraviti (smanjiti) za prividnu depresiju (Δ) horizonta. Ovako popravljenu prividnu visinu ($h'_\odot$) Sunčeva donjeg ruba treba popraviti za (srednju) refrakciju (R). I dobićemo pravu visinu ($h_\odot$) Sunčeva donjeg ruba. Ako se sad još ovoj doda vrednost polupréčnika ($r_\odot$, iz Godišnjaka našeg neba, za datum posmatranja) Sunčeva prividnog diska, dobiće se prava visina ($h_\odot$) središta Sunčeva prividnog diska, pomoću koje se izračunava tražena geografska širina broda. Deklinaciju središta Sunčeva diska uzimamo iz Godišnjaka našeg neba, za datum i čas (za koji

ćemo uzeti griničko podne) posmatranja. Znači za deklinaciju ($\delta_{\odot}$) nalazimo $+19^{\circ}\ 16'\ 47''$.

Prema tome, sa uvedenim oznakama (v. i sl. 92) i podacima zadatka biće:

$$\widehat{TPA'} = h_{\odot} = 40^{\circ}\ 58'\ 54'',$$
$$\widehat{TPH_2} = \Delta = 1'.76\sqrt{12} = \underline{\quad 6\ \ 5,}$$
$$\widehat{HPA'} = h'_{\odot} = 40^{\circ}\ 52\ 49,$$
$$\widehat{A'PA} = R = \underline{\quad 1\ \ 9,}$$
$$\widehat{H_2PA} = h_{\odot} = 40\ 51\ 40;$$

Сл. 92

$$\widehat{H_2PA} = h_{\odot} = 40^{\circ}\ 51'\ 40'',$$
$$\widehat{APS} = \tau_{\odot} = \underline{\quad 15\ 50,}$$
$$\widehat{H_2PS} = h_{\odot} = 41\ \ 7\ 30,$$
$$90^{\circ} - h_{\odot} = z_{\odot} = 48\ 52\ 30,$$
$$\delta_{\odot} = \underline{+19\ 16\ 47,}$$
$$\underline{\varphi = +68\ \ 9\ 17.}$$

(136) ~~141.~~ U trenutku kad zvezda dospe u najveću digresiju, položajni sferni trougao ($\angle Z_nP_n$, v. sl. 93) je pravougli, sa pravim uglom kod zvezde. Prema tome, u tom položaju u trenutku, za odredjivanje zenitske daljine zvezde imamo obrazac

Сл. 93

$$\cos z = \sin\varphi \operatorname{cosec}\delta,$$

koji možemo, ako je potrebno, transformisati u

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z = \left[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\varphi)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\delta+\varphi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Kako su u zadatku date i deklinacija zvezde i posmatračeva geografska širina, možemo zenitsku daljinu zvezde izračunati. Prema tome ćemo moći i iznos refrakcije, u trenutku najveće digresije uočene nekretnice, dobiti dovoljno tačno iz obrasca

$$R = k\operatorname{tg}z.$$

U stvari će ovo biti samo približna vrednost tog iznosa. A to iz dva razloga. Prvo, što je sâm ovaj izraz za refrakciju — približan. I, drugo, što je u njemu z prava zenitska daljina, a u izraz za refrakciju ulazi prividna zenitska daljina. Medjutim ova nam nije ni data, ni poznata.

No, u ovom slučaju, ta okolnost neće imati osetnog uticaja na rezultat. Drugim rečima, ako sa ζ označimo prividnu zenitsku daljinu, u trenutku najveće digresije posmatrane zvezde, njenu vrednost moćemo dovoljno približnu dobiti, ako uzmemo

$$\zeta = z - R = z - k\,tg\,z.$$

I tako bismo, za traženi iznos refrakcije, dobili približniju vrednost

$$R_* = k\,tg\,z.$$

Prema podacima zadatka biće, dakle:

$\delta = +64°\ 13'\ 20''$,		$[tg\,\frac{1}{2}(\delta-\varphi)]$	9.30549,	$[k]$	1.78032,
$\varphi = +41\ \ 22\ \ 30$,		$[ctg\,\frac{1}{2}(\delta+\varphi)]$	9.88029,	$[tg\,z]$	9.96623,
$\delta-\varphi =$	$22\ \ 50\ \ 50$,	$2[tg\,\frac{1}{2}z]$	9.18578,	$[R]$	1.74655,
$\delta+\varphi =$	$105\ \ 35\ \ 50$,	$[tg\,\frac{1}{2}z]$	9.59289,	$R =$	$0'\ 55.''8$,
$\frac{1}{2}(\delta-\varphi) =$	$11\ \ 25\ \ 25$,	$\frac{1}{2}z =$	$21°\ 23'\ 14.''5$,	$R_* =$	$0\ \ 55.8$.
$\frac{1}{2}(\delta+\varphi) =$	$52\ \ 47\ \ 55$;	$z =$	$42\ \ 46\ \ 29$.		

Da smo R i R_* vadili iz tablice, našli bismo 55".6.

1. Da bismo mogli odrediti za koliko, usled dejstva refrakcije, dospeva zvezda ranije, ili kasnije, u najveću digresiju, ispomoći ćemo se slikom 93. Na njoj su predstavljeni sa:

Σ — položaj nekretnice kad se ova stvarno nalazi u najvećoj digresiji;

Σ_r — položaj u kojem je, usled dejstva refrakcije, mi tada vidimo.

Jasno je sa slike da, usled dejstva refrakcije, mi zvezdu u zapadnoj najvećoj digresiji (dakle, po prolazu kroz meridijan) posmatramo k a s n i j e, to jest pošto stvarno prodje kroz taj položaj; a u istočnoj najvećoj digresiji posmatramo r a n i j e nego što stvarno prodje kroz taj položaj. Drugim rečima, zbog dejstva refrakcije, zapadna prava najveća digresija nekretnice dogadja se p r e prividne, a istočna prava najveća digresija dogadja se p o s l e prividne.

Iz položajnog sfernog trougla (v. sl. 93) $Z_n \Sigma P_n$ imamo u trenutku najveće digresije nekretnice — što znači kad paralaktički ugao postane u njemu prav — ako sa H označimo časovni ugao nakretnice u tom trenutku

$$tgH = tgz\ sec\delta.$$

Diferencirajmo ovu jednačinu i imaćemo, ako primetimo da je kod nekretnica δ konstantno,

$$\sec^2 H\, dH = \sec^2 z \sec\delta\, dz,$$

odnosno

$$dH = \sec\delta \sec^2 z \cos^2 H\, dz.$$

Primetimo li da, u trenutku najveće digresije zvezde, iz položajnog sfernog trougla imamo

$$\sec z = \sin\delta \operatorname{cosec}\varphi \qquad i \qquad \cos H = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\delta,$$

posle izvršene zamene u gornjem obrascu imaćemo

$$dH = \sec\delta \sin^2\delta \operatorname{cosec}^2\varphi \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{ctg}^2\delta\, dz,$$

to jest

$$dH = \cos\delta \sec^2\varphi\, dz.$$

Ako za dz, na desnoj strani, stavimo promenu koju u zenitskoj daljini nekretnice, u najvećoj digresiji, izaziva refrakcija, izraz na desnoj strani predstavljaće traženu promenu u časovnom uglu nekretnice usled dejstva refrakcije.

Sa podacima zadatka i ranije nadjenom vrednošću za dz imaćemo

$[\cos\delta]$	9.63 837,			
$[\sec^2\varphi]$	0.24 942,		dH =	$43''.1$,
$[dz]$	1.74 663,			
$[dH]$	1.63 442;		dH =	$2^s.9$.

Dakle, kao posledica dejstva refrakcije, prava najveća digresija nekretnice nailazi: na zapadu — ranije, na istoku — kasnije, za svega: $2^s.9$.

2. Za promenu, usled dejstva refrakcije, u paralaktičkom uglu imamo obrazac (v.t. , str.)

$$dq = -\operatorname{tg}\delta_r \operatorname{tg} z_r \sin q_r\, dz,$$

gde su indeksima $_r$ označene vrednosti prividnih koordinata posmatrane nekretnice. Kako se ova, prema zadatku, nalazi u najvećoj digresiji, ugao q_r je prav. Tako da poslednji obrazac postaje, u tom slučaju

$$dq = -\operatorname{tg}\delta_r \operatorname{tg} z_r\, dz.$$

Veličine δ_r i z_r, na desnoj strani, nisu nam poznate. Ali kako se one javljaju kao argumenti goniometrijskih funkcija, čije je vrednosti, u ovom slučaju, dovoljno da poznajemo i sa dve decimale, — možemo, mesto

prividnih, uzeti i vrednosti pravih koordinata (koje su nam poznate) za izračunavanje tražene promene.

Sa ovima će biti

$$[tg\,\delta] \quad 0.31611,$$
$$[tg\,z] \quad 9.96623,$$
$$[dz] \quad 1.74633,$$
$$[dq] \quad 2.02867;$$

$$dq = -106''.8,$$
$$dq = -1'\,47''.$$

(137) ~~142~~ **P r v i   n a č i n.** Neka predstavljaju na sl. 94:

Σ — pravi položaj nekretnice;

Σ_R — prividni položaj te nekretnice, dakle

$P_n \Sigma_R \Sigma = \pi + q$ — paralaktički ugao;

δ — pravu deklinaciju posmatrane nekretnice;

δ' — prividnu njenu deklinaciju.

Сл. 94

Sa ovim oznakam, iz sfernog trougla $P_n \Sigma_R \Sigma$ imaćemo

$$\sin\delta = \sin\delta'\cos R - \cos\delta'\sin R\cos q. \qquad (1)$$

Pomoću ove jednačine možemo doći do izraza za dejstvo refrakcije na deklinaciju, smatrajući u njoj δ kao funkciju veličine R. Ako je razvijemo u Maklorenov red, imaćemo

$$\delta = f(R) = f(0) + Rf'(0) + \frac{1}{2}R^2 f''(0) + \cdots\cdots\cdots$$

Za vrednosti funkcije i njenih uzastopnih izvoda, za R = 0, nalazimo, iz (1)

$$f(0) = \delta = \delta'. \qquad (2)$$

Zatim, ako primetimo da, iz (1), imamo

$$\cos\delta\frac{d\delta}{dR} = -\sin R\sin\delta' - \cos R\cos\delta'\cos q, \qquad (3)$$

nalazimo

$$f'(R) = \frac{d\delta}{dR} = (-\sin R\sin\delta - \cos R\cos\delta'\cos q)\sec\delta,$$

tako da dobivamo

$$f'(0) = -\cos\delta'\cos q\sec\delta,$$

to jest, zbog (2),

$$f'(0) = -\cos q.$$

Za drugi izvod imaćemo, iz (3),

$$-\sin\delta\left(\frac{d\delta}{dR}\right)^2+\cos\delta\frac{d^2\delta}{dR^2}=-\cos R\sin\delta'+\sin R\cos\delta'\cos q=-\sin\delta.$$

Prema tome će biti

$$f''(R)=\frac{d^2\delta}{dR^2}=\left[\left(\frac{d\delta}{dR}\right)^2-1\right]tg\delta,$$

dakle

$$f''(0)=(\cos^2 q-1)\,tg\delta=-\sin^2 q\,tg\delta.$$

Tako smo, dakle, za red dobili

$$\delta=\delta'-R\cos q-\tfrac{1}{2}R^2 tg\delta\sin^2 q-\cdots\cdots$$

Primetimo li da za umerene (do, recimo, 70°) zenitske daljine iznosi refrakcije dostižu svega po nekoliko minuta ugla, moći ćemo zanemariti kvadrate i više stepene iznosa refrakcije. Tako da gornji red, u tom slučaju, postaje

$$\delta=\delta'-R\cos q,$$

to jest, za promenu deklinacije nekretnice, usled refrakcije dobićamo

$$\delta-\delta'=\Delta\delta=-R\cos q.$$

Promene, dakle, u deklinaciji nekretnice, usled dejstva refrakcije, neće biti (biće nula), ako je cosq = 0, što će reći ako je q = ± 90°, drugim rečima, kad se nekretnica nadje u najvećoj digresiji.

gure ye unory

D r u g i   n a č i n. Neka na sl. 95 predstavljaju:

Sл. 95

Σ — pravi položaj nekretnice;

Σ_R — prividni položaj njen; dakle $\Sigma\Sigma_R=R$;

Projiciramo li položaj Σ_R na veliki krug $P_n\Sigma$, luk $\Sigma Q=\Delta\delta$ predstavljaće promenu deklinacije nekretnice usled dejstva refrakcije. Označimo li paralaktički ugao zvezde, $P_n Z_R Z$, sa q, moći ćemo promenu deklinacije izraziti, iz malog pravouglog trougla $Z_R Q\Sigma$, u obliku

$$\Delta\delta=R\cos q.$$

I vidimo da će biti $\Delta\delta=0$, ako je cosq = 0, to jest ako je q = ± 90°. Što znači da refrakcija nema dejstva na deklinaciju posmatrane nekretnice ako se ova nalazi u najvećoj digresiji.

(138) ~~143~~. U rešenju prethodnog zadatka pokazano je da na deklinaciju nebeskog tela refrakcija ne deluje [redacted] kad se ono nadje u najvećoj digresiji. Da nekretnica može dospeti u ovaj položaj, u toku svog prividnog dnevnog kretanja, uslov je da bude $\delta > \varphi$, to jest da deklinacija nekretnice bude veća od posmatračeve geografske širine, ili da se obe kulminacije nekretnice dogadjaju sa severne strane horizonta. Ove će biti obe za posmatrača vidljive, drugim rečima nekretnica će biti za posmatrača nadhorizontska cirkumpolarna, ako je $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$;
64, a ako je $\frac{\pi}{2} > \delta > \varphi$, jedan deo prividnog dnevnog puta nekretnice će se nalaziti pod posmatračevim horizontom: nekretnica će, dakle, izlaziti i zalaziti za pasmatrača. Stoga ćemo i u rešenju morati razlikovati dva slučaja.

P r v i   s l u č a j: $\varphi < \delta_1 < \frac{\pi}{2} - \varphi$. Kako je, prema zadatku, $\varphi = +38^\circ$, dakle $\frac{\pi}{2} - \varphi = 52^\circ$, uzećemo da je $\delta_1 = +45^\circ$. Karakteristični položaji ove nekretnice, u toku njena prividnog dnevnog kretanja, za našeg posmatrača su: izlaz, zalaz, najveće digresije i gornja kulminacija nekretnice, jer donja njena kulminacija se dogadja pod posmatračevim horizontom.

a) Kako se u trenucima izlaza, odnosno zalaza, nekretnica nalazi na najvećoj mogućoj zenitskoj daljini na kojoj posmatrač može još da je vidi, to je i dejstvo refrakcije u tim trenucima i položajima najveće. Uzima se da ono iznosi $R_z = 34'$.

Treba još izračunati trenutke i azimute izlaza i zalaza uočene nekretnice, vodeći računa o dejstvu refrakcije. To možemo postići na dva načina. Po prvom, pomenute veličine možemo dobiti iz obrazaca

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H, \qquad (1)$$

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A, \qquad (2)$$

stavljajući u ove, za zenitsku daljinu, $z = 90^\circ 34'$. Za efektivno izračunavanje časovnog ugla i azimuta izlaza, odnosno zalaza, napisaćemo ove obrasce u obliku

$$\cos H = (\cos z - \sin\delta \sin\varphi) \sec\delta \sec\varphi,$$

$$\cos A = (\cos z \sin\varphi - \sin\delta)\,\mathrm{cosec}\, z \sec\varphi .$$

Na već poznati način možemo ove obrasce svesti, stavljajući

$$s = \tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta),$$

na oblik pogodan za logaritamsko računanje:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}H = \sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)\sec s \sec(s-z),$$

$$tg^2 \tfrac{1}{2}A = \sin(s-\varphi)\cos(s-z)\sec s\,\mathrm{cosec}(s-\delta).$$

Prema podacima zadatka biće:

$\varphi = +38°$,		$[\sin(s-\varphi)]$	9.87 635,	$[\sin(s-\varphi)]$	9.87 635,
$\delta = +45$,		$[\sin(s-\delta)]$	9.82 368,	$[\cos(s-z)]$	9.99 905,
$z =$	90 34′,	$[\sec s]$	1.25 094,	$[\sec s]$	1.25 094,
$2s =$	173 34,	$[\sec(s-z)]$	0.00 095,	$[\mathrm{cosec}(s-\delta)]$	0.17 632,
$s =$	86 47,	$2[tg\frac{1}{2}H]$	0.95 192,	$2[tg\frac{1}{2}A]$	1.30 266,
$s-\varphi =$	48 47,	$[tg\frac{1}{2}H]$	0.47 596,	$[tg\frac{1}{2}A]$	0.65 133,
$s-z =$	− 3 47,	$\frac{1}{2}H =$	71° 31′ 9″,	$\frac{1}{2}A =$	77° 25′ 7″,
$s-\delta =$	41 47;	$\frac{1}{2}H =$	$4^h\, 46^m\, 4^s.6$,	$A_R =$	154 50 14.
		$H_R =$	9 32 9.2;		

Da je u zadatku bila data i rektascenzija (α) nekretnice, kako smo našli časovni ugao izlaza, odnosno zalaza, mogli bismo izračunati i trenutke (zvezdanog vremena) izlaza, odnosno zalaza, nekretnice. Dobili bismo, u tom slučaju

za trenutak izlaza: $t_i = \alpha - 9^h\, 32^m\, 9^s.2$; za azimut izlaza: $A_i = 205°\, 9'\, 46''$;

za trenutak zalaza: $t_z = \alpha + 9^h\, 32^m\, 9^s.2$; za azimut zalaza: $A_z = 154\;50\;14$.

Do istih rezultata mogli bismo i ovako doći. Stavljajući u obrasce (1) i (2) za zenitsku daljinu z = 90°, dobili bismo časovni ugao i azimut za takozvani "geometrijski" izlaz, odnosno zalaz nekretnice. A diferencirajući po z izraze (1) i (2), pa stavljajući za diferencijal dz vrednost refrakcije za z = 90°, dobićemo promene koje refrakcija proizvodi u časovnom uglu i azimutu izlaza, odnosno zalaza nekretnice.

Tako iz (1) i (2) dobivamo

$$0 = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H, \qquad ili \qquad \cos H = -tg\delta\, tg\varphi,$$

$$\sin\delta = -\cos\varphi \cos A, \qquad ili \qquad \cos A = -\sin\delta \sec\varphi.$$

Iz ovih jednačina, pomoću već poznatih transformacija i stavljajući $\delta = 90° - p$, dobivamo za odredjivanje časovnog ugla i azimuta, za z = 90°, izraze:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}H = \cos(\varphi-\delta) \sec(\varphi+\delta),$$
$$tg^2 \tfrac{1}{2}A = ctg\tfrac{1}{2}(p-\varphi)\, ctg\tfrac{1}{2}(p+\varphi).$$

A za odredjivanje promena u časovnom uglu i azimutu, usled dejstva refrakcije, dobivamo iz (1) i (2)

$$dH = \sec\varphi \sec\delta \operatorname{cosec} H\, dz,$$
$$dA = tg\varphi \operatorname{cosec} A\, dz.$$

Prema podacima zadatka imaćemo:

φ =	+38°,	$[\cos(\varphi-\delta)]$	9.99 675,	$[ctg\frac{1}{2}(p-\varphi)]$	1.21 351,
δ =	+45,	$[\sec(\varphi+\delta)]$	0.91 411,	$[ctg\frac{1}{2}(p+\varphi)]$	0.05 319,
$\varphi-\delta$ =	−7,	$2[tg\frac{1}{2}H]$	0.91 086,	$2[tg\frac{1}{2}A]$	1.26 670,
$\varphi+\delta$ =	83,	$[tg\frac{1}{2}H]$	0.45 543,	$[tg\frac{1}{2}A]$	0.63 335,
$\frac{1}{2}(p-\varphi)$ =	3° 30′,	$\frac{1}{2}H$ =	70° 41′ 21″,	$\frac{1}{2}A$ =	76° 54′ 17″,
$\frac{1}{2}(p+\varphi)$ =	41 30;	H =	141 22 42,	A =	153 48 34.
		H =	$9^h\ 25^m\ 30^s.8$;		

$[\sec\delta]$	0.15 051,	Σ =	0.45 867,	$[tg\varphi]$	9.89 281,
$[\sec\varphi]$	0.10 347,	$[dz]$	1.53 148,	$[\operatorname{cosec} A]$	0.35 521,
$[\operatorname{cosec} H]$	0.20 469,	$[dH]$	1.99 015,	$[dz]$	1.53 148,
Σ =	0.45 867;	dH =	97′.76,	$[dA]$	1.77 950,
		dH =	$6^s\ 31^s.0$;	dA =	60′.19,
				dA =	1° 0′.2.

(Primedba. Izračunate veličine možemo proveriti, s jedne strane, pomoću malog pravouglog trougla na sferi $\Sigma_R \Sigma I$ (v. sl. 90) čije su strane, kao što vidimo, $\Sigma I = A_R - A = \Delta A = 61'.67$; $I Z_R = \Delta z = 34'$; $\Sigma_R \Sigma = (H_R - H)\cos\delta = \Delta H \cos\delta = 70'.43$.

Taj mali trougao možemo smatrati kao r a v n i pravougli trougao. Prema tome treba da je

$$(\Delta A)^2+(\Delta z)^2 = (\Delta H \cos\delta)^2.$$

Uvrstimo li vrednosti ovih razlika, nalazimo da je jednačina zadovoljena.

Uporedimo li, medjutim, razlike $A_R - A = \Delta A = 61'.67$ i $H_R - H = \Delta H = 99'.60$ sa diferencijalima $dH = 97'.76$ i $dA = 60'.19$, koji predstavljaju dejstva refrakcije na časovni ugao, odnosno na azimut nekretnice, u trenutku zalaza (izlaza), vidimo da se te vrednosti — ne podudaraju, ne proveravaju!

Objašnjenje ovom nepodudaranju treba tražiti u činjenici što se ovde nalazimo pred slučajem kad za odredjivanje promene funkcije treba voditi računa i o njenim drugim izvodima.

U rešenju Zad. 122 pokazano je već bilo da za promenu visine u funkciji časovnog ugla (to jest vremena) imamo

$$dh = \left(\frac{dh}{dH}\right) dH + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2h}{dH^2}\right) dH^2 + \cdots\cdots\cdots,$$

gde je

$$\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi \sin A, \qquad \frac{d^2h}{dH^2} = -\cos\varphi \cos A \cos q \cos\delta \sec h.$$

Kad je $h = 0^\circ$, dakle $z = 90^\circ$, položajni sferni trougao $Z_n P_n \Sigma$ je kvadrantni, tako da je

$$\cos A \cos q = \cos H \qquad i \qquad \sin A \operatorname{cosec} H = \cos\delta.$$

Prema tome dobivamo za drugi izvod, kad je $h = 0^\circ$ (što će reći kad se nebesko telo nalazi u ravni horizonta),

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos\varphi \sin A \operatorname{ctg} H.$$

I tako za promenu visine nebeskog tela, u tom položaju, nalazimo

$$dh = -\cos\varphi \sin A\, dH - \frac{1}{2}\cos\varphi \sin A \operatorname{ctg} H\, dH^2 - \cdots\cdots\cdots.$$

Na isti način nalazimo za promenu azimuta, u tom položaju,

$$dA = \sin\varphi\, dH - \frac{1}{2}\cos^2\varphi \sin A \cos A\, dH^2 + \cdots\cdots\cdots.$$

Odavde lako dobivamo, za promene časovnog ugla i azimuta u funkciji zenitske daljine, za $z = 90^\circ$,

$$dH = \sec\varphi \operatorname{cosec} A\, dz - \frac{1}{2}\sec^2\varphi \operatorname{cosec}^2 A \operatorname{ctg} H\, dz^2 + \cdots\cdots\cdots,$$

$$dA = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec} A\, dz - \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi \operatorname{cosec}^2 A\right) \operatorname{ctg} A\, dz^2 + \cdots\cdots.$$

Sa podacima zadatka nalazimo sad za promene časovnog ugla i azimuta, usled dejstva refrakcije, pri izlazu, odnosno zalazu uočene nekretnice:

$\varphi = +38^\circ$,		$[\frac{1}{2}]$	9.69 897,	$[\frac{1}{2}]$	9.69 897,
$\delta = +45$,		$2[\sec\varphi \operatorname{cosec} A]$	0.91 736,	$[1+tg^2\varphi \operatorname{cosec}^2 A]$	0.61 633,
$dz = 0\ 34'$,		$[ctg H]$	0.09 750n,	$[ctg A]$	0.30 816n,
$dz = 0.009\ 890$;		$2[dz]$	5.99 040,	$2[dz]$	5.99 040,
$H = 141^\circ\ 22'\ 42''$,		$\Sigma_1 =$	6.70 423n,	$\Sigma_2 =$	6.61 386n,
$A = 153\ 48\ 34$;		$[\rho']$	3.53 627,	$[\rho']$	3.53 627,
		[II član]	0.24 050n;	[II član]	0.15 013n.

Tako smo dobili za druge članove promena:

časovnog ugla: $+1'.74$, azimuta: $+1'.4$.

Dodamo li ih prvim članovima, dobivamo za promene:

$$dH = +99'.50 = +6^m\ 38^s.0, \qquad dA = +1^\circ\ 1'.6;$$

a nadjeno je: $H_R - H = +99'.50 = +6^m\ 38^s.0$, $A_R - A = +1^\circ\ 1'.7$.

Tako smo, dakle, proverili na dva načina dobivene vrednosti za dejstvo refrakcije na časovni ugao i azimut nekretnice, u trenutku njena izlaza, odnosno zalaza. To proveravanje smo dopunili gornjom primedbom samo da bismo čitaocu objasnili neslaganje u prvobitno nadjenim vrednostima. U praksi se (i u udžbenicima), medjutim, smatraju diferencijalni obrasci za dH i dA s a m o s a p r v i m č l a n o v i m a kao dovoljno tačni izrazi za dejstvo refrakcije pri izlazu, odnosno zalazu, nebeskih tela. I mogu se smatrati, jer se dejstvo refrakcije pri izlazu i zalazu, dakle u horizontu, vrlo teško pouzdano odredjuje. Sama vrednost dejstva refrakcije u horizontu nepouzdana je za čitave 2'.

b) U trenucima najvećih digresija nekretnice, zenitska daljina, azimuti i časovni uglovi njeni dati su obrascima

$$\cos z = \sin\varphi \operatorname{cosec}\delta, \qquad \sin A = \cos\delta \sec\varphi, \qquad \cos H = tg\varphi\, ctg\delta.$$

Za numeričko izračunavanje tih veličina koristimo se, medjutim, obra-

scima

$$tg\,z = [\sin(\delta+\varphi)\ \sin(\delta-\varphi)]^{\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}\varphi,$$
$$tg\,A = \mp[\sin(\delta+\varphi)\ \sin(\delta-\varphi)]^{-\frac{1}{2}} \cos\delta,$$
$$tg\,H = \pm[\sin(\delta+\varphi)\ \sin(\delta-\varphi)]^{\frac{1}{2}} \sec\delta \operatorname{cosec}\varphi.$$

Prema podacima zadatka imaćemo:

$\delta = +45°$, $[\sin(\delta+\varphi)]$ 9.99 675, $[\operatorname{cosec}\varphi]$ 0.21 066,

$\varphi = +38$, $[\sin(\delta-\varphi)]$ 9.08 589, $\frac{1}{2}\Sigma$ = 9.54 132,

$\delta+\varphi = 83$, Σ = 9.08 264; $[\cos\delta]$ 9.84 949,

$\delta-\varphi = 7$; $[tg\,z]$ 9.75 198,

$[tg\,A]$ 0.30 817,

$[tg\,H]$ 9.90 249.

Tako za tražene vrednosti nalazimo:

$z = 29°\ 27'\ 46''$; $A = \mp 63°\ 48'\ 36''$; $H = \pm 38°\ 37'\ 16''$.

v) U gornjoj kulminaciji nekretnica dostiže pravu zenitsku daljinu, sa severne strane,

$$z = \delta - \varphi = 7°.$$

Drugi slučaj: $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$. Uzećemo $\delta = +60°$. Karakteristični položaji na prividnoj dnevnoj putanji ove nekretnice su: gornja i donja kulminacija i najveće digresije njene.

Zenitske daljine u trenucima kulminacija označićemo sa z_s i z_i; prema tome je $z_s = \delta - \varphi$, a $z_i = 180° - (\delta+\varphi)$. I tako ćemo sa podacima zadatka, a prema prethodnim obrascima, imati za karakteristične položaje:

$\delta = +60°$, $[\sin(\delta+\varphi)]$ 9.99 575, $[\operatorname{cosec}\varphi]$ 0.21 066,

$\varphi = +38$, $[\sin(\delta-\varphi)]$ 9.57 358, $\frac{1}{2}\Sigma$ = 9.78 467,

$\delta+\varphi = 98$, Σ = 9.56 933; $[\cos\delta]$ - 9.69 897,

$z_s = 22°$, $[tg\,z]$ 9.99 533,

$z_i = 82$; $[tg\,A]$ 9.90 430,

$[tg\,H]$ 0.29 636;

tako da nalazimo

$z = 44°\ 41'\ 31''$, $A = \pm 38°\ 44'\ 16''$, $H = \pm 63°\ 11'\ 15''$.

Najveće dejstvo refrakcije biće u trenutku kad se nekretnica bude našla na n a j v e ć o j svojoj zenitskoj daljini. Znači u trenutku donje kulminacije. Ako za uslove atmosfere uzmemo T = 0°C i P = 760 mm živina stuba i, s obzirom na veliku zenitsku daljinu (> 75°), uzmemo za refrakciju izraz

$$R = 60''.27 \, tg\, z - 0''.0669 \, tg^3 z,$$

dobivamo za njen iznos u donjoj kulminaciji $R = 404''.7 = 6'\, 54''.7$.

139 ~~144.~~ Opšti izraz za astronomsku refrakciju (pri normalnim uslovima u atmosferi) je

$$R = 60''.27 \, tg\, z - 0''.0669 \, tg^3 z.$$

Pri tim fizičkim uslovima atmosfere moći ćemo se zadovoljiti samo prvim članom ovog izraza ako je i dok je, prema zadatku,

$$0''.0669 \, tg^3 z \leqq 0''.1,$$

ili

$$tg^3 z \leqq \frac{1000}{669}.$$

Prema tome nalazimo

$$3[lg\, tg\, z] \leqq 0.17457; \quad \text{znači } [lg\, tg\, z] \leqq 0.05817, \quad \text{dakle } z \leqq 48°.8.$$

Za ove zenitske daljine vrednost drugog člana u tačnom izrazu za iznos refrakcije ne dostiže, to jest ostaje ispod 0".1.

140 ~~145.~~ Predstavimo na sl. 96: sa M — posmatrača na Zemlji (sferi) poluprečnika OM = a; iscrtanim prstenom, visine MN = h, — atmosferski sloj oko Zemlje; sa S — nebesko telo sa kojega zrak svetlosti stiže na gornju granicu atmosferskog sloja, dakle u B, pod uglom i, a u posmatračevo oko, dakle u M, pod uglom z, - imaćemo, prema zakonima o prelamanju svetlosti,

$$\sin i = \mu \sin r,$$

ako sa r označimo ugao odbijenog zraka sa normalom (OB). Sa slike vidimo, medjutim, da je $i = R + r$, tako da će ova jednačina biti

Sl. 96

$$\sin(R + r) = \sin R \cos r + \cos R \sin r = \mu \sin r,$$

ili

$$\sin R \cos r = (\mu - \cos R) \sin r.$$

Dignemo li na kvadrat obe strane ove jednačine, imaćemo

$$\sin^2 R (1 - \sin^2 r) = (\mu - \cos R)^2 \sin^2 r.$$

Izvršimo li naznačene operacije i uredimo li jednačinu, imaćemo

$$\sin^2 R = (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1) \sin^2 r,$$

ili

$$\sin^2 R = (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}} \sin r.$$

Iz trougla OMB imamo, medjutim,

$$(a+h) \sin r = a \sin z,$$

dakle

$$\sin r = \frac{a}{a+h} \sin z,$$

tako da dobivamo

$$\sin R = \frac{a}{a+h} \sin z \, (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}},$$

a odavde

$$R = \arcsin \left[\frac{a}{a+h} \sin z \, (\mu^2 - 2\mu \cos R + 1)^{\frac{1}{2}} \right].$$

141 ~~146~~. P r v i n a č i n. Uočimo dva susedna (sferna, koncentrična) sloja atmosfere, okarakterisana indeksima refrakcije n i n+dn. Ako označimo sa ζ i ζ- dR upadni i prelomni ugao pri prelazu zraka iz višeg u niži od ovih slojeva, prema zakonu o prelamanju svetlosti imaćemo

$$n \sin \zeta = (n + dn) \sin (\zeta - dR).$$

Desnu stranu ove jednačine možemo razviti i ako pri tom zanemarimo kvadrate i više stepene malih veličina dn i dR, biće

$$n \sin \zeta = n \sin \zeta + dn \sin \zeta - n \, dR \cos \zeta,$$

a odavde lako dolazimo do poznate diferencijalne jednačine refrakcije

$$dR = \frac{dn}{n} \operatorname{tg} \zeta. \qquad (1)$$

S druge strane, prema Simpson-ovoj hipotezi o promeni indeksa refrakcije sa visinom atmosferskog sloja,

$$r n^{m+1} = Const.$$

dobivamo, ako izraz logaritmujemo pa diferenciramo,

$$\frac{dr}{r}+\frac{dn}{n} = -m\frac{dn}{n}. \qquad (2)$$

A diferenciramo li izraz za refrakciju

$$rn\sin\zeta = r_0 n_0 \sin z_0, \qquad (3)$$

imaćemo

$$\frac{dr}{r}+\frac{dn}{n} = -d\zeta\, ctg\,\zeta.$$

Odavde, uzimajući u obzir (2), nalazimo

$$\frac{dn}{n}\, tg\,\zeta = \frac{d\zeta}{m},$$

odnosno, s obzirom na (1)

$$dR = \frac{1}{m}d\zeta.$$

Izraz za refrakciju ćemo (dobiti) integraleći ovaj izraz od Zemljine površine (n_0, z_0) do gornjeg sloja atmosfere (n = 1, z); tako dobivamo

$$R = \frac{1}{m}(z_0 - z).$$

Primetimo li da, za n = 1 ($\zeta = z$, $r = \bar{r}$), iz (3) imamo

$$\bar{r}\sin z = r_0 n_0 \sin z_0,$$

a da je, prema Simpson-ovoj hipotezi,

$$\bar{r} = r_0 n_0^{m+1},$$

iz ovih relacija dobivamo

$$\sin z = n_0^{-m}\sin z_0,$$

odnosno

$$z = \arcsin(n_0^{-m}\sin z_0).$$

I tako, na osnovi Simpson-ove hipoteze, dobivamo za iznos astronomske refrakcije, izraz

$$R = \frac{1}{m}\left[z_0 - \arcsin(n_0^{-m}\sin z_0)\right].$$

(Drugi način. Podjimo od diferencijalne jednačine astronomske refrakcije

$$dR = n_0 r_0 \sin z_0 \left(n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin z_0\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dn}{n}. \qquad (1)$$

Iz Simpson-ove hipoteze,

$$rn^{m+1} = Const.$$

to jest

$$rn^{m+1} = r_0 n_0^{m+1},$$

imamo

$$r = r_0 \left(\frac{n_0}{n}\right)^{m+1}.$$

Unesimo ovu vrednost za r u (1) i imaćemo

$$dR = n_0 r_0 \sin z_0 \left[n^2 r_0^2 \left(\frac{n_0}{n}\right)^{2(m+1)} - n_0^2 r_0^2 \sin^2 z_0\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dn}{n},$$

to jest

$$dR = \sin z_0 \left[\left(\frac{n_0}{n}\right)^{2m} - \sin^2 z_0\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dn}{n},$$

odnosno

$$dR = n^{m-1} \sin z_0 \left(n_0^{2m} - n^{2m} \sin^2 z_0\right)^{-\frac{1}{2}} dn.$$

Ako izvršimo zamenu nezavisne promenljive, stavljajući

$$n^m \sin z_0 = t n_0^m,$$

što će dati

$$m n^{m-1} \sin z_0 dn = n_0^m dt,$$

odnosno

$$n^{m-1} \sin z_0 dn = \frac{n_0}{m} dt.$$

Prema tome ćemo imati

$$dR = \frac{n_0^m}{m} \left(n_0^{2m} - n_0^{2m} t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

odnosno

$$dR = \frac{1}{m} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Za granice integrala imamo:

za $n = n_0$, za sloj na Zemljinoj površini, $t_0 = \sin z_0$;

za $n = 1$, na (gornjoj) granici atmosfere, $t_1 = n^{-m} \sin z_0$.

Prema tome nalazimo

$$R = \frac{1}{m}\left[\arcsin(\sin z_0) - \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0)\right],$$

to jest

$$R = \frac{1}{m}\left[z_0 - \arcsin(n_0^{-m} \sin z_0)\right].$$

142 ~~147.~~ Ako Simpson-ov obrazac

$$R = \frac{1}{m}\left[z - \arcsin n_0^{-m} \sin z\right],$$

napišemo u obliku

$$\arcsin(n_0^{-m} \sin z) = z - mR,$$

vidimo da je

$$\frac{\sin z}{\sin(z - mR)} = n_0^m.$$

A ovaj izraz možemo napisati

$$\frac{\sin z - \sin(z - mR)}{\sin z + \sin(z - mR)} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1},$$

ili, ako levu stranu napišemo u obliku proizvoda,

$$\frac{\cos\left(z - \frac{1}{2}mR\right)\sin\frac{1}{2}mR}{\sin\left(z - \frac{1}{2}mR\right)\cos\frac{1}{2}mR} = tg\,\tfrac{1}{2}mR\;ctg\left(z - \tfrac{1}{2}mR\right) = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}.$$

Odavde dobivamo

$$tg\,\tfrac{1}{2}mR = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\,tg(z - mR).$$

Kako je iznos refrakcije mala veličina, možemo uzeti

$$\tfrac{1}{2}mR\,arc1'' = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\,tg\left(z - \tfrac{1}{2}mR\right),$$

ili

$$R = \frac{2}{m\,arc1''}\,\frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\,tg\left(z - \tfrac{1}{2}mR\right).$$

a to je Bradley-ev izraz za iznos refrakcije.

143 ~~148.~~ Ako primetimo da je

$$\zeta = z + R$$

pa sa tom vrednošću za ζ udjemo u jednačinu

$$K\,tg\,\zeta = k\,tg\,z,$$

dobićemo

$$K\,tg(z + R) = k\,tg\,z,$$

to jest

$$\frac{K}{k} = \frac{tg\,z\,(1 - tg\,z\,tg\,R)}{tg\,z + tg\,R}.$$

Kako, medjutim, znamo da je R mala veličina, tako da možemo staviti

$$tg\,R = R\,arc1'',$$

biće

$$\frac{K}{k} = \frac{tg\,z\,(1 - k\,arc1''\,tg^2 z)}{tg\,z\,(1 + k\,arc1'')} = \frac{1 - k\,arc1''\,tg^2 z}{1 + k\,arc1''}.$$

Izraz na desnoj strani možemo razviti u red, i ako pri tom zanemarimo druge i više stepene veličine k imaćemo

$$\frac{K}{k} = 1 - k\,arc1''\,tg^2 z - k\,arc1'' = 1 - k\,arc1''(1 + tg^2 z),$$

tako da konačno dobivamo

$$K = k\,(1 - k\,arc1''\sec^2 z).$$

144 ~~149.~~ Dok zenitske daljine nisu prevelike, iznos astronomske refrakcije dostiže svega nekoliko minuta (ni u kom slučaju ne dostiže pola stepena). U tom slučaju će dovoljno približan izraz za refrakciju biti i

$$R = 58''.361 \, tg\, z .$$

Unesemo li ovu vrednost za refrakciju u argument na desnoj strani Bradley-eva izraza, imaćemo

$$R = 58''.361 \, tg(z - 238''.696 \, tg\, z).$$

Odavde dobivamo ako razvijemo desnu stranu

$$R = 58''.361 \, tg\, z \left[0.998\,842 \left(1 + 0.001\,158 \, tg^2 z\right)^{-1}\right]$$

$$= 58''.293 \, tg\, z \left(1 - 0.001158 \, tg^2 z\right),$$

ako zanemarimo stepene više od trećeg tgz-a.

Ova jednačina, medjutim, u obliku

$$R = 58''.293 \, tg\, z - 0.06\,750 \, tg^3 z,$$

praktično daje iste vrednosti za refrakciju kao i Cassini-ev izraz.

Pokazaćemo ovo na primeru, za dve nekretnice, na zenitskim daljinama $z_1 = 40^\circ$ i $z_2 = 50^\circ$.

Po Bradley-evu obrascu imaćemo, za približne vrednosti refrakcije

$$\bar{R}_1 = 58''.361 \, tg\, z_1 = 48''.97 ; \qquad \bar{R}_2 = 58''.361 \, tg\, z_2 = 69''.56 .$$

Prema tome nalazimo

$$\Delta z_1 = 4.09 \, \bar{R}_1 = 200''.29 = 3'\,20''.29 ; \qquad \Delta z_2 = 4.09 \, \bar{R}_2 = 284''.80 = 4'\,44''.80 .$$

I tako za iznose refrakcije po Bradley-evu izrazu dobivamo:

$$R_1 = 58''.361 \, tg(z_1 - \Delta z_1) = 48''.87 ; \qquad R_2 = 58''.361 \, tg(z_2 - \Delta z_2) = 69''.36 .$$

Po Cassini-evu, medjutim, nalazimo:

$$R_1 = 58''.294 \, tg\, z_1 - 0''.06\,682 \, tg^3 z_1 = 48''.91 - 0''.04 = 48''.87 ;$$

$$R_2 = 58''.294 \, tg\, z_2 - 0''.06\,682 \, tg^3 z_2 = 69.48 - 0.11 = 69.37 .$$

145 ~~150.~~ P r v i n a č i n. Označimo, na sl. 97 [redacted], sa: ζ_1 i ζ_2 — prave zenitske daljine, $Z_n\Sigma_1$ i $Z_n\Sigma_2$, dveju nekretnica, Σ_1 i Σ_2;

s — sfernu daljinu tih nekretnica, $\Sigma_1\Sigma_2$;

Sl. [redacted] 97

η — ugao, $Z_n\Sigma_1\Sigma_2$, druge (istočnije) u odnosu prema prvoj nekretnici;

ΔA — razliku u azimutima, $\Sigma_2 Z_n \Sigma_1$, ovih tela.

Iz sfernog trougla $\Sigma_1 Z_n \Sigma_2$ imamo onda

$$\cos s = \cos\zeta_1 \cos\zeta_2 + \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \cos\Delta A .$$

Usled dejstva refrakcije, zenitske daljine ovih zvezda će se smanjiti; prema tome i sferna daljina njihova, pošto im razlika u azimutu pritom ostaje nepromenjena. Zato, ako gornji izraz diferenciramo,

$$-\sin s\, ds = (-\sin\zeta_1 \cos\zeta_2 + \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 \cos\Delta A)\, d\zeta_1 + (-\cos\zeta_1 \sin\zeta_2 + \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 \cos\Delta A)\, d\zeta_2,$$

i primetimo da je

$$d\zeta_1 = -k\, tg\,\zeta_1 \quad i \quad d\zeta_2 = -k\, tg\,\zeta_2,$$

imaćemo, pošto smenimo

$$-\sin s\, ds = k\, tg\,\zeta_1 \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 - k\, tg\,\zeta_1 \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 \cos\Delta A + k \cos\zeta_1\, tg\,\zeta_2 \sin\zeta_2 - k \sin\zeta_1\, tg\,\zeta_2 \cos\zeta_2 \cos\Delta A .$$

Ako još na desnoj strani stavimo

$$\cos\Delta A = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A,$$

imaćemo

$$-\sin s\, ds = k \sin\zeta_1\, tg\,\zeta_1 \cos\zeta_2 - k\, tg\,\zeta_1 \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 + 2k\, tg\,\zeta_1 \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A + k \cos\zeta_1 \sin\zeta_2\, tg\,\zeta_2 - k \sin\zeta_1\, tg\,\zeta_2 \cos\zeta_2 + 2k \sin\zeta_1\, tg\,\zeta_2 \cos\zeta_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A,$$

ili

$$-\sin s\, ds = k \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 (tg\,\zeta_1 - tg\,\zeta_2) - k \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 (tg\,\zeta_1 - tg\,\zeta_2) + 4k \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A,$$

ili

$$-\sin s\, ds = k (tg\,\zeta_1 - tg\,\zeta_2) + 4k \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A,$$

ili još

$$-\sin s\, ds = k \sin^2(\zeta_1 - \zeta_2) \sec\zeta_1 \sec\zeta_2 + 4k \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A .$$

Izdvojmo sa gornje slike mali pravougli trougao na sferi, $\Sigma_1 Q \Sigma_2$ (v. sl. 98 ~~21bis~~). Ako primetimo da je, u ovom slučaju, $\Sigma_1\Sigma_2 = s$, dakle i ΔA, mali ugao, drugim rečima, da možemo staviti

$$\sin s = s; \qquad 4\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A = \Delta A^2; \qquad \Sigma_1 Q = \zeta_1 - \zeta_2 = s\cos\eta,$$

Sl. ~~21bis~~ 98

moći ćemo poslednju jednačinu napisati

$$-\sin s\, ds = k s^2 \cos^2\eta \sec\zeta_1 \sec\zeta_2 + k\,\Delta A^2 \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 .$$

Iz istih razloga možemo uzeti $\zeta_1 = \zeta_2 = z$, tako da ćemo imati

$$-s\,\delta s = ks^2\cos^2\eta\,\sec^2 z + k\Delta A^2\sin^2 z.$$

U malom pravouglom trouglu na sferi $Z_1 Q Z_2$ imamo, medjutim, u tom slučaju

$$\Delta A \sin\zeta_2 = \Delta A \sin z = s\sin\eta,$$

dakle,

$$\Delta A^2 = s^2\sin^2\eta\,\mathrm{cosec}^2 z.$$

Prema tome ćemo za gornju jednačinu dobiti

$$-s\,\delta s = ks^2\cos^2\eta\,\sec^2 z + ks^2\sin^2\eta,$$

to jest

$$-\delta s = ks(\cos^2\eta\,\sec^2 z + \sin^2\eta),$$

odnosno, primećujući da je

$$\sec^2 z = 1 + tg^2 z,$$

$$\delta s = -ks(1 + \cos^2\eta\, tg^2 z),$$

a u sekundama ugla,

$$\delta s = -ks(1 + \cos^2\eta\, tg^2 z)\,\mathrm{arc}\,1''.$$

Ovoliko, dakle, iznosi promena (u stvari smanjenje) uglovnoj daljini dveju bliskih nekretnica, usled dejstva refrakcije. Drugim rečima, za ovoliko treba m e r e n u uglovnu daljinu dveju bliskih nekretnica povećati, da bi se dobila njihova s t v a r n a (od dejstva refrakcije oslobodjena) uglovna daljina.

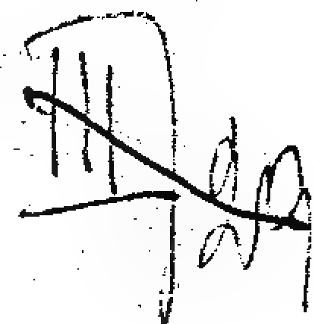
D r u g i n a č i n. Do gornjeg izraza možemo doći i primenjujući prvi od obrazaca ( ) (str.), za promene u relativnim koordinatama bliskih tačaka na nebeskoj sferi. Promene, u ovom slučaju, izaziva refrakcija. Za sferni koordinatni sistem uzećemo - horizontski. Znači biće: $L = A$, $B_0 = h = \frac{\pi}{2} - z$. I ako primetimo da refrakcija dejstvuje samo na visinu (odnosno zenitsku daljinu, a ne i na azimut), znači da je, u ovom slučaju,

$$\delta L = dA = 0, \qquad \delta B = \delta h = R = k\,ctg\,h.$$

Onda je, prema jednačinama (2),

$$\delta(\Delta A) = 0, \qquad \delta(\Delta h) = \frac{\delta R}{\delta h}\cdot\Delta h.$$

Prema tome, za promenu sferne daljine tačaka usled dejstva refrakcije



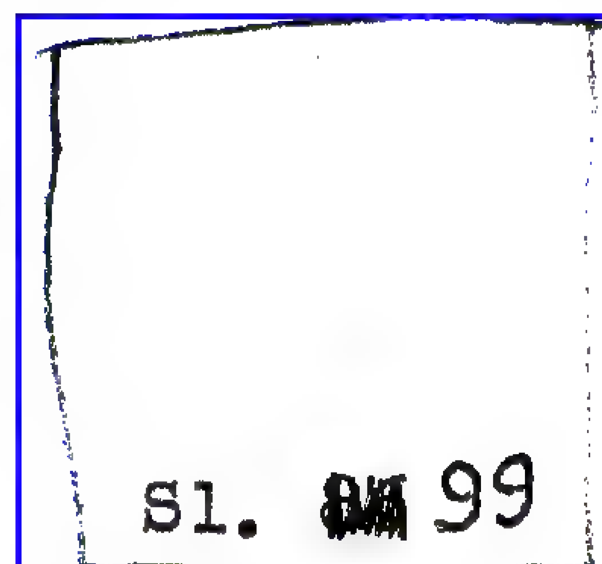
dobivamo iz prvog od obrazaca ( )

$$\partial s = -s \sin^2 q \, tg h \, \partial h - sk \cos^2 q \, cosec^2 h,$$

ili, ako smenimo i uvedemo, mesto visine, zenitsku daljinu, dobivamo

$$\partial s = -sk(\sin^2 q + \cos^2 q \sec^2 h) = -sk(1 + \cos^2 q \, tg^2 z).$$

146 ~~151.~~ Ovo je, u stvari, drugi deo prethodnog zadatka. I ovde možemo na dva načina doći do rezultata.



Sl. 99

Prvi način. Neka sl. 99 predstavlja položaj uočenih bliskih zvezda, Σ_0 i Σ. Označimo elemente sfernog trougla $Z_u \Sigma_0 \Sigma$:

$$\Sigma_0 \Sigma = s; \quad Z_u \Sigma_0 = z; \quad Z_u \Sigma = z_1; \quad \angle Z_u Z_0 = A; \quad Z_u \Sigma_0 \Sigma = \eta.$$

U tom trouglu imamo

$$\sin s \sin \eta = \sin z_1 \sin A.$$

Ako pretpostavimo da su zvezde toliko bliske da smemo zanemariti treći stepen veličine s, dakle i z, zameniti stranom z, mesto poslednje jednačine imaćemo

$$s \sin \eta = \sin z \sin A.$$

Ako logaritmujemo, pa zatim diferenciramo, imaćemo

$$\frac{ds}{s} + d\eta \, ctg \eta = \partial z \, ctg z.$$

Unesemo li, na levoj strani, vrednost prvog člana iz rešenja prethodnog zadatka, a, na desnoj strani, vrednost

$$\partial z = -k \, tg z,$$

dobivamo za promenu u uglu

$$\partial \eta \, ctg \eta = k(1 + \cos^2 \eta \, tg^2 z) - k = k \cos^2 \eta \, tg^2 z,$$

to jest
$$\partial \eta = k \sin \eta \cos \eta \, tg^2 z,$$
što možemo napisati i

$$\partial \eta = \tfrac{1}{2} k \sin 2\eta \, tg^2 z.$$

Drugi način. Primenjujući, kao i gore, ali sad drugi od obrazaca ( ) (str.), uz ostale iste napomene kao i u prethodnom rešenju, nalazimo

$$\partial \eta = \sin \eta \cos \eta (-tg h \, \partial h + k \, cosec^2 h),$$

ili $\theta\eta = \sin\eta\cos\eta(k + k\sec^2 z) = k\sin\eta\cos\eta\, tg^2 z = \frac{1}{2}k\sin 2\eta\, tg^2 z.$

(147) (152) P r v i   n a č i n. Ovo sleduje neposredno iz rešenja Zad. 150, kojim je pokazano da se, usled dejstva refrakcije, uglovna daljina (s) dveju bliskih tačaka na nebeskoj sferi smanjuje za

$$\theta s = ks(1 + \cos^2\eta\, tg^2 z),$$

gde je k konstanta refrakcije, η između daljine $(Z_1 Z_2)$ ugao druge tačke (vertikala) kroz prvu (Z_1), a z zenitska daljina ove. Pri tom se pretpostavlja da se iznos refrakcije na tim zenitskim daljinama može predstaviti izrazom R = ktgz.

Iz gornjeg izraza se odmah vidi da smanjenje horizontalnog luka, što će reći kad je $\eta = 90^\circ$, iznosi

$$\theta s = ks.$$

Ono, prema tome, ne zavisi od zenitske daljine na kojoj se nalazi luk, već samo od konstante refrakcije. Odavde vidimo da horizontalni mali luk, s, usled dejstva refrakcije postaje

$$s - ks = s(1 - k), \quad \text{dakle } (1 - k)\text{-puta kraći.}$$

Kod vertikalnog malog luka, s, što će reći kad je $\eta = 0^\circ$, smanjenje će iznositi

$$\theta s = ks(1 + tg^2 z) = ks\sec^2 z;$$

drugim rečima, on postaje, usled dejstva refrakcije,

$$s - ks\sec^2 z = s(1 - k\sec^2 z),$$

dakle: $(1 - k\sec^2 z)$ - puta kraći. Pri tom treba imati na umu da ovo vredi dok se dejstvo refrakcija može predstaviti izrazom R = ktgz.

D r u g i   n a č i n. Neka je s dužina luka almukantara izmedju dveju tačaka, čije su zenitske daljine z. Tada je

$$s = a \sin z,$$

gde smo sa a označili razliku azimuta krajnjih tačaka luka s. Refrakcija će delovati samo na zenitsku daljinu, te će se s promeniti za

$$ds = a \cos z\, dz.$$

Unošenjem ovamo približnog izraza za dejstvo refrakcije

$$\delta z = k\,\mathrm{tg}\,z$$

dobićemo

$$\delta s = a\,k\,\cos z\,\mathrm{tg}\,z = a\,k\,\sin z = k\,s.$$

Prema tome će dužina luka almukantara, usled dejstva refrakcije, postati

$$s' = s - \delta s = s\,(1 - k).$$

Neka sad s bude dužina malog luka vertikala, čije krajnje tačke imaju zenitske daljine z_1 i z_2:

$$s = z_2 - z_1, \qquad z_1 \approx z_2.$$

Usled refrakcije ona će se promeniti za

$$\delta s = \delta z_2 - \delta z_1 = k\,(\mathrm{tg}\,z_2 - \mathrm{tg}\,z_1).$$

Iz polaznih jednačina imaćemo

$$\mathrm{tg}\,s = \mathrm{tg}(z_2 - z_1) = \frac{\mathrm{tg}\,z_2 - \mathrm{tg}\,z_1}{1 + \mathrm{tg}\,z_1\,\mathrm{tg}\,z_2};$$

a, s druge strane,

$$\mathrm{tg}\,s \approx s, \qquad 1 + \mathrm{tg}\,z_2\,\mathrm{tg}\,z_1 \approx 1 + \mathrm{tg}^2 z = \sec^2 z,$$

gde je z bilo koja od zenitskih daljina z_1 i z_2, ili neka srednja. Stoga je

$$\mathrm{tg}\,z_2 - \mathrm{tg}\,z_1 = s\,\sec^2 z,$$

to jest

$$\delta s = k\,s\,\sec^2 z, \qquad \text{što daje} \qquad s' = s - \delta s = s\,(1 - k\,\sec^2 z).$$

[J. Simovljević]

148 ~~153.~~ Poći ćemo od poznatog obrasca

$$\cos z = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos H,$$

gde je z - zenitska daljina, δ - deklinacija, H - časovni ugao Sunčeva središta, a φ posmatračeva geografska širina.

U trenutku izlaza (ili zalaza) središta Sunčeva prividnog diska njegova zenitska daljina je, ako se uzme u obzir dejstvo refrakcije, $z = 90^\circ 35'$. Prema tome ćemo, iz gornjeg obrasca, imati za časovni ugao

$$\cos H = -(\sin 35' + \sin\varphi\,\sin\delta)\,\sec\varphi\,\sec\delta.$$

Sa ovim obrascem ćemo sad obrazovati

$$1 - \cos H = [\cos(\varphi - \delta) + \sin 35']\,\sec\varphi\,\sec\delta,$$

$$1 + \cos H = [\cos(\varphi + \delta) - \sin 35']\,\sec\varphi\,\sec\delta.$$

Ove izraze možemo, medjutim, napisati

$$\sin^2\tfrac{1}{2}H = \sin\left[45^\circ-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta-35')\right]\cos\left[45^\circ-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta+35')\right]\sec\varphi\sec\delta,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}H = \sin\left[45^\circ-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta+35')\right]\cos\left[45^\circ-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta-35')\right]\sec\varphi\sec\delta;$$

ili

$$\sin^2\tfrac{1}{2}H = \sin\left[45^\circ+17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)\right]\cos\left[45^\circ-17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)\right]\sec\varphi\sec\delta,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}H = \sin\left[45^\circ-17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)\right]\cos\left[45^\circ+17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)\right]\sec\varphi\sec\delta.$$

Da bismo traženi izraz za časovni ugao dobili u što jednostavnijem obliku, označićemo

$$45^\circ+17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta) = S-\theta, \qquad 45^\circ-17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta) = D-\theta,$$

$$45^\circ+17'.5-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta) = S-\sigma, \qquad 45^\circ-17.5-\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta) = D+\sigma.$$

Tako za časovni ugao izlaza (ili zalaza) s r e d i š t a Sunčeva prividnog kružnog diska dobivamo, u obliku pogodnom za logaritamski račun,

$$tg^2\tfrac{1}{2}H = \sin(S-\theta)\cos(D-\theta)\sec(S-\sigma)\operatorname{cosec}(D-\sigma).$$

Ako se traži časovni ugao izlaza (ili zalaza) g o r n j e g r u b a Sunčeva prividnog diska, onda treba samo uzeti u obzir da je, u tom trenutku, zenitska daljina središta Sunčeva prividnog kružnog diska za prividni poluprečnik ovoga diska v e ć a no u gornjem slučaju. Prividni poluprečnik Sunčeva diska iznosi, skoro tačno, 16' = 960". Prema tome, Sunčev gornji rub izlazi (odnosno zalazi) za posmatrača u trenutku kad središte Sunčeva prividnog diska stigne na zenitsku daljinu:

$$z = 90^\circ+R+R_\odot = 90^\circ+35'+16' = 90^\circ 51'.$$

Sa ovom vrednošću zenitske daljine, ako uvedemo oznake

$$45^\circ+25'.5 = \bar{S} \quad i \quad 45^\circ-25'.5 = \bar{D},$$

dobivamo, neposredno, za časovni ugao izlaza (ili zalaza) g o r n j e g r u b a Sunčeva prividnog diska, u obliku pogodnom za logaritamski račun,

$$tg^2\tfrac{1}{2}\bar{H} = \sin(\bar{S}-\theta)\cos(\bar{D}-\theta)\sec(\bar{S}-\sigma)\operatorname{cosec}(\bar{D}-\sigma).$$

(149) ~~154.~~ Poći ćemo od obrasca

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H.$$

Ako ga diferenciramo, vodeći računa da su φ i δ konstante, imaćemo

$$\sin z \, dz = \cos\varphi \cos\delta \sin H \, dH.$$

Kombinujući ovaj izraz sa sinusnim obrascem,

$$\cos\delta \sin H = \sin z \sin A,$$

dobivamo

$$dz = \cos\varphi \sin A \, dH.$$

S druge strane imamo

$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos A.$$

U trenutku izlaza, to jest za $z = 90^\circ$, ovaj daje

$$\sin\delta = -\cos\varphi \cos A,$$

ili

$$\cos A = -\sin\delta \sec\varphi.$$

Odavde, opet, nalazimo

$$\sin A = \sec\varphi (\cos^2\varphi - \sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}.$$

Ako primetimo da je dz, u ovom slučaju, jednako R, a $dH = \tau$, imaćemo za traženu promenu u vremenu izlaza, u vremenim sekundama,

$$\tau = \frac{R}{15} (\cos^2\varphi - \sin^2\delta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{R}{15} (\cos^2\delta - \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

(150) ~~155.~~ Neka predstavlja, na sl. 100, iscrtani kružni sektor, sa središtem u S, deo prividnog Sunčeva kružnog diska, poluprečnika $r_\odot$;

M — neku tačku na rubu diska;

Z_n — posmatračev zenit i

z — zenitsku daljinu središta S.

Sl. 100

Usled dejstva refrakcije, posmatrač će tačku M videti u položaju M'. Ako sad spustimo iz M i M' lukove velikih krugova, MQ i M'Q', normalno na vertikal Z_nS, pa označimo ugao Z_nSM sa η, imaćemo, prema rešenju Zad. 147,

$$Q'M' = (1-k)\, QM = (1-k)\, r_\odot \sin\eta.$$

A ako primetimo da je

$$Z_n Q = Z_n S - QS = z - r_\odot \cos\eta,$$

biće

$$SQ' = r_\odot \cos\eta + k\,tg(z - r_\odot \cos\eta).$$

Uzmemo li u obzir da je $r_\odot \cos\eta$ mala veličina, moći ćemo desnu stranu napisati

$$SQ' = r_\odot \cos\eta + k(tg z - r_\odot \cos\eta)(1 + r_\odot \cos\eta\, tg z)^{-1},$$

ili, ako razvijemo i zanemarimo male veličine drugog i viših redova,

$$SQ' = r_\odot \cos\eta + k(tg z - r_\odot \cos\eta)(1 - r_\odot \cos\eta\, tg z) =$$
$$= r_\odot \cos\eta + k[tg z - r_\odot \cos\eta\,(1 + tg^2 z)] =$$
$$= r_\odot \cos\eta + k(tg z - r_\odot \cos\eta \sec^2 z).$$

Kako se ovde radi o malim veličinama, prenećemo sliku u tangentnu ravan na nebeskoj sferi, u tački S (sl. 101). Ovu tačku ćemo uzeti za početak koordinatnog sistema (pravouglog, pravolinijskog). Za x - osu ćemo uzeti tangentu na vertikalu, usmerenu ka zenitu; za y - osu uzećemo tangentu na almukantaru, usmerenu ka istoku.

Za koordinate tačke M' imaćemo u ovom sistemu

$$x = SQ' = r_\odot \cos\eta + k(tg z - r_\odot \cos\eta \sec^2 z),$$
$$y = Q'M' = r_\odot (1 - k) \sin\eta.$$

Eliminisaćemo iz ovih izraza ugao η. Ako ih napišemo

$$\frac{x - k\,tg z}{r_\odot (1 - k \sec^2 z)} = \cos\eta,$$

$$\frac{y}{r_\odot (1 - k)} = \sin\eta,$$

pa dignemo na kvadrat, dobićemo za jednačinu deformisana Sunčeva diska, usled dejstva refrakcije,

$$\left[\frac{x - k\,tg z}{r_\odot (1 - k \sec^2 z)}\right]^2 + \left[\frac{y}{r_\odot (1 - k)}\right]^2 = 1.$$

Vidimo, dakle, da je to e l i p s a sa

velikom (horizontalnom) poluosom: $r_\odot (1 - k)$,

koja je, prema tome, ista za sve zenitske daljine i zavisi samo od vrednosti konstante refrakcije; i

malom (vertikalnom) poluosom: $r_{\odot}(1-k\sec^2 z)$,

koja zavisi ne samo od konstante refrakcije već i od zenitske daljine Sunčeve.

Ako primetimo da su koordinate središta ove elipse

$$x_0 = k\,tg\,z \quad i \quad y_0 = 0,$$

pa u nj prenesemo koordinatni početak, dobićemo za jednačinu elipse

$$\left[\frac{\xi}{r_{\odot}(1-k\sec^2 z)}\right]^2 + \left[\frac{\eta}{r_{\odot}(1-k)}\right]^2 = 1.$$

Dalje način

Ako za konstantu refrakcije uzmemo

$$k = 60''.27 = 0.000292$$

nalazimo za vrednosti male poluose (a) Sunčeva deformisanog diska na zenitskim daljinama 0° - 80°:

petit

z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
h	959''.7	959''.7	959''.7	959''.6	959''.5	959''.3	958''.8	957''.6	950''.7

~~Na sl. 90 predstavljene su grafički vrednosti svih poluosa na raznim zenitskim daljinama Sunčeva središta.~~ ~~sl. 90~~

[redacted]

V/ Elementi teorije kretanja planeta i kometa

151 ~~156.~~ Polarne koordinate (r, v) planetoida u funkciji datih veličina su

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad i \qquad tg\tfrac{1}{2}v = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} tg\tfrac{1}{2}E .$$

Za E = 80°, cos E = 0.17 365; ecos E = 0.01737; i tako nalazimo

$$r = 0.98\,263 \times 3.0\,a.j. = 2.94\,789\,a.j.$$

Za e = 0.1,

$$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1.1}{0.9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.10\,555; \qquad tg\tfrac{1}{2}v = 1.10\,555 \times 0.83\,910 = 0.92\,767;$$

tako da nalazimo $\frac{1}{2}v = 42^\circ\ 51'\ 4''.4;$

dakle, za pravu anomaliju, $v = 85\ 42\ 9''.$

Poslednji rezultat proverićemo pomoću obrasca

$$r = a(1 - e^2)(1 + e\cos v)^{-1}.$$

Ako unesemo nadjene vrednosti, nalazimo

$$r = 2.97 : 1.00\,750 = 2.94\,789\,a.j.$$

(nastavak na strani 86!)

152 (~~157.~~) Ako označimo sa <u>a</u> veliku poluosu, a sa <u>e</u> ekscentričnost planetine putanje; zatim sa r_p perihelsku, a sa r_a afelsku planetinu daljinu, onda je

$$r_p = a(1-e), \qquad r_a = a(1+e).$$

Prema zadatku je druga četiri puta veća od prve, znači

$$4a(1-e) = a(1+e).$$

Iz ove jednačine dobivamo

$$e = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Kako je e = sinφ, za ugao ekscentričnosti planete nalazimo $\varphi = 36^\circ 52' 12''$.

153 (~~158.~~) Sa datim vrednostima kometine prave anomalije (v) i ekscentričnosti (<u>e</u>) izračunaćemo, prvo, vrednost ekscentrične anomalije (E), pomoću obrasca

$$tg\,\tfrac{1}{2}E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} tg\,\tfrac{1}{2}v,$$

a zatim ćemo, pomoću Keplerove jednačine, izračunati M = nt, pa odavde t, pošto je n poznato.

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{0.2}{1.8} = \frac{0.1}{0.9};$$

$$\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{3};$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}E = \pm\tfrac{1}{3} \times 0.57735,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}E = \pm 0.19245,$$

$$\tfrac{1}{2}E = \pm 10^\circ 53' 36'',$$

$$E = \pm 21^\circ 47' 12'';$$

$$\sin E = \pm 0.37115,$$

$$\rho^\circ = 57^\circ.295780,$$

$$e^\circ = 45^\circ.836624,$$

$$(e\sin E)^\circ = \pm 17.012263,$$

$$(e\sin E)^\circ = \pm 17^\circ 0' 44'',$$

$$M = \pm 4\ 46\ 28,$$

$$M = \pm 17188'',$$

$$t = \tfrac{1}{n}M = \pm 57^d\ 7^h.$$

U položaj odredjen pravom anomalijom v = 60° kometa bi, prema tome, dospela 57 dana 7 časova po prolazu kroz perihel.

Za proveravanje izračunatih veličina dovoljno će biti da se utvrdi tačnost vrednosti M i t.

Proveravanje veličine M izvršilo bi se najbrže i najpouzdanije pomoću tablica[1] za izračunavanje pravih pomoću srednjih anomalija i

---

[1] M. F. B o q u e t — Tables du mouvement képlérien. Hendaye (B.P.);1920
F. T i e t j e n — Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie. Ver-

ekscentričnosti. To su, istina, dvoulazne tablice, ali je, i pored toga, račun pomoću istih brz i pouzdan. Medjutim, u ovom slučaju, taj način nije primenljiv zbog prevelike ekscentričnosti putanje. Pomenute tablice idu svega do $e = 0.5$.

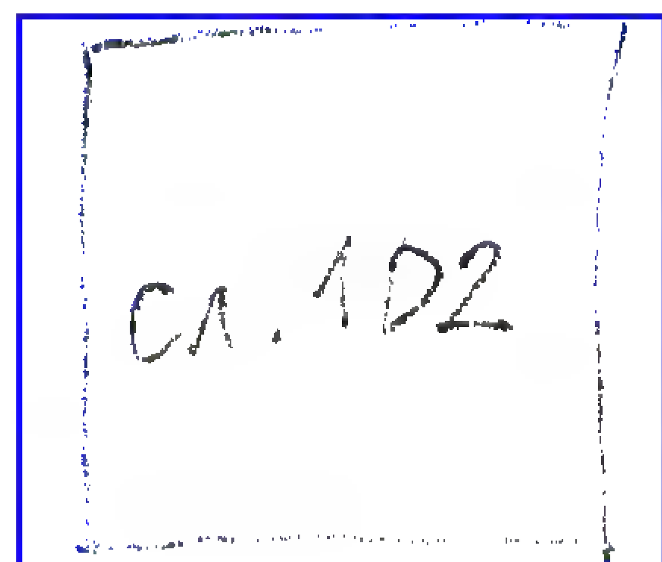
Iz istog razloga ne može se proveravanje, u ovom slučaju, preduzeti ni pomoću beskonačnog reda $(v - M)$ (v. str.), jer za ekscentričnost date putanje taj red može biti i divergentan.

Ostaje, prema tome, kao jedini mogućan način za proveravanje tačnosti izračunatih vrednosti, da se račun p o n o v o izvrši — što je i učinjeno.

154 (159) Neka, u trenutku t, tačka zauzima položaj A (v. sl. 102), čije ćemo polarne koordinate obeležiti sa (r, v). Neka u narednom trenutku, dakle u vremenom razmaku dt, tačka dospe u položaj A'. Element prevaljenog puta, AA', označićemo sa ds, a promene u polarnim koordinatama položaja tačke sa dr i dv. Obrazujmo iz tih elemenata mali trougao ABA'. Ako je dt dovoljno malo, $\overline{AA'} = ds$, $\overline{AB} = dr$, $BA' = r dv$. Obrazujemo li odnose ovih elemenata prema vremenu dt, imaćemo — za brzinu tačke: $V = \dot{s}$; za njenu radijalnu komponentu: $V_r = \dot{r}$; za njenu transverzalnu (normalnu na pravcu radijavektora) komponentu: $V_v = r\dot{v}$.

Ako pravougle koordinate položaja A označimo sa (x, y), imaćemo

$$x = r\cos v \quad i \quad y = r\sin v,$$



a za komponente brzine:

$$\dot{x} = V_x = -r\dot{v}\sin v + \dot{r}\cos v,$$
$$\dot{y} = V_y = r\dot{v}\cos v + \dot{r}\sin v.$$

Napominjemo da je, prvo, rezultanta komponenata V_r i V_v jednaka rezultanti komponenata V_x i V_y; i, drugo, da je zbir projekcija, na bilo koji pravac, komponenata V_r i V_v, jednak zbiru projekcija, na isti pravac, komponenata V_x i V_y. Projicirajući komponente V_r i V_v na ose OX

Veröffentl. des Rechen - Inst. der Königl. Sternwarte zu Berlin; 1892.

i OY imaćemo

$$\dot{x} = V_x = V_r \cos v - V_v \sin v,$$
$$\dot{y} = V_y = V_r \sin v + V_v \cos v.$$

Iz ova dva sistema dolazimo do već nadjenih vrednosti komponenata brzine u polarnom koordinatnom sistemu:

$$V_r = \dot{r} \quad i \quad V_v = r\dot{v}.$$

Do izraza za komponente ubrzanja tačke u položaju A, koje ćemo označiti sa $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$, a predstaviti vektorima AJ i AK, doći ćemo ako ove projiciramo na pravac radijavektora i pravac upravni na njemu, dakle

$$\gamma_r = \ddot{x} \cos v + \ddot{y} \sin v,$$
$$\gamma_v = -\ddot{x} \sin v + \ddot{y} \cos v.$$

Za vrednosti drugih izvoda po vremenu pravouglih koordinata imamo, medjutim,

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos v - 2\dot{r}\dot{v} \sin v - r\dot{v}^2 \cos v - r\ddot{v} \sin v,$$
$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin v + 2\dot{r}\dot{v} \cos v - r\dot{v}^2 \sin v + r\ddot{v} \cos v.$$

Unesemo li ove vrednosti u poslednje izraze imaćemo, pošto skratimo i uredimo, za komponente ubrzanja u polarnim koordinatama

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{v}^2 \quad i \quad \gamma_v = r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{v}).$$

155 ~~160.~~ U prethodnom rešenju izvedeni su izrazi za radijalnu i transverzalnu komponentu planetine putanjeske brzine:

$$V_r = \dot{r} \quad i \quad V_v = r\dot{v}.$$

Za samu putanjsku brzinu planete imaćemo, prema tome,

$$V^2 = V_r^2 + V_v^2.$$

Radijalnu komponentu možemo izraziti pomoću karakteristika putanje. Ako podjemo od polarne jednačine putanje,

$$r = p(1 + e\cos v)^{-1},$$

dobivamo, posle diferenciranja i očiglednih transformacija,

$$\dot{r} = \frac{e}{p} r^2 \dot{v} \sin v = C\frac{e}{p} \sin v,$$

gde C označava dvostruku površinsku brzinu planete. Za transverzalnu komponentu dobivamo, isto tako,

$$V_v = r\dot{v} = \frac{1}{r}\cdot r^2\dot{v} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1+e\cos v).$$

Prema tome dobivamo za kvadrat planetine putanjske brzine

$$V^2 = V_r^2 + V_v^2 = \frac{C^2}{p^2}\left[e^2\sin^2 v + (1+e\cos v)^2\right] = \frac{C^2}{p^2}(1+2e\cos v + e^2)$$
$$= \frac{C^2}{p^2}\left[\frac{2}{p}(1+e\cos v) - \frac{1-e^2}{p}\right] = \frac{C^2}{p^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

i konačno

$$V^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

156 ~~161.~~ Do traženih izraza za radijalnu i transverzalnu komponentu brzine doći ćemo jednostavno primenjujući izvedene obrasce u rešenju zadatka 159, ali stavljajući, mesto prave anomalije, v, veličinu proporcionalnu vremenu, recimo ωt, ako sa ω označimo konstantnu uglje, komponen-

Na sličan način ćemo doći i do izraza za radijalnu i transverzalnu komponentu ubrzanja. U pomenutom rešenju su nađeni izrazi

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{v}^2 \quad i \quad \gamma_v = r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v}.$$

~~kako je~~

$$\ddot{r} = 2\frac{e}{p}r\dot{r}\dot{v}\sin v + \frac{e}{p}r^2\ddot{v}\sin v + \frac{e}{p}r^2\dot{v}^2\cos v,$$

to je

$$\gamma_r = 2\left(\frac{e}{p}\right)^2 r^3\omega^2\sin\omega t + \frac{e}{p}r^2\omega^2\cos\omega t - r\omega^2, \qquad \gamma_v = 2\frac{e}{p}r^2\omega^2\sin\omega t.$$

157 ~~162.~~ Ako polarne koordinate planete u položaju A (v. sl.) označimo sa (r, v) i ugao izmedju vektora brzine planete V = AA' i njene transverzalne komponente AB' označimo sa ψ, imaćemo

$$V = V_v\sec\psi = r\dot{v}\sec\psi = \frac{r^2\dot{v}}{r}\sec\psi = \frac{C}{r}\sec\psi.$$

Prema ovom obrascu nalazimo za brzinu (V_p) planete u perihelu, to jest u položaju gde je

$$r = a(1-e) \quad i \quad \psi = 0,$$
$$V_p = \frac{C}{a(1-e)}.$$

Za brzinu (V_a) u afelu, gde je r = a(1 + e), ψ = o nalazimo

$$V_a = \frac{C}{a(1+e)}.$$

Za brzinu (V_b) planete na kraju male ose, gde je r = a i $\psi = -\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$, $\cos\psi = \sin v = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$, dobivamo

$$V_b = \frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{c}{b}.$$

Za brzinu (V_{π}) planete na kraju parametra, gde je

$$r = p = a(1-e^2), \qquad v = 90^\circ \text{ ili } 270^\circ,$$

dobivamo, ako ove vrednosti unesemo u

$$V_{\pi}^2 = \frac{C^2e^2}{p^2} + \frac{C^2}{p^2} = \frac{C^2}{p^2}(1+e^2) = \frac{C^2}{p}\,\frac{1+e^2}{a(1-e^2)} = \frac{k^2(1+m)}{a}\,\frac{1+e^2}{1-e^2}.$$

158 ~~163.~~ Primenićemo za rešavanje date Keplerove jednačine metodu sukcesivnih aproksimacija. Za prvu, ili polaznu, približnu vrednost rešenja uzećemo prva dva člana razvijene ekscentrične anomalije, dakle

$$E_1 = M + e\sin M.$$

[e] 9.16 732,
[ρ″] 5.31 443,
[e″] 4.48 175,
[sin M] 9.83 840,
[e″sin M] 4.32 015,
(e sin M)″ = 20 900″.0,
(e sin M) = 5° 48′ 20″.0,
M = 136 25 32.4,
E_1 = 142 13 52.4;
[sin E_1] 9.78 709,
[e″sin E_1] 4.26 884,
(e sin E_1)″ = 18 571″.2,
e sin E_1 = 5° 9′ 31″.2,
M_1 = 137 4 21.2,
M = 136 25 32.4,
M − M_1 = − 0° 38′ 48″.8;
[cos E_1] 9.89 790 n,
[e cos E_1] 9.06 522 n,
(1 − e cos E_1) = 1.11 620,
ΔE_1 = − 2086″.4,
ΔE_1 = − 0° 34′ 46″.4;

M_4 = 136° 25′ 32″.4,
M = 136 25 32.4.

E_1 = 142° 13′ 52″.4,
ΔE_1 = − 0 34 46.4,
E_2 = 141 39 6.0;
[sin E_2] 9.79 270,
[e″] 4.48 175,
[e sin E_2] 4.27 445,
(e sin E_2)″ = 18 812″.6,
e sin E_2 = 5° 13′ 32″.6,
M_2 = 136 25 33.4,
M − M_2 = − 0° 0′ 1″.0;
[cos E_2] 9.89 446 n,
[e] 9.16 732,
[e cos E_2] 9.06 178 n,
(e cos E_2) = − 0.11 529,
(1 − e cos E_2) = 1.11 529,
ΔE_2 = − 0° 0′ 0″.9;
E_3 = 141° 39′ 5″.1;
[sin E_3] 9.79 271,
[e sin E_3] 4.27 446,
(e sin E_3) = 18 813″.0
e sin E_3 = 5° 13′ 33″.0,
M_3 = 136 25 32.1,
M − M_3 = + 0 0 0.3;
[cos E_3] 9.89 446 n,
ΔE_3 = + 0″.33
E_4 = 141° 39′ 5″.4;
[sin E_4] 9.79 271,

Prema tome rešenje je date Keplerove jednačine E_3.

(159) ~~164.~~ Izračunaćemo, prvo, vrednost ekscentrične anomalije kojoj odgovara prava anomalija jednaka dvostrukoj vrednosti ekscentrične anomalije, i to pomoću obrasca

$$tg\tfrac{1}{2}E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} tg\,2\tfrac{1}{2}E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} 2\,tg\tfrac{1}{2}E\,(1 - tg^2\tfrac{1}{2}E)^{-1},$$

$$tg^2\tfrac{1}{2}E = 1 - 2\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\left(\frac{0.2}{1.8}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{2}{3};$$

$2[tg\frac{1}{2}E_1]$	9.52 288.,	$2[tg\frac{1}{2}E_2]$	0.22 185,
$[tg\frac{1}{2}E_1]$	9.76 144,	$[tg\frac{1}{2}E_2]$	0.11 093,
$\frac{1}{2}E_1 =$	30° 0' 0",	$\frac{1}{2}E_2 =$	52° 14' 20".7,
$\frac{1}{2}E_3 =$	210 0 0;	$\frac{1}{2}E_4 =$	232 14 20.7.

Prema tome postoje četiri položaja na planetinoj putanji, kojima odgovaraju vrednosti ekscentričnih anomalija:

$E_1 = 60°$; $E_3 = 300°$; $E_2 = 104° 28' 41".4$; $E_4 = 255° 31' 18".6$;

kojima, na datoj putanji, odgovaraju prave anomalije jednake udvostručenim vrednostima ekscentričnih anomalija.

Pošto smo odredili ekscentrične, izračunaćemo srednje anomalije:

$[e]$	9.90 309,	9.90 309,	9.90 309,	9.90 309,
$[\sin E]$	9.93 753,	9.93 753n,	9.98 598,	9.98 598n,
$[e\sin E]$	9.84 062;	9.84 062n;	9.88 907;	9.88 907n.

Kako je $[e]$ = 9.90 309, a $[\varrho'']$ = 5.31 443, nalazimo da je $[e'']$ 5.21 752.

$[\sin E]$	9.93 753,	9.93 753n,	9.98 598,	9.98 598n,
$[e\sin E]$	5.15 505,	5.15 505n,	5.20 350,	5.20 350n,
$(e\sin E)'' =$	142 906",	−142 906,	159 771,	−159 771,
$(e\sin E) =$	39° 41' 46",	−39° 41' 46",	44° 22' 51",	−44° 22' 51",
$E =$	60,	300,	104 28 41.4,	255 31 18.6,
$nt = M =$	20 18 14,	339 41 46,	60 5 50.4,	299 54 9.6,
$nt =$	73 094",	1 222 906",	216 350".4,	1 079 649".6,
$t =$	367ᵈ.31;	6145ᵈ.26;	1087ᵈ.19;	5425ᵈ.38.

Izračunati brojevi predstavljaju protekle dane od planetina prolaza

kroz perihel do trenutka kada planeta dospeva u položaj za koji je njena prava anomalija jednaka dvostrukoj vrednosti njene ekscentrične anomalije.

160 ~~165.~~ Ako planetinu periodu (sideričku revoluciju) u danima označimo sa T, onda je njeno srednje siderično dnevno kretanje $\frac{2\pi}{T}$; nakon četvrtine periode od prolaza kroz perihel planetina srednja anomalija će uzeti vrednost

$$\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ dakle } 90^\circ.$$

Ekscentričnu anomaliju ćemo, prema tome, dobiti kao rešenje Keplerove jednačine, u kojoj znamo, pored vrednosti srednje anomalije ($M = 90^\circ$) i ekscentričnost (putanje) ($e = 0.01673$).

Iskoristićemo okolnost što je ekscentričnost planetine putanje mala, da Keplerovu jednačinu rešimo na dva načina.

P r v i n a č i n. Poznato je da se vrednost ekscentrične anomalije planete može dobiti pomoću beskonačnog reda

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{1}{8}e^3(3\sin 3M - \sin M) + \cdots\cdots.$$

Kako je, prema zadatku, $M = 90^\circ$, to je $2M = 180^\circ$, $3M = 270^\circ$. Prema tome ćemo za pojedine članove reda imati:

$[e]$	$8.22\ 350$,	$[e^3]$	$4.67\ 050-10$,
$[\rho'']$	$5.31\ 443$,	$[\rho'']$	$5.31\ 443$,
$[e'']$	$3.53\ 793$,	$[(e^3)'']$	$9.98\ 493-10$,
$e'' =$	$3450''.9$,	$[8]$	$0.90\ 309$,
$e =$	$0^\circ\ 57'\ 30''.9$;	$[\frac{1}{8}e^3]$	$9.08\ 184-10$,
		$[4]$	$0.60\ 206n$,
		Σ	$9.68\ 390n$; Num $= -0''.48$.

Prema tome, za ekscentričnu anomaliju planete dobili smo $E = 90^\circ 57' 30''.4$.

D r u g i n a č i n. Metodom sukcesivnih aproksimacija imaćemo, ako podjemo sa prvom približnom vrednošću $E_1 = 90^\circ\ 57'\ 30''.9$. ($M + e\sin M =$)

$[e]$	8.22 350,	$1 - e\cos E_1 =$	1.00 028,
$[\varrho'']$	5.31 443,	$\Delta E_1 =$	$-0^\circ\ 0'\ 0''.5$,
$[\sin E_1]$	9.99 994,	$E_2 =$	$90^\circ\ 57'\ 30''.4$;
$[(e\sin E_1)'']$	3.53 787,	$[e'']$	3.53 793,
$(e\sin E_1)'' =$	$3450''.4$,	$[\sin E_2]$	9.99 994,
$e\sin E_1 =$	$0^\circ\ 57'\ 30''.4$,	$[e\sin E_2]$	3.53 787,
$M_1 =$	$90^\circ\ 0'\ 0''.5$,	$(e\sin E_2) =$	$0^\circ\ 57'\ 30''.4$,
$M - M_1 =$	$-0^\circ\ 0'\ 0''.5$;	$M - M_2 =$	$0^\circ\ 0'\ 0.0$
$[\cos E_1]$	8.22 350n,		
$[e\cos E_1]$	6.44 700n;		

Rešenje je, dakle: $E_2 = 90^\circ\ 57'\ 30''.4.$

161 ~~166.~~ Vrh parametra je položaj na planetinoj putanji definisan pravom anomalijom $v_1 = 90^\circ$ i $v_2 = 270^\circ$. Pošto je u zadatku data ekscentričnost putanje, izračunaćemo vrednost ekscentrične anomalije.

$1 - e =$	0.75 463;	$v = 90^\circ$,	
$1 + e =$	1.24 537,	$\frac{1}{2}v = 45^\circ$,	
$[1 - e]$	9.87 774,	$[\mathrm{tg}\frac{1}{2}E] = \frac{1}{2}[\Delta]$	9.89 122,
$[1 + e]$	0.09 530,	$\frac{1}{2}E =$	$37^\circ\ 53'\ 53''.0$,
$\Delta =$	9.78 244,	$E =$	$75^\circ\ 47'\ 46''.0$.
$\frac{1}{2}\Delta =$	9.89 122;		

Da bismo mogli izračunati vreme koje je planeti potrebno da iz perihela dospe do vrha parametra, moramo izračunati srednju anomaliju.

$[e]$	9.38 982,	$e\sin E =$	$13^\circ\ 37'\ 43''.3$,
$[\varrho'']$	5.31 443,	$E =$	75 47 46.0,
$[e'']$	4.70 425,	$M =$	62 10 2.7,
$[\sin E]$	9.98 651,	$(M)'' =$	$223\ 802''.7$,
$[(e\sin E)'']$	4.69 076,	$T =$	$1035^d.438$,
$(e\sin E)'' =$	$49\ 063''.3$;	$n = \frac{2\pi}{T} =$	$1251''.644$,
		$t = \frac{M''}{n} =$	$178^d.807$.

Planeti treba, dakle, $178^d\ 19^h$ da iz perihela dospe do vrha parametra; odnosno, toliko dana pre prolaza kroz perihel planeta se nalazi u donjem vrhu parametra.

Tačnost izračunatih veličina proverićemo na taj način što ćemo, prvo, proveriti tačnost izračunate ekscentrične anomalije.

Ako odredimo vrednost radija vektora pomoću date prave anomalije i izračunate ekscentrične anomalije, imaćemo:

$$r_p = a(1-e^2) = a(1-e\cos E_p),$$

gde smo sa E_p označili izračunatu vrednost planetine ekscentrične anomalije. Odavde nalazimo $\cos E_p = e$; kako je $\cos E_p = 0.24\,53\bar{7}$, vidimo da je tačnost izračunate ekscentrične anomalije proverena. Tačnost veličinâ M, n i t mora se proveriti ponovnim računom, - što je i uradjeno.

162 ~~167.~~ Prema trećem Keplerovu zakonu je

$$\frac{a^3}{T^2} = K, \text{ to jest } a^3 = KT^2, \text{ gde je K konstanta.}$$

Ako diferenciramo biće

$$3a^2\Delta a = 2KT\Delta T.$$

Odavde nalazimo

$$\Delta T = \frac{3a^2}{2KT}\Delta a = \frac{3a^2T^2}{2a^3T}\Delta a = \frac{3}{2}\frac{T}{a}\Delta a.$$

Primeniti dobiveni rezultat i izračunati za koliko bi se promenila Zemljina siderička revolucija, ako bi joj se velika poluosa njene heliocentrične putanje skratila za 10^{-4} a.j.

Kako je u slučaju Zemlje i a = 1 i T = 1, imaćemo

[3]	0.47 712,
[Δa]	6.00 000 - 10 n,
Σ	6.47 712 - 10 n,
[2]	0.30 103,
[ΔT]	6.17 609 - 10 n,

$\Delta T = -0.00\,015$ ~~sid.~~ god.

Ako se za T uzme $T = 365^d.256$,

[T]	2.56 260,
[ΔT]	6.17 609 - 10 n,
[Δτ]	8.73 869 - 10 n,

$\Delta\tau = -0.05\,479$ dana.

Sideričeka revolucija bi, u tom slučaju, iznosila 365.201 dana.

163 ~~168.~~ Kako je, prema zadatku, perihelska daljina tela 1,2 a.j., znači da je

$$q = a(1-e) = 1{,}2\ \text{a.j.}$$

a kako je ekscentričnost putanje $e = 0{,}2$, iz ove jednačine nalazimo za veliku poluosu heliocentrične putanje tog tela

$$0{,}8\ a = 1{,}2\ \text{a.j.},\ \text{to jest}\ a = 1{,}5\ \text{a.j.}$$

S druge strane, ako sideričku revoluciju dotičnog tela, recimo T, izrazimo u sideričkim godinama, dakle Zemljinom sideričkom revolucijom, kao jedinicom, prema trećem Keplerovu zakonu imaćemo

$$T^2 = a^3\ \text{sid. god.} = (1{,}5)^3\ \text{sid. god.} = 3{,}375\ \text{sid.god.}$$

Odatle nalazimo

$$[T^2] = 2[T] = 0{,}52\ 827$$

$$T = 0{,}26\ 414,\ \text{dakle}\ \underline{T = 1{,}837\ \text{sid. god.}}$$

164 ~~169.~~ Za kvadrat planetine putanjske brzine imamo izraz

$$V^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

gde je značenje svih veličina dobro poznato. Ako primetimo da je, prema zadatku,

u perihelu $r_p = a(1-\sin\varphi)$,

a u afelu $r_a = a(1+\sin\varphi)$,

imaćemo za kvadrate brzina u tim tačkama

$$V_p^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{a(1-\sin\varphi)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k^2(1+m)}{a}\ \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$V_a^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{a(1+\sin\varphi)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k^2(1+m)}{a}\ \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}.$$

Podelimo li obe strane ovih jednačina dobićemo, pošto korenujemo,

$$\frac{V_p}{V_a} = \left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+\cos[2(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})]}{1+\cos[2(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})]}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2})},$$

to jest

$$V_p \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = V_a \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right), \qquad \text{q.e.d.}$$



Ovo možemo još napisati i u obliku

$$V_p(1-e)^{\frac{1}{2}} = V_a(1+e)^{\frac{1}{2}}.$$

165 ~~170.~~ Ako podjemo od poznatih relacija

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}v = 1-\cos v$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}v = 1+\cos v,$$ pa ih pomnožimo veličinom r,

$$2r\sin^2\tfrac{1}{2}v = r(1-\cos v)$$
$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}v = r(1+\cos v),$$ a setimo se da je

$$r\cos v = a(\cos E - e) \quad i \quad r = a(1-e\cos E),$$

poslednje jednačine daće nam

$$2r\sin^2\tfrac{1}{2}v = a(1-e\cos E-\cos E+e) = a(1+e)(1-\cos E),$$

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}v = a(1-e\cos E+\cos E-e) = a(1-e)(1+\cos E.$$

Iz ovih dobivamo

$$2r\sin^2\tfrac{1}{2}v = 2a(1+e)\sin^2\tfrac{1}{2}E,$$

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}v = 2a(1-e)\cos^2\tfrac{1}{2}E,$$

Deljenjem ovih dveju jednačina dobivamo $tg^2\tfrac{1}{2}v = \frac{1+e}{1-e}tg^2\tfrac{1}{2}E,$

ili, prema zadatku, $tg^2\tfrac{1}{2}v = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}tg^2\tfrac{1}{2}E.$

Ako se sad setimo da je

$$\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = tg^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi) = ctg^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi),$$

pa to unesemo u poslednju jednačinu i korenujemo dobićemo traženi izraz

$$tg\tfrac{1}{2}v = tg(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi)tg\tfrac{1}{2}E = ctg(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varphi)tg\tfrac{1}{2}E.$$

166 ~~171.~~ Prema tačnom obliku trećeg Keplerova zakona za Zemlju imamo:

I. $\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(1+m).$ Za planetu sa dvostrukom masom imaćemo, ako joj veliku poluosu označimo sa a_x,

$$\frac{a_x^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(1+2m).$$

Iz ovih dveju jednačina dobivamo

$$a_x^3 = \frac{1+2m}{1+m}a^3 = \left(1+\frac{m}{1+m}\right)a^3 \approx (1+m)a^3.$$

Odavde nalazimo

$$a_x = (1+m)^{\frac{1}{3}} a = \left(1+\frac{1}{3}m\right)a = \left(1+\frac{1}{990\,000}\right)a = 1.000\,001\,a,$$

to jest

$$a_x = 1.000\,001\ a.j. = 1.495 \times 10^6\ km.$$

II. Prema tačnom obliku trećeg Keplerova zakona za Zemlju imamo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(1+m).$$

Diferenciramo li tu jednačinu, tretirajući i T kao konstantu, imaćemo

$$\frac{3a^2\Delta a}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}\Delta m.$$

Deljenjem ove prethodnom jednačinom dobivamo

$$\frac{3\Delta a}{a} = \frac{\Delta m}{1+m}, \text{ to jest } \Delta a = \frac{\Delta m}{3(1+m)}a.$$ A kako je, prema zadatku $\Delta m = m$, biće $\Delta a = \frac{m}{3(1+m)}a \approx \frac{m}{3}a = \frac{1}{990\,000}a = 0.000\,001\ a.j. = 1495\ km$

(167) ~~(172.)~~ Ako označimo sa a veliku poluosu Zemljine heliocentrične putanje i sa T njenu sideričku revoluciju; a sa r_s označimo poluprečnik satelitove kružne putanje, koji je jednak poluprečniku Sunčeve lopte, pošto on kruži nad samom njenom površinom, i sa T_s označimo satelitsku sideričku revoluciju, imaćemo, prema trećem Keplerovu zakonu,

$$T_s^2 : T^2 = r_s^3 : a^3, \text{ to jest } T_s^2 = \left(\frac{r_s}{a}\right)^3 T^2.$$

Ako unesemo u ovu jednačinu za:
r_s = 696.350 km,
a = 149.670.000 km,
T = 365.256 sr. d., imaćemo

$[r_s]$	5.84 283,
$[a]$	8.17 513,
Δ =	7.66 770−10,
3Δ	3.00 310−10,
$2[T]$	5.12 520,
$2[T_s]$	8.12 230−10,
$[T_s]$	9.06 415−10,

$$T_s = 0.1159^d \approx 2^h 46^m.9 \approx 10.014^s.$$

Brzinu satelita dobićemo iz

$$v_s = \frac{2\pi r_s}{T_s}.$$

$[2\pi]$	0.79 818,
$[r_s]$	5.84 283,
Σ	6.64 101,
$[T_s]$	4.00 061,
$[v_s]$	2.64 040,

$$v_s = 436.9\ km/sec.$$

168 (~~173.~~) Prema tačnom obliku trećeg Keplerova zakona je

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(1+m).$$

Ako sa T_x označimo trajanje Zemljine revolucije u slučaju da njena masa postane zanemarljiva, treći Keplerov zakon će nam dati

$$\frac{a^3}{T_x^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}.$$

Iz ovih dveju jednačina nalazimo

$$\frac{T_x^2}{T^2} = 1+m, \quad \text{dakle} \quad T_x = (1+m)^{\frac{1}{2}}T \approx (1+\tfrac{1}{2}m)T.$$

Prema tome, trajanje revolucije bi se, u tom slučaju, produžilo za

$$\Delta T_x = \tfrac{1}{2}mT = \frac{365.256}{660\,000}.$$

$[T]$	2.562 5973,
$[\frac{1}{2}m]$	5.819 5439,
$[\Delta T_x]$	6.743 0534,
$[\bar{8}6\,400]$	4.936 5137,
$[\Delta T_x^s]$	1.679 5671,

$\Delta T_x = 47^s.81$, dakle za nešto manje od 48^s.

169 (~~174.~~) Kako je velika poluosa (a) planetoidove putanje 4 a.j., njeno srednje sideričko dnevno kretanje (n) dato je, prema trećem Keplerovu zakonu, izrazom $n = k''a^{-\frac{3}{2}}$, gde je k" vrednost Gausove konstante u sekundama. Znači:

$[k'']$ 3.55 001, prema tome je $n = 443''.530$,
$[a^{\frac{3}{2}}]$ 0.90 309, za $t = 365^d$,
$[n]$ 2.64 692; $nt = 161\,888''.5$,
$M = 44°\,58'\,8''.5$

Sad treba, pomoću Keplerove jednačine, izračunati ekscentričnu anomaliju, koju planeta dostiže godinu dana po prolazu kroz svoj perihel; odnosno iz koje, nakon godinu dana, dospeva u perihel. Keplerovu jednačinu ćemo rešavati metodom sukcesivnih aproksimacija, uzimajući za prvo približno rešenje

$$E_1 = M + e\sin M + \tfrac{1}{2}e^2\sin 2M; \qquad 2M = 89°\,56'\,17''.0.$$

$[e]$ 9.74 429,
$[\varrho'']$ 5.31 443,
$2[e]$ 9.48 858,
$[e'']$ 5.05 872,
$[\sin M]$ 9.84 925;

$[(e^2)'']$ 4.80 301,
$[2]$ 0.30 103,
$[\frac{1}{2}(e^2)'']$ 4.50 198,
$[\sin 2M]$ 0.00 000;

$[(e\sin M)'']$ 4.90 797,
$[\frac{1}{2}(e^2\sin 2M)'']$ 4.50 198,
$(e\sin M)'' = 80\,904''.0$,
$\frac{1}{2}(e^2\sin 2M)'' = 31\,767.1$;

$e\sin M = 22°\,28'\,24''.0$,
$\frac{1}{2}e^2\sin 2M = 8\;49\;27.1$,
$M = 44\;58\;8.5$,
$E_1 = 76\;15\;59.6$.

$[e'']$ 5.05 872,
$[\sin E_1]$ 9.98 740,
$[(e\sin E_1)'']$ 5.04 612,
$(e\sin E_1)'' = 111\,205''.0$,
$e\sin E_1 = 30°\,53'\,25''.0$,
$M_1 = 45\;22\;34.6$,
$M = 44\;58\;8.5$,
$M - M_1 = -0\;24\;26.1$,
$[\cos E_1]$ 9.37 549,
$[e\cos E_1]$ 9.11 978,
$e\cos E_1 = 0.13\,176$,
$1 - e\cos E_1 = 0.86\,824$,
$\Delta E_1 = -0°\,28'\,8''.6$,
$E_2 = 75\;47\;51.0$;

$[e'']$ 5.05 872,
$[\sin E_2]$ 9.98 651,
$[(e\sin E_2)'']$ 5.04 523,
$(e\sin E_2)'' = 110\,977''.0$,
$e\sin E_2 = 30°\,49'\,37''.0$,
$M_2 = 44\;58\;14.0$,
$M = 44\;58\;8.5$,
$M - M_2 = -0\;0\;5.5$,
$[\cos E_2]$ 9.38 979,
$[e\cos E_2]$ 9.13 408,
$e\cos E_2 = 0.13\,617$,
$1 - e\cos E_2 = 0.86\,383$,
$\Delta E_2 = -0°\,0'\,6''.4$,
$E_3 = 75\;47\;44.6$;

$[e'']$ 5.05 872,
$[\sin E_3]$ 9.98 651,
$[(e\sin E_3)'']$ 5.04 523,
$(e\sin E_3)'' = 110\,977''.0$,
$e\sin E_3 = 30°\,49'\,37''.0$,
$M_3 = 44\;58\;7.6$,
$M = 44\;58\;8.5$,
$M - M_3 = +0\;0\;0.9$,
$[\cos E_3]$ 9.38 984,
$[e\cos E_3]$ 9.13 413,
$e\cos E_3 = 0.13\,618$,
$1 - e\cos E_3 = 0.86\,382$,
$\Delta E_3 = +0°\,0'\,1''.0$,
$E_4 = 75\;47\;45.6$;

$[\sin E_4]$ 9.98 651,
$[(e\sin E_4)'']$ 5.04 523,
$e\sin E_4 = 30°\,49'\,37''.0$,
$M_4 = 44\;58\;8.6$
$M - M_4 = -0\;0\;0.1$,

Prema tome je $E = 75°\,47'\,45''.5$.

74 ca 7 perc!

M =	44° 58′ 8″.5	$[e'']$	5.058 7181	$[\sin M]$	9.849 2502	$[\sin 2M]$	9.999 9917
$2M$ =	89 56 17.0	$[(e^2)'']$	4.803 0111	$[e'']$	5.058 7181	$[(e^2)'']$	4.803 0111
e =	0.555	e'' =	114 476″.97	$[e''\sin M]$	4.907 9683	$[(e^2)''\sin 2M]$	4.803 0028
$[e]$	9.744 2930	$(e)^\circ$ =	31° 47′ 56″.97			$((e^2)''\sin 2M)''$ =	63 533″.50
$[e'']$	5.314 4251	$(e^2)''$ =	63 534″.72	$e''\sin M$ =	80 903″.59	$e^2\sin 2M$ =	17° 38′ 53″.50
$[e^2]$	9.488 5860	$(e^2)^\circ$ =	17° 38′ 54″.72	$e\sin M$ =	22° 28′ 23″.59	$\frac{1}{2}e^2\sin 2M$ =	8 49 26.75.

E_k	76° 15′ 58″.84	75° 47′ 50″.03	75° 47′ 45″.71
$[\sin E_k]$	9.987 4025	9.986 5180	9.986 5157
$[e'']$	5.058 7181		
$[e''\sin E_k]$	5.046 1206	5.045 2361	5.045 2338
$(e\sin E_k)''$ =	111 204″.05	110 977″.80	110 977″.21
$(e\sin E_k)^\circ$ =	30° 53′ 24″.05	30° 49′ 37″.80	30° 49′ 37″.21
M_k =	45 22 34.79	44 58 12.23	44 58 8.50
ΔM_k =	− 0 24 26.29	− 0 0 3.73	0 0 0.00
$[\cos E_k]$	9.375 4968	9.389 7935	
$[e\cos E_k]$	9.119 7898	9.134 0865	$\frac{1}{2}E$ = 37° 53′ 52″.86.
$e\cos E_k$ =	0.131 7619	0.136 1716	$[1-e\cos E]$ 9.936 4218,
$1-e\cos E_k$ =	0.868 2381	0.863 8284	$[a]$ 0.602 0600,
ΔE_k	− 0° 28′ 8″.81	− 0° 0′ 4″.32	$[r]$ 0.538 4818; r = 3.455 268.

$1+e$ =	1.555,	$\frac{1}{2}\Delta$	0.271 6852,
$1-e$ =	0.445,	$[\mathrm{tg}\frac{1}{2}E]$	9.891 2157,
$[1+e]$	0.191 7304,	$[\mathrm{tg}\frac{1}{2}v]$	0.162 9009,
$[1-e]$	9.648 3600,	$\frac{1}{2}v$ =	55° 30′ 7″.80,
Δ	0.543 3704;		

v = 111° 0′ 15″.60.

Vrednost prave anomalije ćemo odrediti iz

$$tg\tfrac{1}{2}v = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} tg\tfrac{1}{2}E .$$

Prema zadatku je $1+e = 1.555$, $1-e = 0.445$. Dakle, imaćemo:

$[1+e]$	0.19 173,
$[1-e]$	9.64 836,
$\left[\frac{1+e}{1-e}\right]$	0.54 337,
$\frac{1}{2}\left[\frac{1+e}{1-e}\right]$	0.27 169,
$[tg\frac{1}{2}E]$	9.89 122,
$[tg\frac{1}{2}v]$	0.16 291,
$\frac{1}{2}v =$	55° 30′ 9.″0,
$v =$	111° 0′ 18.″0;

Vrednost radijavektora možemo dobiti iz jednačine

$$r = a(1-e\cos E).$$

$\cos E =$	0.24 538,
$e\cos E =$	0.13 619,
$(1-e\cos E) =$	0.86 381,
$r =$	3.45 524.

170 ~~175~~ 1. Poći ćemo od poznatog izraza koji odredjuje pravu anomaliju ako su poznate ekscentrične anomalije i ekscentričnost putanje,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E.$$

Ako se dopusti da se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti, dobiva se da je

$$\frac{1}{1-e} \approx 1+e,$$

tako da je, onda,

$$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1+e.$$

S druge strane, ako stavimo

$$\tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}E = x,$$

imaćemo

$$\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2}(v-E)\right] = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v - \operatorname{tg}\frac{1}{2}E}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}v\operatorname{tg}\frac{1}{2}E} = \frac{e\operatorname{tg}\frac{1}{2}E}{1+(1+e)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}E} =$$

$$= \frac{e\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\cos^2\frac{1}{2}E}{1+e\sin^2\frac{1}{2}E} = \frac{2e\sin\frac{1}{2}E\cos\frac{1}{2}E}{2(1+e\sin^2\frac{1}{2}E)} = \frac{e\sin E}{2(1+e\sin^2\frac{1}{2}E)}.$$

Kako smo dopustili da se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti, imaćemo

$$\operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2}(v-E)\right] \approx \tfrac{1}{2}e\sin E.$$

Ako primetimo da levu stranu, kao malu veličinu, možemo napisati

$$\tfrac{1}{2}(v-E)\,\mathrm{arc}\,1' \approx \tfrac{1}{2}e\sin E,$$

dakle

$$v - E = \frac{e\sin E}{\mathrm{arc}\,1'} = \frac{3437.76}{2\times 60} = 28'.6,$$

dakle

$$v = 30^\circ\, 28'.6.$$

2. Prema istom polaznom obrascu imamo

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \left(\frac{61}{59}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \left(\frac{61}{59}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos E}{\sin E} = \left(\frac{61}{59}\right)^{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{3}) = \left(\frac{61}{59}\right)^{\frac{1}{2}}\times 0.2679 = 1.017\times 0.2679 =$$

$$= 0.27245$$

$\tfrac{1}{2}v = 15^\circ 14'.4$; prema tome je $v = 30^\circ 28'.8$.

3. Pomoću logaritama imamo:

$$
\begin{array}{ll}
[61] & 1\cdot 78\,533, \\
[59] & 1\cdot 77\,085, \\
[\Delta] & 0\cdot 01\,448, \\
\tfrac{1}{2}[\Delta] & 0\cdot 00\,724, \\
[tg\,\tfrac{1}{2}E] & 9\cdot 42\,805, \\
[tg\,\tfrac{1}{2}v] & 9\cdot 43\,529, \\
\tfrac{1}{2}v = & 15^\circ\, 14'.4, \\
v = & 30\;\; 28\cdot 8 .
\end{array}
$$

Greška je u (1), kao što se vidi, < 0',5!

171 ~~176.~~ Ako pojednostavljeni oblik trećeg Keplerova zakona primenimo na planetu i Zemlju imaćemo

$$n^2a^3 = n_0^2 a_0^3, \quad \text{to jest} \quad n = n_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

A ako primetimo da je, računajući vreme od planetina prolaza kroz perihel, M = nt, nalazimo

$$a) \quad M = 2\pi\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{t}{T_0}; \qquad q.e.d.$$

Iz ovog izraza sleduje da je

$$M = 2\pi\left[\frac{a_0(1-e^2)}{a(1-e^2)}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{t}{T_0}, \quad \text{to jest} \quad b) \quad M = 2\pi\left[\frac{a_0(1-e^2)}{p}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{t}{T_0};$$

Iz a) sleduje, isto tako,

$$M = \frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}} t, \qquad a \quad \frac{2\pi a_0^{\frac{3}{2}}}{T_0} = k\sqrt{1+m}.$$

Ako smenimo, nalazimo

$$c) \quad M = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\, t, \qquad q.e.d.$$

172 ~~177.~~ Brzina tela na njegovoj heliocentričnoj putanji data je izrazom

$$V^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

gde upotrebljena slova označavaju dobro poznate veličine. Prema trećem Keplerovu zakonu je,

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2(1+m)}, \qquad \text{to jest} \qquad k^2(1+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

tako da za brzinu dobivamo

$$V^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

a) Za $r_p = a(1-e)$: $V_p^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right] = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1+e}{1-e}$;

b) za $r_a = a(1+e)$: $V_a^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right] = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1-e}{1+e}$;

c) za $r = 2$: $V_2^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 (a-1)$.

Da bismo brzine dobili izražene u km/sec, treba nadjene vrednosti još pomnožiti odnosom $\frac{149.5 \times 10^6 \text{ km}}{365.256 \times 86\,400 \text{ sec}} = 4.74 \text{ km/sec}. \; [= f]$.

Izračunaćemo nadjene veličine brzina pomoću logaritama. U svima izrazima javlja nam se a; stoga ćemo izračunati tu vrednost na osnovi poznate kometine sideričke revolucije, a pomoću trećeg Keplerova zakona. I to u približnom obliku, jer nam je trajanje revolucije samo približno poznato.

$[T]$	1.88 081,
$3[a] = 2[T]$	3.76 162,
$[a]$	1.25 387,
$a =$	17.942;
$a-1 =$	16.942;

$[2]$	0.30 103,
$[\pi]$	0.49 715,
$[a]$	1.25 387,
$\Sigma =$	2.05 205,
$[T]$	1.88 081,
$\Delta =$	0.17 124,
$2\Delta =$	0.34 248;

$[1+e]$	0.29 386,
$[1-e]$	8.51 488,
$\left[\frac{1+e}{1-e}\right]$	1.77 898,
$\left[\frac{1-e}{1+e}\right]$	8.22 102,
$[a-1]$	1.22 896;

a)

$2[V_p]$	2.12 146,
$[V_p]$	1.06 073,
$[f]$	0.67 578,
$[V_p \text{ k/s}]$	1.73 651,
$V_p =$	54.5 km/sec.

b)

$2[V_2]$	1.57 144,
$[V_2]$	0.78 572,
$[f]$	0.67 578,
$[V_2 \text{ k/s}]$	1.46 150,
$V_2 =$	28.9 km/sec

c)

$2[V_a]$	8.56 350,
$[V_a]$	9.28 175,
$[f]$	0.67 578,
$[V_a \text{ k/s}]$	9.95 753,
$V_a =$	0.9 km/sec.

173 ~~178.~~ Ako elipsa na sl. 103 predstavlja planetinu putanju, P njen položaj na toj putanji; $\mathcal{S}$ žižu koju zauzima Sunce, a $\mathcal{F}$ drugu, praznu žižu, onda je ugao v prava, a ugao w takozvana antifokusna anomalija.

Sl. 103

Ako planetine radijevektore označimo sa r i ρ , onda je, prema poznatoj osobini eliptičke putanje,

$$\rho + r = 2a,$$

gde je a velika poluosa putanje.

Poznato je, s druge strane, da za jednačinu putanje imamo

$$r = a(1 - e\cos E),$$

gde je E ekscentrična anomalija planete koja odgovara položaju P, koja nije predstavljena na slici, da je ne bismo bez potrebe preopterećivali. Iz ovih dveju jednačina dobivamo odmah

$$\rho = a(1 + e\cos E).$$

Sa slike, opet, iz trougla $\mathcal{SPF}$ imamo

$$r^2 = (2ae)^2 + \rho^2 - 4\rho a e\cos w,$$

$$(2a - \rho)^2 = (2ae)^2 + \rho^2 - 4\rho a e \cos w,$$

a odavde lako nalazimo

$$a(1 - e^2) = \rho(1 - e\cos w),$$

odnosno

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e\cos w)^{-1} = a(1 + e\cos E).$$

Iz ove jednačine nalazimo

$$\cos w = \frac{\cos E + e}{1 + e\cos E}.$$

Odavde dobivamo

$$1 - \cos w = (1 - e)(1 - \cos E)(1 + e\cos E)^{-1},$$

$$1 + \cos w = (1 + e)(1 + \cos E)(1 + e\cos E)^{-1}.$$

Iz ovih dveju jednačina deljenjem dobivamo

$$\frac{1 - \cos w}{1 + \cos w} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}w}{2\cos^2\frac{1}{2}w} = tg^2\tfrac{1}{2}w = \frac{1-e}{1+e}\,\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{1-e}{1+e}\,tg^2\tfrac{1}{2}E,$$

to jest

$$tg\tfrac{1}{2}w = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} tg\tfrac{1}{2}E.$$

A kako znamo da izmedju ekscentrične i prave anomalije planete postoji veza

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v,$$

smenom ove u gornjoj jednačini dobivamo

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v, \qquad q.e.d.$$

Iz pretposlednjih dveju, množenjem, dobivamo $\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w.$

174 ~~179.~~ Prvi način. Označimo sa E_1 i E_2 ekscentrične anomalije na početku i na kraju razmaka od 6^h, čiji zbir, prema zadatku, iznosi $E_1 + E_2 = 180^\circ$.

Iz Keplerovih jednačina za ova dva položaja, oduzimanjem, dobivamo

$$(E_2 - E_1) - e\left[\sin E_2 - \sin E_1\right] = n(t_2 - t_1).$$

Ako razvijemo drugi član na levoj strani, imaćemo

$$(E_2 - E_1) - 2e\cos\tfrac{1}{2}(E_2 + E_1)\sin\tfrac{1}{2}(E_2 - E_1) = n(t_2 - t_1).$$

U ovoj jednačini možemo iskoristiti okolnost što je, s obzirom na relativno neznatno srednje sideričko dnevno kretanje, razlika ekscentričnih anomalija, u ovom konkretnom slučaju, tako isto neznatna veličina, i — možemo sin u drugom članu, na levoj strani, zameniti lukom. U tom slučaju poslednja jednačina prelazi u

$$(E_2 - E_1)\left[1 - e\cos\tfrac{1}{2}(E_2 + E_1)\right] = n(t_2 - t_1).$$

Prema zadatku je $t_2 - t_1 = 6^h = \frac{1}{4}\, 24^h$; stoga je $n(t_2 - t_1) = 25''$. I tako nalazimo za razliku, ako primetimo da je $E_2 + E_1 = 180^\circ$,

$$\underline{E_2 - E_1 = 25''}.$$

Drugi način. Do istog rezultata bismo mogli doći polazeći od Keplerove jednačine,

$$E - e\sin E = M.$$

Diferenciranjem ove dobivamo

$$dE\,(1 - e\cos E) = dM.$$

Kako su obe vrednosti ekscentrične anomalije vrlo bliske 90°, to ako

uzmemo za E njihovu aritmetičku sredinu, iz poslednje jednačine sleduje

$$dE = dM = 25''.$$

(175) ~~180.~~ Sa već poznatim oznakama ima, prvo, Keplerovu jednačinu

$$E - e\sin E = M,$$

i, drugo, jednačinu elipse

$$1 - \frac{r}{a} = e\cos E.$$

Dignemo li obe jednačine na kvadrat i saberemo li ih imaćemo

$$(E-M)^2 + \left(1-\frac{r}{a}\right)^2 = e^2$$

Odavde dobivamo za razliku ekscentrične i srednje anomalije

$$(E-M)^2 = e^2 - \left(1-\frac{r}{a}\right)^2,$$

$$= \left(e+1-\frac{r}{a}\right)\left(e-1+\frac{r}{a}\right) = 0.775 \times 0.025,$$

$$(E-M)^2 = 0.019\,375.$$

$$2[E-M] \quad 8.28724,$$
$$[E-M] \quad 9.14362,$$
$$[e] \quad 9.60206,$$
$$[\sin E] \quad 9.54156,$$
$$E = 20^\circ\, 21'\, 51'',$$
$$E-M = 7\;\; 58\;\; 31,$$
$$M = 12^\circ\, 23'\, 20'';$$

$$M = nt = 44\,600'',$$
$$\frac{1}{n}M = t = 74^d.333,$$
$$t = 74^d\, 8^h.$$

Dakle, proteklo je od planetina prolaza kroz perihel do položaja na heliocentričnoj daljini 0.625 — 74 dana i 8 časova.

(176) ~~181.~~ Ako se drugi i viši stepeni ekscentričnosti putanje mogu zanemariti, ekscentrična anomalija se onda može predstaviti izrazom

$$E = M + e\sin M$$

U tom slučaju ćemo imati

$$\sin E = \sin(M + e\sin M) = \sin M\cos(e\sin M) + \cos M\sin(e\sin M),$$

$$\cos E = \cos(M + e\sin M) = \cos M\cos(e\sin M) - \sin M\sin(e\sin M).$$

Desne strane ovih izraza možemo razviti i ako zanemarimo članove sa stepenima ekscentričnosti višim od prvoga, imaćemo

$$\sin E = \sin M(1 + e\cos M),$$

$$\cos E = \cos M - e\sin^2 M = \cos M - e + e\cos^2 M.$$

Deljenjem ovih izraza nalazimo

$$tg\,E = \frac{\sin M\,(1+e\cos M)}{\cos M\,(1+e\cos M)-e} = \frac{\sin M}{\cos M - e\,(1+e\cos M)^{-1}}$$

Razvijemo li u red drugi član u imenitelju i zanemarimo li članove sa stepenima ekscentričnosti višim od prvog, imaćemo

$$E = arctg\left(\frac{\sin M}{\cos M - e}\right), \qquad q.e.d.$$

177 (182.) Za sistem Mars - Fobos, prema tačnom obliku Keplerova zakona, imaćemo, ako sa a_s i T_s označimo: satelitovu srednju daljinu, odnosno satelitovu siderićku revoluciju

$$\frac{a_s^3}{T_s^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(M_♂ + m_s),$$

a za Zemlju ćemo imati

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(M_⊙ + M_♁).$$

Iz ove dve jednačine dobivamo

$$\frac{a_s^3 T^2}{a^3 T_s^2} = \frac{M_♂ + m_s}{M_⊙ + M_♁} = \frac{M_♂\left(1+\frac{m_s}{M_♂}\right)}{M_⊙\left(1+\frac{M_♁}{M_⊙}\right)}.$$

Ako sad zanemarimo, prvo, satelitovu masu (m_s) u odnosu prema Marsovoj ($M_♂$), što smemo učiniti, a, zatim, Zemljinu ($M_♁$) u odnosu prema Sunčevoj masi, $M_⊙$ što isto tako možemo sebi dozvoliti, za traženu Marsovu masu dobivamo

$$M_♂ = \frac{a_s^3 T^2}{a^3 T_s^2} M_⊙,$$

ili, u jedinicama Sunčeve mase, kako se i izražavaju mase velikih planeta,

$$M_♂ = \left(\frac{a_s}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_s}\right)^2.$$

Izrazimo li a_s u astr. jed. i T_s u sid. godinama:

a_s = 0·000 873 114 a.j. , T_s = 0·000 006 272 5 s.g.,

imaćemo za Marsovu masu

$[a_s]$	5·79 745 −10,	$3[a_s]$	17·39 235 −30,
$[T_s]$	6·94 106 −10,	$2[T_s]$	13·88 212 −20,
		$[M_♂]$	3·51 023 −10,

$M_♂$ = 0·000 000 3238;

tačna je vrednost $M(\delta) = 0.000\,000\,3233 = 3.233 \times 10^{-7}$.

(178) ~~183.~~ Neka deo elipse na sl. 104 predstavlja planetinu heliocentričnu putanju; P planetin položaj u izvesnom trenutku, definisan radijem vektorom SP = r i pravom anomalijom v. Tangenta PT u tom položaju predstavlja pravac planetina kretanja u tom trenutku. Označimo ugao tangente, dakle prave QT, sa pozitivnim delom apscisne ose sa α. Pravac upravan na radijuvektoru u položaju P predstavljen je na slici sa PU. Označimo sa ψ ugao izmedju PT i PU. Onda je, kako sa slike vidimo,

$$\alpha = 90° - \psi + v, \qquad \text{to jest} \qquad \psi = 90° - (\alpha - v).$$

sl. 104

Tako da će biti

$$tg\,\psi = ctg(\alpha - v) = \frac{1}{tg(\alpha - v)} = \frac{1 + tg\alpha\, tg v}{tg\alpha - tg v}.$$

Poznato je, medjutim, da je uglovni koeficijent tangente, u tački P(x,y), na elipsi sa poluosama a i b, dat izrazom

$$tg\,\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}.$$

S druge strane imamo, kao što znamo,

$$x = a\cos E, \qquad r\sin v = a\cos\varphi\sin E,$$
$$y = b\sin E = a\cos\varphi\sin E, \quad i \qquad r\cos v = a(\cos E - \sin\varphi).$$

Tako da dobivamo

$$tg\,\alpha = -\frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2}\cdot\frac{a\cos E}{a\cos\varphi\sin E} = -\cos\varphi\, ctg E;$$
$$tg\,v = \cos\varphi\sin E\,(\cos E - \sin\varphi)^{-1}.$$

Prema tome će biti

$$tg\,\psi = \frac{1 - \cos\varphi\, ctg E\cos\varphi\sin E\,(\cos E - \sin\varphi)^{-1}}{-\cos\varphi\, ctg E + \cos\varphi\sin E\,(\cos E - \sin\varphi)^{-1}},$$
$$= \frac{\sin E\,(\cos E - \sin\varphi) - \cos^2\varphi\sin E\cos E}{-\cos\varphi\cos^2 E + \sin\varphi\cos\varphi\cos E + \cos\varphi\sin^2 E},$$
$$= \frac{\sin E\cos E - \sin E\sin\varphi - \sin E\cos E + \sin^2\varphi\sin E\cos E}{-\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\cos E},$$
$$= \frac{-\sin\varphi\sin E\,(1 - \sin\varphi\cos E)}{-\cos\varphi\,(1 - \sin\varphi\cos E)} = tg\varphi\sin E.$$

Našli smo, dakle, za traženi ugao izraz

$$\psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi \sin E).$$

I tako vidimo da se ugao izmedju pravca tangente na putanji i pravca upravnog na radijuvektoru planete menja izmedju granica ($-\varphi$ i $+\varphi$).

179 ~~184.~~ Neka se na sl. 105 elipsa $\Pi \mathcal{P} B$ predstavlja planetinu heliocentričnu putanju, P jedna njen položaj, odredjen pravom anomalijom v. Neka planetinu putanjsku brzinu, u tom položaju, predstavlja vektor PQ = V. Radijalna i transverzalna komponente te brzine predstavljene su vektorima $PU = V_r$ i $PW = V_v$. Komponenta normalna na apsidnoj liniji predstavljena je vektorom PK = V_n. Zadatak traži da se nadju izrazi za komponente PK = V_n i PL = V_l.

Ispravit

Ako primetimo da je ugao $\angle UPK = 90^\circ$, sa slike vidimo da je

$$PK = PU \operatorname{cosec} v \qquad i \qquad PU = PW - LW = PW - UK,$$

odnosno

$$V_n = V_r \operatorname{cosec} v \qquad i \qquad V_l = V_v - V_r \operatorname{ctg} v.$$

Komponente V_r i V_v možemo izraziti pomoću poznatih karakteristika putanje. Imamo

$$V_r = \dot r = \frac{dr}{dv}\cdot \dot v = \frac{e}{p} r^2 \sin v \cdot \frac{C}{r^2} = C\frac{e}{p}\sin v;$$

$$V_v = r\dot v = \frac{r^2 \dot v}{r} = \frac{C}{r}.$$

Сл. 105

Ako ove izraze unesemo u izraze za tražene komponente, nalazimo

$$V_n = C\frac{e}{p}\sin v \operatorname{cosec} v = C\frac{e}{p},$$

$$V_l = \frac{C}{r} - C\frac{e}{p}\sin v \operatorname{ctg} v = C\left(\frac{1 + e\cos v - e\cos v}{p}\right) = C\frac{1}{p}, \quad q.e.d.$$

180 ~~185.~~ Prema drugom Keplerovu zakonu je

$$r^2 \dot v = C = \frac{2ab\pi}{T} = abn.$$

Prema zadatku treba da bude

$$\dot v = n.$$

U tom slučaju, iz gornje veze se dobiva

$$r^2 = ab, \quad \text{to jest} \quad r = (ab)^{\frac{1}{2}},$$

drugim rečima, u trenutku i položaju kad je heliocentrična uglovna brzina Zemljina jednaka njenoj srednjoj uglovnoj brzini, radijevektor je srednja geometrijska proporcijala izmedju velike i male popuose njene godišnje putanje.

Da bismo odredili datume kad Zemlja u te položaje dospeva, odredićemo, prvo, ekscentrične anomalije koje odgovaraju nadjenoj vrednosti radija vektora, i to iz jednačine

$$r = a(1-e\cos E) = (ab)^{\frac{1}{2}} = \left[a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Odatle nalazimo

$$\cos E = \frac{1}{e}\left[1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}\right].$$

Sa gornjom vrednošću za ekscentričnost Zemljine putanje nalazimo:

prvo, $e^2 = 0.000\,279$, zatim $1-e^2 = 0.999\,271$;

pa zatim

$[1-e^2]$ $9.999\,8784$,

$\frac{1}{4}[1-e^2]$ $9.999\,9696$,

$\eta = (1-e^2)^{\frac{1}{4}} = 0.999\,9300$;

$1-\eta = 0.000\,0700$,

$[1-\eta]$ $5.845\,0980-10$,

$[e]$ $8.222\,7165$,

$[\cos E]$ $7.622\,3815$,

$\cos E = 0.004\,1916$.

Tako nalazimo za ekscentričnu anomaliju: $E = \pm 89^\circ 45' 35''$.

Datume kojima odgovaraju ove vrednosti ekscentričnih anomalija naći ćemo, ako znamo vrednosti srednjih anomalija koje im odgovaraju. A ove ćemo dobiti iz Keplerove jednačine

$$M = E - e\sin E.$$

$[e]$ $8.222\,7165$,

$[\varrho'']$ $5.314\,4251$,

$[e'']$ $3.537\,1416$,

$[\sin E]$ $9.999\,9962$,

$[e\sin E]$ $3.537\,1378$,

$e\sin E = 3444''.6$;

$E = 89^\circ\,45'\,35''$,

$e\sin E = -\;57\;25$,

$M = 88\;48\;10$,

$M^\circ = 88^\circ.80\,278$.

Kako se ove anomalije računaju od trenutka prolaza planete, dakle i Zemlje, kroz perihel, to ćemo deljenjem srednje anomalije srednjom dnevnom uglovnom brzinom (n^0) dobiti broj dana proteklih

od Zemljina prolaza kroz perihel do trenutka kad je dospela u položaj odredjen vrednošću radija vektora $r = (ab)^{\frac{1}{2}}$. Za protekli broj dana nalazimo $\tau = 90.10$ dana.

Kako Zemlja prolazi kroz svoj perihel 3. januara, kroz položaj koji se traži prolaziće $\tau = 90.10$ dana posle, odn. toliko dana pre 3. januara.

Iz G.n.n. vidimo da 93-ćem danu u godini odgovara 4. april; a 90-tom danu pre 3. januara odgovara 6. oktobar.

181 ~~186.~~ Ako u izraz za III Keplerov zakon,

$$a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2,$$

unesemo, mesto sideričkih revolucija, srednja sideričkа dnevna kretanja,

$$\frac{2\pi}{T_1} = n_1 \quad i \quad \frac{2\pi}{T_2} = n_2,$$

on dobiva poznati oblik

$$a_1^3 n_1^2 = a_2^3 n_2^2 = \cdots\cdots = K, \tag{1}$$

gde je sa K označena konstanta, jedinstvena za ceo sistem tela.

S druge strane, za površinsku brzinu planete smo našli izraz

$$C = \frac{2ab\pi}{T} = \frac{2\pi}{T} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} = n a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}. \tag{2}$$

Svaka planeta je, dakle, okarakterisana svojom površinskom brzinom, svojom vrednošću ove konstante.

Uporedimo li izraze (1) i (2), nalazimo

$$C = \sqrt{Kp}. \tag{3}$$

Za dve planete, čije su površinske brzine C_1 i C_2, a parametri putanja p_1 i p_2 imaćemo, prema tome,

$$C_1 = \sqrt{Kp_1} \quad i \quad C_2 = \sqrt{Kp_2}.$$

Eliminisanjem konstante K iz ova dva izraza, dobivamo

$$C_1 : C_2 = \sqrt{p_1} : \sqrt{p_2}, \tag{4}$$

da se površinske brzine planeta odnose kao kvadratni koreni parametra njihovih heliocentričnih putanja. Iz poslednjeg izraza možemo, opet, lako doći do izraza za III Keplerov zakon.

113 III/62

Izraz (4) može, prema tome, zameniti III Keplerov zakon kod onih tela koja se ne kreću po zatvorenim putanjama i kod kojih ne može biti govora o siderličkim revolucijama; drugim rečima, kod kometa, koje se kreću paraboličkim ili hiperboličkim putanjama.

182 ~~187~~ Ekvacijom centra nazvana je razlika prave i srednje anomalije. Ako je označimo sa $\mathcal{E}_e$,

$$\mathcal{E}_e = v - \mathcal{M}.$$

Potreban uslov za ekstremum te funkcije je

$$\dot{\mathcal{E}}_e = 0, \quad \text{to jest} \quad \dot{v} = \dot{\mathcal{M}}.$$

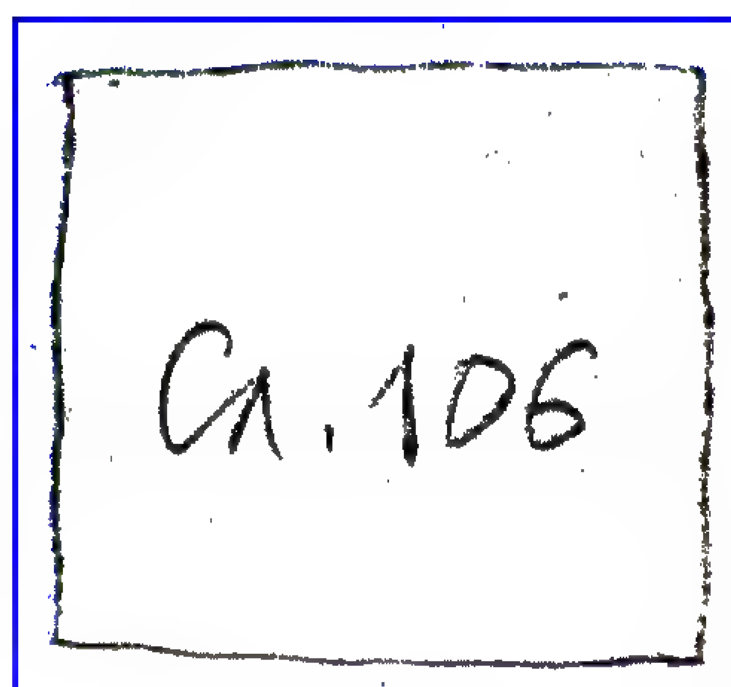
Ako sad izraz za Keplerov zakon napišemo u obliku

$$r^2\dot{v} = na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = nab,$$

i primetimo da je

$$\dot{\mathcal{M}} = n,$$

dobivamo $\quad r^2 = ab, \quad$ to jest $\quad r = \pm (ab)^{\frac{1}{2}}.$



Ekvacija centra planete dostiže, prema tome, ekstremum u položaju odredjenom radijusvektorom jednakim geometrijskoj sredini iz velike i male popuose planetine putanje.

Konstrukcija te vrednosti radijavektora je dobro poznata iz Elementarne geometrije. Nad velikom osom, (sl. 106) ~~kao prečnikom~~, povucimo osnovni krug ΠKA. Iz Π odmerimo na velikoj osi, duž ΠJ = OB i povucimo normalu JK na apsidnoj liniji. Kateta ΠK predstavlja, kao što znamo, geometrijsku sredinu izmedju velike i male poluose putanje.

Ako iz S odmerimo na putanji tu veličinu radijavektora, nalazimo dva položaja, C_1 i C_2, koji odgovaraju ekstremima ekvacije centra.

Za veličinu tog radijvektora imamo

$$r = \left[a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Za tražene anomalije koje tim položajima odgovaraju, nalazimo:

p r a v u — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{4}} = a(1-e^2)(1+e\cos v)^{-1},$$

a odatle

$$\cos v = \frac{1}{e}\left[(1-e^2)^{\frac{3}{4}} - 1\right];$$

gure ve mory

e k s c e n t r i č n u — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{4}} = a(1-e\cos E),$$

a odatle (v. Rešenje 185)

$$\cos E = \frac{1}{e}\left[1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}\right];$$

gure ve mory

srednju — iz Keplerove jednačine,

$$M = E - e\sin E,$$

pošto u istu, na njenoj desnoj strani, unesemo nadjene vrednosti za ekscentričnu anomaliju.

Zadatkom je data vrednost ugla ekscentričnosti planetoida 4 Vesta, $\varphi = 5^{\circ}.099 = 5^{\circ}\ 5'\ 56''$. Sa tom vrednošću nalazimo:

$$e = \sin\varphi = 0.08\ 887,$$
$$[e] \quad 8.94\ 878,$$
$$2[e] \quad 7.89\ 756,$$
$$e^2 = 0.00\ 790,$$
$$1-e^2 = 0.99\ 210,$$
$$[1-e^2] \quad 9.99\ 656,$$
$$\tfrac{1}{4}[1-e^2] \quad 9.99\ 914,$$
$$\tfrac{3}{4}[1-e^2] \quad 9.99\ 742,$$
$$(1-e^2)^{\frac{1}{4}} = 0.99\ 802,$$
$$(1-e^2)^{\frac{3}{4}} = 0.99\ 408;$$

$$[e\cos E] \quad 7.47\ 422,$$
$$[e] \quad 8.94\ 878,$$
$$[e\cos v] \quad 7.77\ 232\,n,$$
$$[\cos E] \quad 8.52\ 544,$$
$$[\cos v] \quad 8.82\ 354\,n,$$
$$E = 88^{\circ}\ 4'\ 44''.0,$$
$$v = 93\ 49\ 10.0,$$
$$[\sin E] \quad 9.99\ 976,$$
$$[e''] \quad 4.26\ 321,$$
$$[e\sin E] \quad 4.26\ 297,$$
$$(e\sin E)'' = 18\ 321''.7$$
$$e\sin E = 5^{\circ}\ 5'\ 21''.7,$$
$$M = 82^{\circ}\ 59'\ 22''.3.$$

Za ekstremume ekvacije centra nalazimo, prema tome, $\Phi_e = \pm 10^{\circ}\ 49'\ 48''.0$; gornji znak odgovara položaju C_1, donji položaju C_2, čiji radijivektori iznose

$$r_{1,2} = 2.3571.$$

½ deo

(183) ~~188.~~ Potreban uslov za traženi ekstremum je

$$\frac{d(v-E)}{dt} = 0, \qquad \text{ili} \qquad \dot{v} = \dot{E}.$$

Iz II Keplerova zakona sleduje

$$\dot{v} = nab\,r^{-2};$$

Iz Keplerove jednačine dobivamo

$$\dot{E}(1-e\cos E) = n,$$

to jest

$$\dot{E} = nar^{-1}.$$

I tako nam uslov za ekstremum daje $r = b$. Drugim rečima, razlika prave i ekscentrične anomalije dostiže ekstremum u položajima odredjenim vrednostima radijavektora jednaka maloj poluosi planetine putanje.

Za tražene anomalije koje tim položajima odgovaraju, nalazimo:

pravu — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e^2)(1+e\cos v)^{-1},$$

nalazimo

$$\cos v = \frac{1}{e}\left[(1-e^2)^{\frac{1}{2}} - 1\right];$$

ekscentričnu — iz jednačine

$$a(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1-e\cos E),$$

nalazimo

$$\cos E = \frac{1}{e}\left[1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\right];$$

što znači da je

$$\cos v = -\cos E;$$

srednju — iz Keplerove jednačine,

$$M = E - e\sin E,$$

pošto u istu, na njenoj desnoj strani, unesemo nadjene vrednosti za ekscentričnu anomaliju.

Zadatkom je data vrednost ugla ekscentričnosti planetoida 4 Vesta, $\varphi = 5°.099 = 5° \; 5' \; 56''$. Sa tom vrednošću nalazimo:

$$e = \sin\varphi = 0.08\,887,$$
$$[e] \quad 8.94\,878,$$
$$2[e] \quad 7.89\,756,$$
$$e^2 = 0.00\,790,$$
$$1-e^2 = 0.99\,210,$$
$$[1-e^2] \quad 9.99\,656,$$
$$\tfrac{1}{2}[1-e^2] \quad 9.99\,828,$$
$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = 0.99\,605,$$
$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 = -0.00\,395;$$

$$[e\cos v] \quad 7.59\,660n,$$
$$[e] \quad 8.94\,878,$$
$$[\cos v] \quad 8.64\,782n,$$
$$v = 92°\;32'\;52''.8,$$
$$E = 87\;\;27\;\;7.2,$$
$$[\sin E] \quad 9.99\,957,$$
$$[e''] \quad 4.26\,321,$$
$$[e\sin E] \quad 4.26\,278,$$
$$(e\sin E)'' \quad 18\,313''.8,$$
$$e\sin E = 5°\;5'\;13''.8,$$
$$M = 82°\;21'\;53''.4.$$

Za ekstremum razlike prave i ekscentrične anomalije nalazimo, prema tome, $\delta_v = \pm 5°\;5'\;45''.6$. Oni odgovaraju položajima na planetinoj putanji, čiji radijivektor iznose $r = b = 2.3523$.

184 ~~189.~~ Produženi radiji OQ i SP (v. sl. 107), što odgovaraju ekscentričnoj anomaliji E i pravoj anomaliji v, odredjuju svojim presekom tačku G. Zadatkom se traži da se odredi geometrijsko mesto tih tačaka preseka.

Sa slike vidimo da iz trougla OSG imamo, ako veliku poluosu elipse označimo sa a, a duž SG sa ρ

$$\frac{a\sin\varphi}{\rho} = \sin(v-E)\operatorname{cosec}E = \sin v \operatorname{ctg}E - \cos v.$$

Unesemo li ovamo poznate veličine,

$$\sin E = \frac{r}{a}\sec\varphi \sin v, \qquad \cos E = \left(1-\frac{r}{a}\right)\operatorname{cosec}\varphi,$$

imaćemo

$$\frac{a\sin\varphi}{\rho} = \sin v\left(1-\frac{r}{a}\right)\operatorname{cosec}\varphi\,\frac{a}{r}\operatorname{cosec}v\cos\varphi - \cos v,$$

to jest, pošto skratimo i uredimo,

$$\frac{a\sin\varphi}{\rho} = \frac{a}{r}\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi - \cos v.$$

Сл. 107

Medjutim je

$$\frac{a}{r} = \frac{1+\sin\varphi\cos v}{\cos^2\varphi},$$

i, ako smenimo, imaćemo

$$\frac{a\sin\varphi}{\rho} = \frac{1-\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos v\,(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$= \left[\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\cos v\right]\sec\varphi.$$

Odavde dobivamo

$$\rho = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\cos v}.$$

Sažetije može se ovaj izraz napisati

$$\rho = \frac{a\cos\varphi}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos v}.$$

Vidimo, ujedno — ako primetimo da je ugao φ uvek manji od 90° (dok se P nalazi na elipsi), dakle $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ manje od 1 — da je geometrijsko mesto tačaka G opet elipsa, (istom žižom i) sa velikom poluosom a.

185 ~~190~~ Prema zadatku, prvi satelit (Eksplorer VI) prolazio je u perigeju na visini od 244 km nad Zemljinom površinom, znači na 6622 km od Zemljina središta (jer uzimamo da je Zemlja sfera). Njegov perigejski radijevektor iznosio je, dakle,

$$a(1-e) = 6622 \text{ km},$$

a apogejski je iznosio, prema zadatku,

$$a(1+e) = 48\,202 \text{ km}.$$

Iz ovih dveju jednačina nalazimo:

za veliku poluosu, za ekscentričnost } satelitove putanje: { $a = 27\,824\,km = 2.7824 \times 10^9\,cm$, $e = 0.7584$.

Trajanje satelitova obilaska (T) oko Zemlje odredićemo pomoću trećeg Keplerova zakona,

$$\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 (M + m),$$

gde je sa M označena Zemljina, a sa $\underline{m}$ satelitova masa. No ovu možemo zanemariti u odnosu prema Zemljinoj, što znači da ćemo za gornji izraz imati

$$\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 M.$$

Iz pregleda konstanata (v. str.) uzimamo

$$k^2 = 6.67 \times 10^{-8}, \quad i \quad M = 5.978 \times 10^{27}\,g,$$

$$4\pi^2 = 39.478\,416, \quad \frac{k^2}{4\pi^2} M = 1.010\,002 \times 10^{19}.$$

Prema tome će biti

$$k^2 M = 6.67 \times 5.978 \times 10^{19} = 39.873\,260 \times 10^{19}.$$

Kako je

$$a^3 = 21.540\,644 \times 10^{27},$$

dobivamo

$$T^2 = \frac{2.154\,0644 \times 10^{28}}{1.010\,0015 \times 10^{19}} = 2.132\,7338 \times 10^9,$$

to jest za trajanje jednog satelitova obilaska oko Zemlje nalazimo

$$T = 46\,166^s = 12^h\,48^m\,36^s.$$

Drugi satelit, prema zadatku, imao je istu perigejsku daljinu; znači, ako sa $\underline{a}$ označimo veliku poluosu, a sa $\underline{e}$ ekscentričnost njegove geocentrične putanje, biće

$$a(1-e) = 6622\,km,$$

a za apegejsku daljinu imamo, prema zadatku

$$a(1+e) = 384\,400\,km.$$

Iz ovih jednačina nalazimo

$\underline{a} = 195511$ km, $\underline{a} = 1.955\,110 \times 10^{10}$ cm. i e = 0.9917.

Kako je $a^3 = 7.473\,320 \times 10^{30}$, a $\frac{k^2}{4\pi^2} M = 1.010\,0015 \times 10^{19}$,

nalazimo

$T^2 = 7.399\,316 \times 10^{11}$, to jest $\underline{T} = 860\,193^s$ ~~$= 238^h\,56^m\,33^s$~~

$$= 9^d\,22^h\,56^m\,33^s.$$

Vidimo, dakle, da je trajanje obilaska drugog satelita oko devetnaest puta duže od trajanja prvog.

186 ~~191.~~ ~~Pokazati da se [illegible] anomalija menja proporcionalno vremenu ako se zanemare drugi i viši stepeni ekscentričnosti planetske putanje.~~

U Pregledu obrazaca (v.str.) nalazimo obrazac

$$\cos w = (\cos E + e)(1 + e\cos E)^{-1}.$$

Ako obe strane te jednačine dignemo na kvadrat i oduzmemo od 1, dobivamo, pošto svedemo,

$$\sin^2 w = (1-e^2)\sin^2 E\,(1+e\cos E)^{-2},$$

to jest

$$\sin w = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin E\,(1+e\cos E)^{-1}.$$

Diferenciramo li po E, imaćemo

$$\cos w\,\frac{dw}{dE} = \left[(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos E\,(1+e\cos E) + e(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin^2 E\right](1+e\cos E)^{-2}.$$

Smenom vrednosti cos w na levoj i potrebnim svodjenjem na desnoj strani odavde dobivamo

$$(\cos E + e)(1+e\cos E)^{-1}\frac{dw}{dE} = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}(\cos E + e)(1+e\cos E)^{-2},$$

odnosno

$$\frac{dw}{dE} = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1+e\cos E)^{-1}.$$

A ako primetimo da je

$$dE = dM\,(1-e\cos E)^{-1},$$

dobivamo da je

$$\frac{dw}{dM} = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 E)^{-1}.$$

Razvijemo li oba činioca na desnoj strani, imaćemo

$$dw = \left(1-\tfrac{1}{2}e^2 - \cdots\cdots\right)\left(1+e^2\cos^2 E + \cdots\cdots\right)dM.$$

Izvršimo li množenje na desnoj strani i zanemarimo li druge i više stepene ekscentričnosti, nalazimo

$$dw = dM, \quad q.e.d.$$

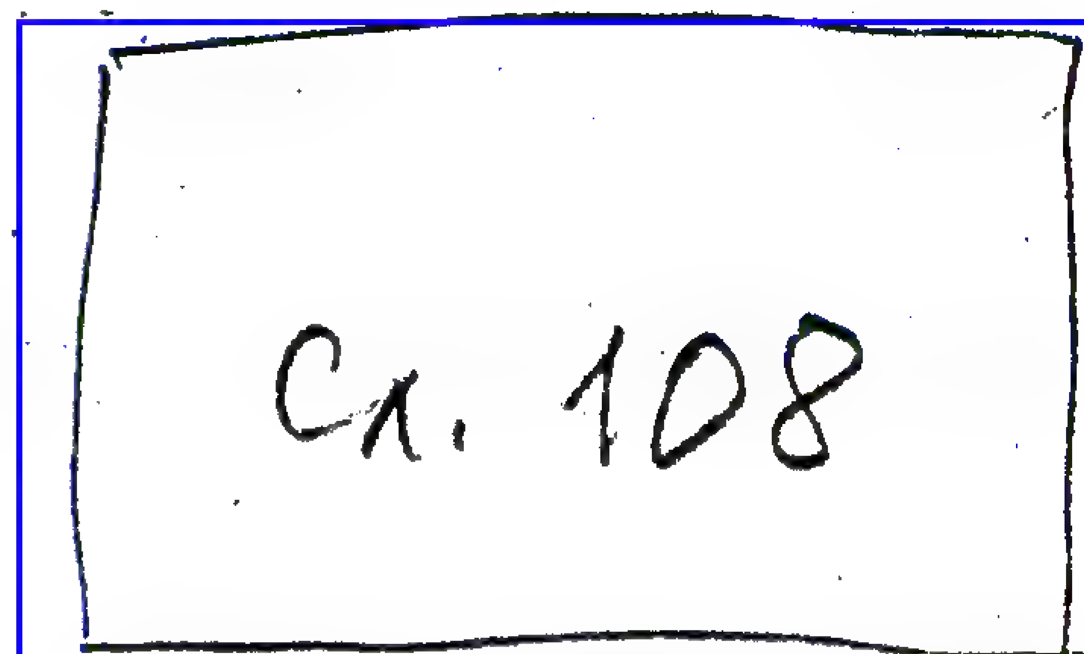
187 ~~192.~~ Neka na sl. 108 prikazana kriva, u pravouglom koordinatnom sistemu OXY, predstavlja sinusoidu y = sin x. Kroz tačku na apscisi x = OJ = M — označavajući sa M srednju anomaliju planete — povucimo pravu

pod uglom sa pozitivnim delom apscisne ose χ = arcctg e, odnosno ctgχ = e, odnosno tgχ = $\frac{1}{e}$. Ova prava seče sinusoidu u tački, recimo, L, kojoj — prema zadatku — odgovara apscisa OK = E, gde E označava ekscentričnu anomaliju.

Ako primetimo da iz pravouglog trougla JKL sleduje

$$KL = JK\, tg\chi,$$

to jest, ako izvršimo zamenu,



$$\sin E = (OK - OJ)\, tg\chi,$$

odnosno

$$\sin E = (E - M)\frac{1}{e},$$

to jest

$$M = E - e\sin E.$$

Tako vidimo da se postavljeni zadatak svodio, u stvari, na proveravanje tačnosti jedne od poznatih grafičkih metoda za rešavanje Keplerove jednačine. Metoda se, prema tome, svodi na ovaj postupak.

Da bi se grafički odredila ekscentrična anomalija (E), kad su date srednja anomalija (M) i ekscentričnost (e) putanje, konstruiše se, u pravouglom koordinatnom sistemu OXY, jednom za svagda, sinusoida (v. sl.108). Zatim se na apscisnoj osi — koja treba da je izdeljena u stepene ($0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \ldots, 180^\circ$) — nanese data vrednost srednje anomalije M = OJ. Kroz tako dobivenu tačku, J, pravom (ili samo prislonjenim lenjirom) pod uglom χ sa apscisnom osom, odredi se tačka, L, njena preseka sa sinusoidom i, iz te tačke preseka, spusti ordinata LK. Apscisa tačke preseka L, dakle OK, predstavlja traženu vrednost ekscentrične anomalije, E, koja odgovara datim vrednostima M i e.

Na sl.108 je ovom metodom odredjena vrednost ekscentrične anomalije za M = 70° i e = 0.3. Vidimo da je grafički nadjena vrednost E nešto veća od 87°; računom se dobiva E = 87°10'.

Izmedju sinusoide i Y-ose vidimo na slici pravougli trougao OA1 sa izdeljenom osnovom (A,1). Ovaj trougao služi da omogući konstrukciju ugla χ = arcctge. Ako primetimo da je ugao NOA = 90° − χ, vidimo da je AN = e = ctgχ. Znači, prema tome, pošto na osnovu A1 nanesemo duž AN = e, ostaje samo da iz tačke J pravom (ili lenjirom) paralelnom sa ON (na slici JL||ON) odredimo tačku njena preseka sa sinusoidom.

VII Сунчево привидно ~~годишње~~ кретање

(188) (~~193.~~) На сл. 109 и 110 представљени су са P_n и P_s небески полови; са $Q_n \gamma Q_s$ небески екватор; са γ пролетња еквиноксијска тачка; са Π_n и Π_s еклиптички полови. Стрелицама су означени смерови у којима се, у сваком од ових координатних система, рачунају координате тачака. Према томе ћемо имати –

сл. 109 сл. 110

екваторске координате еклиптичких полова:

северног: $\alpha_n = 270° = 18^h$, $\delta_n = 90° - \varepsilon$;

јужног: $\alpha_s = 90° = 6^h$, $\delta_s = -(90° - \varepsilon)$;

еклиптичке координате небеских полова:

северног: $\lambda_n = 90°$, $\beta_n = 90° - \varepsilon$;

јужног: $\lambda_s = 270°$, $\beta_s = -(90° - \varepsilon)$.

(189) (~~194.~~) Једине тачке на небеској сфери које имају деклинације једнаке латитудама, а ректасцензије лонгитудама јесу еквиноксијске тачке: пролећна, чије су координате $\delta = \beta = 0°$, $\alpha = \lambda = 0°$, и јесења, чије су координате $\delta = \beta = 0°$, $\alpha = \lambda = 180°$.

(190) (~~195.~~) На сл. 111 представљен је случај тачке (Σ) на небеској сфери, чија је ректасцензија, $\gamma A = \alpha$, једнака њеној латитуди, $L\Sigma = \beta$.

Ако спојимо, луком великог круга, тачке γ и Σ и приметимо да смо тако добили два правоугла сферна троугла, $\gamma A \Sigma$ и $\gamma L \Sigma$, које карактеришу: заједничка хипотенуза, $\gamma\Sigma$, и, према задатку, једнаке катете, $\gamma A = L\Sigma$. Како од координата тачке Σ које једна другој одговарају – деклинација и латитуда, по апсолутној вредности, не премашују $\frac{1}{2}\pi$, а ректасцензија и лонгитуда увек истом квадранту припадају, морају у нашим правоуглим сферним троуглима и друге две катете, $A\Sigma$ и $\gamma\Sigma$, бити међу собом једнаке.

Ово следује и из другог обрасца Гаусове групе образаца за прелаз са координата једног на координате другог од поменутих система,

$$\cos\delta \cos\alpha = \cos\beta \cos\lambda .$$

Сл. 111

Ако у овај образац унесемо услов из задатка, да је $\alpha=\beta$, добивамо, пошто скратимо, уз већ учињену напомену, да је доиста, у том случају, деклинација тачке Z једнака њеној лонгитуди.

(191) (~~196.~~) Сунчева ректасцензија, у току године, не мења се униформно, али се може узети да се просечно увећава, приближно, по један степен за 24 часа; односно, пошто се ректасцензије изражавају у временским јединицама, може се узети да се Сунчева ректасцензија увећава, приближно, по четири минуте дневно. А рачунају се од пролећне еквинокцијске тачке, или такозване γ-тачке, у директном смеру, то јест од тренутка пролаза средишта Сунчева привидног диска кроз екваторску раван, који пада око 21 марта.

На исти начин рачунају се, само у угловним јединицама, и Сунчеве лонгитуде.

Према томе, ће, за тражене датуме, приближне вредности Сунчевих ректасцензија бити:

11 марта: $24^h - (10 \times 4^m) = 23^h 20^m \; [23^h 23^m]$; или $360° - 10 \times 1° = 350°$;

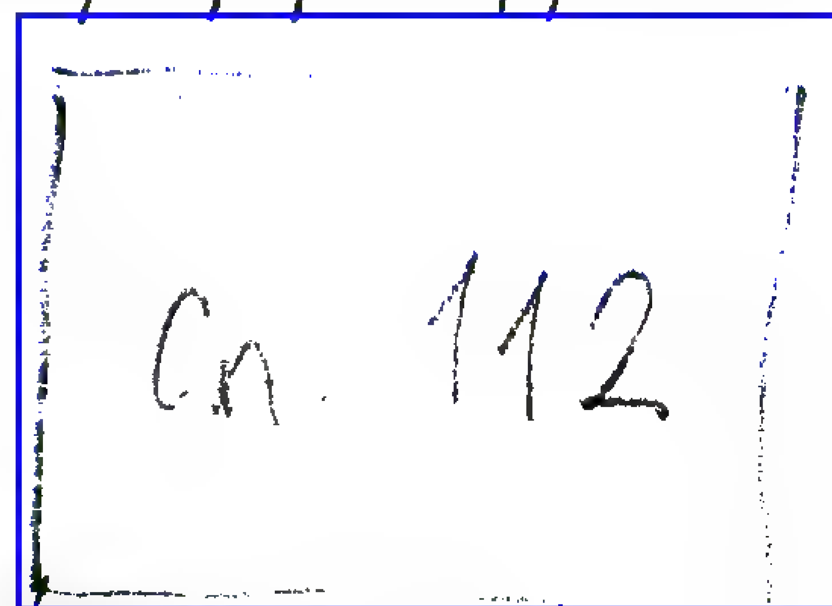
(2) 2 августа: $0^h + (134 \times 4^m) = 8^h 56^m \; [8^h 47^m]$; или $134°$;

19 јануара: $24^h - (61 \times 4^m) = 19^h 56^m \; [20^h 2^m]$; или $360° -$ ~~61~~ $= 299°$.

У заградама су дате тачне Сунчеве ректасцензије за сваки датум.

(192) (~~197.~~) Према задатку, Сунце 31 марта пролази кроз посматрачев зенит. Значи да је Сунчева деклинација, у том тренутку, једнака посматрачевој географској ширини. У Годишњаку нашег неба налазимо да је 31 марта, у подне, Сунчева деклинација износила (приближно) $+4°$. Према томе, посматрачева географска ширина је $+4°$.

(193) (~~198.~~) Сл. 112 представља пројекцију небеске сфере на меридијанску раван посматрача у Београду. На њој су представљени са:



Z – посматрачев (O) зенит;

P_n и P_s – северни и јужни небески пол;

$H_n H_s$ – пројекција посматрачева хоризонта;

$H_s Z P_n H_n$ – посматрачева видљива половина небеске сфере;

$E_1 E_2$ – пројекција небеског екватора;

$\widehat{H_n O P_n} = \widehat{E_1 O Z} = \varphi = +44°48'$ – географска ширина места (Београда);

S_nE_s — еклиптика;
$\widehat{E_1OS_n} = \varepsilon = 23°27'$ — нагиб еклиптике према екватору;
S_nE_n — најсевернији } небески паралел који
S_sE_s — најјужнији } Сунце привидно описује.

Кад Сунце, у току године, доспе до најсевернијег паралела — а доспева око 22 јуна — његова деклинација износи $\widehat{E_1OS_n} = \delta_n = \varepsilon = 23°27'$. До најјужнијег паралела доспева око 22 децембра, и тада његова деклинација износи $\widehat{E_1OS_s} = \delta_s = -\varepsilon = -23°27'$.

Сунчеве екстремне висине, дакле меридијанске, тих датума, износе, према томе, у Београду:

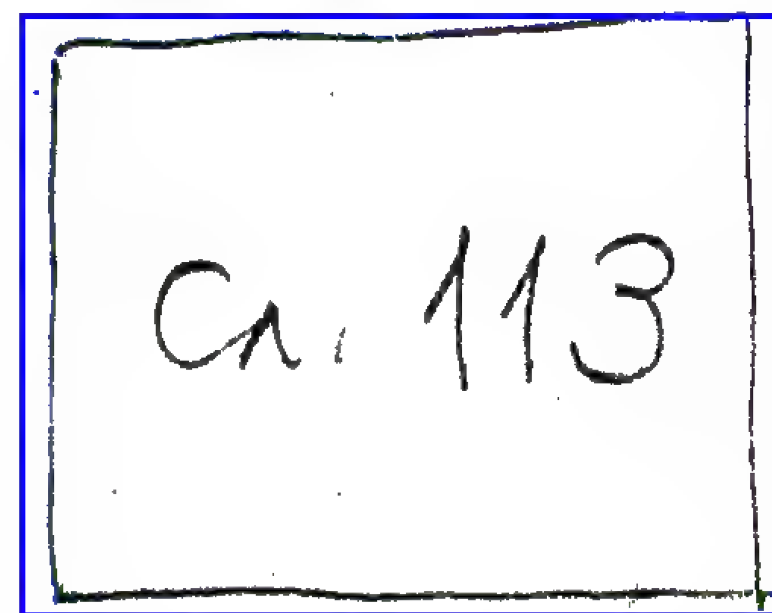
22 јуна: $\widehat{H_sOS_n} = \widehat{H_sOE_1} + \widehat{E_1OS_n} = 90° - \varphi + \varepsilon = 45°12' + 23°27' = 68°39'$;

22 децембра: $\widehat{H_sOS_s} = \widehat{H_sOE_1} - \widehat{S_sOE_1} = 90° - \varphi - \varepsilon = 45°12' - 23°27' = 21°45'$.

Екстремне вредности зенитских даљина које, тих датума, достиже Сунце у Београду износе:

најмања $z_n = \varphi - \varepsilon$, највећа $z_s = \varphi + \varepsilon$.

(194) (~~199~~) Сл. 113 представља пројекцију небеске сфере на посматрачеву меридијанску раван. На њој су представљени са:



P_nP_s — светска оса;
E_1E_2 — (пројекција) небеског екватора;
E_nE_s — (пројекција) еклиптике;
OZ — посматрачева вертикала;
Z — посматрачев зенит, који се, према задатку налази 20° јужно од екватора;
H_nH_s — (пројекција) посматрачевог хоризонта, чија се северна тачка (H_n) налази од екватора на $\widehat{H_nOE_1} = 90° - \widehat{E_1OZ} = 70°$.

Сунце, према задатку, заузима положај одређен деклинацијом (δ) +18°. На слици је Сунце представљено, у том положају, словом Σ. Пречником S_1S_2 представљен је, према томе, паралел који Сунце тога дана описује, у току свог привидног дневног кретања. Тачка S_1 представља Сунчев положај у тренутку његовог пролаза кроз посматрачев меридијан. У том тренутку и положају његова висина је

$$h = \widehat{H_nOE_1} - \widehat{S_1OE_1} = 70° - 18° = 52°.$$

Датуми пролаза на тој висини могу бити: или 12 мај или 2 август.

(195) (~~200~~) За одређивање еклиптичких координата кад су дати нагиб ек—

матике и екваторске координате тачке на небеској сфери имамо Гаусову групу образаца

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha,$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha,$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha.$$

Увођењем помоћних величина m и M, дефинисаних релацијама

$$m\sin M = \sin\delta,$$
$$m\cos M = \cos\delta\sin\alpha,$$

своди се горња група образаца на облик погодан за логаритамски рачун,

$$\sin\beta = m\sin(M-\varepsilon),$$
$$\cos\beta\sin\lambda = m\cos(M-\varepsilon),$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha.$$

Тачност резултата ћемо проверити помоћу обрасца $tg\frac{1}{2}(\delta-\beta) = tg\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\sec\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)$.

С обзиром на степен тачности (0".1) датих података, радићемо са логаритмима од седам децимала, и имаћемо:

α =	$5^h\,13^m\,21^s.96$,
=	$78°\,20'\,29''.4$,
δ =	+45 57 19.4,
ε =	23 27 8.3;
$[\sin\delta]$	9.856 6073,
$[\sin\alpha]$	9.990 9466,
$[\cos\delta]$	9.842 1211,
$[m\cos M]$	9.833 0677,
$[tg M]$	0.023 5396,
M =	$46°\,33'\,7''.2$,
ε =	23 27 8.3
$M-\varepsilon$ =	23 5 58.9,
$[\cos M]$	9.837 3965,
$[m]$	9.995 6712;

$[\cos\delta]$	9.842 1211,
$[\cos\alpha]$	9.305 5190,
$[\sin(M-\varepsilon)]$	9.593 6539,
$[m]$	9.995 6712,
$[\cos(M-\varepsilon)]$	9.963 7046,
$[\cos\beta\sin\lambda]$	9.959 3758,
$[\cos\beta\cos\lambda]$	9.147 6401,
$[tg\lambda]$	0.811 7357,
λ =	$81°\,13'\,49''.6$,
$[\sin\lambda]$	9.994 8930,
$[\sin\beta]$	9.589 3251,
$[\cos\beta]$	9.964 4828,
$[tg\beta]$	9.624 8423,
β =	$+22°\,51'\,27''.1$;

$\frac{1}{2}\varepsilon$ =	$11°\,43'\,34''.15$,
$\delta-\beta$ =	23 6 4.2,
$\frac{1}{2}(\delta-\beta)$ =	11 33 2.1,
$\lambda+\alpha$ =	159 34 19.0,
$\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$ =	79 47 9.5,
$\lambda-\alpha$ =	2 53 20.2,
$\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)$ =	1 26 40.1;
$[tg\frac{1}{2}\varepsilon]$	9.317 1565,
$[\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)]$	9.993 0623,
$[\sec\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)]$	0.000 1380,
$\Sigma=[tg\frac{1}{2}(\delta-\beta)]$	9.310 3568,
$[tg\frac{1}{2}(\delta-\beta)]$	9.310 3567.

196 ~~201~~. Вредности излазне (а тако исто и залазне) амплитуде једнаке су нули кад тело излази у источној ($A = 270°$) тачки хоризонта. У овој тачки Сунце излази 21 марта и 23 септембра, то јест у дане еквинокција (равнодневица, пролећне и јесење), кад му је деклинација једнака нули. Другим речима, за Сунце кажемо да се тога датума (у ствари само тренутак) налази у равни небеског екватора. Према томе, кроз меридијан места Сунце тог дана пролази

на зенитској даљини $z = \varphi$. То је, уједно, и најмања вредност Сунчеве зенитске даљине коју оно тог дана достиже. А највеће вредности зенитске даљине, $z = 90°$, (ако дејство рефракције не узимамо у обзир), достиже Сунце у тренуцима излаза и залаза. Према томе екстремне вредности Сунчевих зенитских даљина у Београду су, овиx датума: $z_{\odot} = 44°48'$ и $z_{\pi} = 90°$.

(197) (~~202.~~) Северни еклиптички пол од северног небеског пола налази се на поларној даљини једнакој нагибу еклиптике према небеском екватору, $\varepsilon = 23°27'$. У току привидног дневног кретања небеске сфере пол еклиптике описује, према томе, небески паралел деклинације једнаке $90° - \varepsilon = 66°33'$. Значи да северни еклиптички пол може проћи кроз зенит оних само тачака на Земљиној површини које су распоређене дуж Земљина паралела географске ширине $\varphi = 90° - \varepsilon$.

У тренутку кад се пол еклиптике нађе у посматрачеву зениту, еклиптичка раван се поклапа са равни посматрачева хоризонта. Према томе, латитуда тачке на небеској сфери одговараће висини те тачке над посматрачевим хоризонтом, и обратно. Значи биће $h = \beta$.

За одређивање друге координате пројицирајмо (в. сл. 114) видљиву половину небеске сфере на посматрачеву хоризонтску раван, а, у овом случају је то, уједно, и еклиптичка раван. На пројекцији су означени са:

- Z и Π — посматрачев зенит, који је, у исти мах, и пол еклиптике;
- P_n — северни небески пол;
- S — јужна тачка посматрачева хоризонта;
- PZS — посматрачев меридијан;
- E и γ — источна тачка посматрачева хоризонта, која се, у овом случају, поклапа са пролетњом еквинокцијском тачком (γ);
- Σ — некретница, на небеској сфери, са координатама (λ, β).

Сл. 114

Са слике се види да је у представљеном случају:

$\widehat{SZV} = A$, $\gamma \Pi V = \lambda$, што јести $A + \lambda = 270°$, дакле $A = 270° - \lambda$.

(198) (~~203~~) Представимо, на сл. 115, кругом са средиштем у S Сунчев привидни диск са пречником $A_1A_2 = 2R$; O нека представља посматрача на Земљиној површини, на удаљењу од Сунца $OS = r$. Он Сунчев пречник види под углом $\widehat{A_1OA_2} = D$, који зовемо Сунчевим привидним пречником.

Са слике видимо да из правоуглог троугла OSA_2 имамо

$$SA_2 = SO \, tg \tfrac{1}{2} D,$$

односно, са уведеним ознакама,

$$R = r\,tg\tfrac{1}{2}D.$$

Угао D износи око пола степена. Значи, на десној страни ове једначине, можемо tg заменити углом (у радијанима). Тако добијамо

$$2R = rD.$$

Означимо сад Сунчеве привидне пречнике, као и његова удаљења, у перигеју и апогеју: са D_p, D_a, односно r_p, r_a. Ако напишемо последњу једначину за сваки од тих положаја, па из добијених једначина елиминишемо R, добићемо

$$r_p D_p = r_a D_a.$$

Изразимо ли ова удаљења помоћу велике полуосе и ексцентричности Земљине хелиоцентричне путање, имаћемо

$$a(1-e)D_p = a(1+e)D_a,$$

а одавде налазимо

$$e = \frac{D_p - D_a}{D_p + D_a}.$$

Унесемо ли, на десној страни, вредности Сунчевих привидних пречника, како су дате у задатку, добијамо

$$e = \frac{1956-1892}{3848} = \frac{64}{3848} = \frac{8}{481} \approx \frac{1}{60} \quad q.e.d.$$

(199) ~~(204)~~ 21 марта је датум пролаза средишта Сунчева привидног диска кроз екваторску раван: кроз пролетњу еквинокцијску тачку, од које се рачунају ректасцензије тачака на небеској сфери. Према томе, тог дана можемо ректасцензије тачака на небеској сфери рачунати од Сунчева средишта. Како тог дана Сунце залази у западној тачки хоризонта, значи на часовном углу 6^h, оно ће се око 1^h после залаза, налазити на часовном углу 7^h. Значи да тог тренутка, од његова пролаза кроз посматрачев меридијан, протекло је 7^h.

А рачунамо ли тај исти угао од Сунца, то јест (у овом случају) од пролетње еквинокцијске тачке, у директном смеру (супротном смеру рачунања часовног угла), његова вредност (7^h) представљаће — ректасцензију тачке (звезде) на небеској сфери. У сваком случају из реченога излази да се 21 марта, 1 час по Сунчеву залазу, звезда ректасцензије $\alpha = 7^h$ налази у посматрачеву меридијану. То значи да јој је азимут, у том тренутку, $A = 0°$. Како јој је, према задатку, деклинација $\delta = +34°48'$, а посматрачева географска ширина је $\varphi = +44°48'$, висина звезде је, у истом тренутку, $h = 90° - \varphi + \delta = 90° - 44°48' + 34°48' = 80°$.

(200) ~~205.~~ На сл. 116 представљен је положај γ-тачке, у тренутку кад се налази на висини $h = Q\gamma$, и нацртан је сферни троугао $\Pi_n P_n Z_n$ (пол еклиптике – небески пол – зенит), којим ћемо се послужити да одредимо тражени угао, χ $(= QI\gamma)$, између еклиптике, E_nE_s, и посматрачева хоризонта, H_nH_s. (којима ћемо се послужити) Елементи тог сферног троугла су:

$$\Pi_nP_n = \varepsilon, \quad P_nZ_n = 90^\circ - \varphi, \quad \Pi_nZ_n = \chi \quad \text{и угао} \quad WP_n\gamma = WP_nZ_n - \gamma P_nZ_n = 90^\circ - \theta,$$

где је са θ означено посматрачево звездано време. Од ових елемената познати су нам ε и $90^\circ - \varphi$. Сем тога, позната нам је и висина $Q\gamma = h$ γ-тачке. Помоћу познатих елемената можемо, прво, одредити θ, из сферног троугла $\gamma P_n Z_n$. Налазимо

Сл. 116

$$\cos\theta = \sin h \sec\varphi.$$

Тражени нагиб, χ, еклиптике према посматрачеву хоризонту, добивамо, у функцији звезданог времена, из сферног троугла $\Pi_n P_n Z_n$:

$$\cos\chi = \cos\varepsilon \sin\varphi + \cos\varphi \sin\varepsilon \cos(90^\circ + \theta),$$
$$= \cos\varepsilon \sin\varphi - \sin\varepsilon \cos\varphi \sin\theta.$$

Одавде видимо да тај нагиб достиже своје екстремне вредности, то јест –

максимум: $\chi = 90^\circ - (\varphi - \varepsilon)$, за $\theta = 90^\circ = 6^h$;

минимум: $\chi = 90^\circ - (\varphi + \varepsilon)$, за $\theta = 270^\circ = 18^h$.

(201) ~~206.~~ Тражи се, дакле, тренутак у који је вредност Сунчеве ректасцензије била једнака 24^h, односно 0^h. Са подацима задатка оно се може постићи, ако се претпостави да се Сунчева ректасцензија мења пропорционално времену. Из тих података видимо да се од 20 до 21 марта, дакле за 24^h, Сунчева ректасцензија увећа за $0^h 2^m 7^s - 23^h 58^m 29^s = 3^m 38^s = 218^s$. Видимо, исто тако, да, од вредности коју је Сунчева ректасцензија имала 20 марта, до тренутка пролећне равнодневице она треба да се увећа за $24^h - 23^h 58^m 29^s = 1^m 31^s = 91^s$. Према томе, ако временски размак од поменуте ректасцензије, за 20 март, до наиласка пролећне равнодневице означимо са Δt, и још приметимо да је $24^h = 86\,400^s$, – имаћемо

$$\Delta t = \frac{91^s}{218^s} \times 86\,400^s = 36\,066^s = 10^h\, 1^m\, 6^s.$$

Тражени тренутак, пролећне равнодневице, наилази, дакле, $10^h 1^m 6^s$ после Сунчеве горње кулминације код нашег посматрача 20 марта дотичне године.

(202) ~~207.~~ Са подацима задатка треба, дакле, одредити тренутак у који Сунчева деклинација, прелазећи са негативних на позитивне

вредности, прође кроз вредност нулу. Са датим подацима то можемо одредити, ако претпоставимо да се Сунчева деклинација мења пропорционално времену. Из података видимо да се од 20 до 21 марта, дакле за 24^h ($= 86\,400^s$), Сунчева деклинација увећа за $+0°\,3'\,14'' - (-0°\,20'\,45'') = = 0°\,23'\,59'' = 1439''$. Видимо, сем тога, да, од полазне вредности Сунчеве деклинације, за 20 март, до наиласка пролетње равнодневице ($\delta = 0°$), њена вредност треба да се увећа за $20'45'' = 1245''$. Према томе, ако тај временски размак, од полазне деклинације, за 20 март, до наиласка пролетње равнодневице означимо са $\Delta\tau$, имаћемо

$$\Delta\tau = \frac{1245''}{1439''} \times 86\,400^s = 0.86\,518 \times 86400^s = 74\,752^s = 20^h\,45^m\,52^s.$$

Тражени тренутак, пролетње равнодневице, наилази, дакле, $20^h\,45^m\,52^s$ после Сунчеве горње кулминације код нашег посматрача 20 марта дате године.

[Напомињемо да се тренуци пролетњих равнодневица из последњих двају задатака не односе на исту годину.]

(203) (~~208~~) На сл. 117 приказана је пројекција небеске сфере на меридијанску раван посматрача са небеским паралелом $S_s \odot H_n$, одређеним деклинацијом $\delta = +21°16'36''$. Као што се са слике види, Сунце остаје непрекидно над хоризонтом, дакле, уопште не залази,
70 у местима чија географска ширина (φ) није мања од $90° - \delta = 68°43'24''$.
75 А тог дана Сунце непрекидно остаје под хоризонтом, дакле, уопште не излази, у местима чија географска ширина није већа од $-68°43'24''$. Сл. 117

Кроз зенит Сунце тог дана пролази, као што са слике видимо, за сва места дуж Земљина паралела одређена географском ширином $\varphi = \delta = +21°16'36''$.

(204) (~~209~~) У првом вертикалу места географске ширине φ тачка на небеској сфери са деклинацијом δ достиже висину (h) одређену једначином

$$\sin h = \sin\delta \operatorname{cosec}\varphi.$$

Да би небеско тело могло бити видљиво при пролазу кроз први вертикал места, његова висина у том тренутку не сме бити негативна (дејство рефракције занемарујемо).

Како се Сунчеве деклинације у току године крећу између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$,
70 видимо да ће при пролазу кроз први вертикал у Београду Сунце бити видљиво само у размаку од пролетње до јесење равнодневице. И то, у доба, то јест дане, равнодневица Сунце ће се налазити у првом вертикалу у тренутку изласка, односно залаза (ако дејство рефракције занемаримо).

Највећу висину у првом вертикалу достизаће на дан летњег солстиција, то јест кад му деклинација достигне вредност $\varepsilon = +23°\,27'$. Вредност Сунчеве висине у првом вертикалу добићемо из горње релације:

$[\sin\varepsilon]$	9·59 983,
$[\mathrm{cosec}\,\varphi]$	0·15 204,
$[\sin h]$	9·75 187, дакле $h = 34°\,23'\,10''$.

(205) (~~210.~~) На сл. 118 представљени су Сунчеви положаји, S_1 и S_2, којима одговарају дате вредности деклинација, $\textcircled{D}_1 = A_1S_1$ и $\textcircled{D}_2 = A_2S_2$, и дата разлика ректасцензија $\gamma A_2 - \gamma A_1 = \textcircled{R}_2 - \textcircled{R}_1$. Из тако добивена правоугла сферних троуглова, γA_1S_1 и γA_2S_2, имамо

сл. 118

$$\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_1 = \sin\textcircled{R}_1\,\mathrm{tg}\,\varepsilon,$$
$$\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_2 = \sin\textcircled{R}_2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

Дељењем друге једначине првом добивамо

$$\frac{\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_2}{\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_1} = \frac{\sin\textcircled{R}_2}{\sin\textcircled{R}_1}, \text{ што даје } \frac{\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_2 + \mathrm{tg}\,\textcircled{D}_1}{\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_2 - \mathrm{tg}\,\textcircled{D}_1} = \frac{\sin\textcircled{R}_2 + \sin\textcircled{R}_1}{\sin\textcircled{R}_2 - \sin\textcircled{R}_1}.$$

Последњу једначину можемо друкчије овако написати

$$\frac{\sin(\textcircled{D}_2+\textcircled{D}_1)\sec\textcircled{D}_2\sec\textcircled{D}_1}{\sin(\textcircled{D}_2-\textcircled{D}_1)\sec\textcircled{D}_2\sec\textcircled{D}_1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)\cos\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)\sin\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1)},$$

то јест

$$\sin(\textcircled{D}_2+\textcircled{D}_1)\,\mathrm{cosec}(\textcircled{D}_2-\textcircled{D}_1) = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1).$$

Одатле добивамо

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1) = \sin(\textcircled{D}_2+\textcircled{D}_1)\,\mathrm{cosec}(\textcircled{D}_2-\textcircled{D}_1)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1),$$

израз који нам омогућује да одредимо $(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)$, јер на десној страни ове једначине познате су нам све величине. А пошто нам је разлика ректасцензија дата у задатку, моћи ћемо одредити и обе ректасцензије, а, затим, из било које од полазних једначина одредити и тражени нагиб еклиптике. Тако ћемо са подацима задатка имати:

$\textcircled{D}_1$	$= +6°\,26'\,40''.0,$	$\textcircled{D}_2-\textcircled{D}_1$	$= 6°\,45'\,40''.0,$
$\textcircled{D}_2$	$= +13\;\;12\;\;20.0,$	$\textcircled{D}_2+\textcircled{D}_1$	$= 19\;\;39\;\;0.0,$
$\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1$	$= 17\;\;39\;\;9.6;$	$\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1)$	$= 8\;\;49\;\;34.8.$

С обзиром на тачност података, радићемо са логаритмима од седам децимала.

$[\sin(\textcircled{D}_2+\textcircled{D}_1)]$	9·526 6927,	$\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)$	$= 23°\,55'\,6''.5,$
$[\mathrm{cosec}(\textcircled{D}_2-\textcircled{D}_1)]$	0·929 1129,	$\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1)$	$= 8\;\;49\;\;34.8,$
$[\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1)]$	9·191 1122,	$\textcircled{R}_1$	$= 15\;\;5\;\;31.7,$
$\Sigma = [\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\textcircled{R}_2+\textcircled{R}_1)]$	9·646 9178,	$\textcircled{R}_2$	$= 32\;\;44\;\;41.3,$
		$\textcircled{R}_2-\textcircled{R}_1$	$= 17\;\;39\;\;9.6.$

Нагиб ћемо, ради контроле рада, израчунати из обе једначине

$[\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_1]$	9.052 8997,	$[\mathrm{tg}\,\textcircled{D}_2]$	9.370 4209,
$[\mathrm{cosec}\,\textcircled{R}_1]$	0.584 4056,	$[\mathrm{cosec}\,\textcircled{R}_2]$	0.266 8844,
$[\mathrm{tg}\,\varepsilon]$	9.637 3053;	$[\mathrm{tg}\,\varepsilon]$	9.637 3053,

$$\varepsilon = 23°\,27'\,7''.1$$

(206) (~~211.~~) Ако представимо, на сл. 119, Сунчев положај на еклиптици са S_1, и образујемо правоугли сферни троугао $\gamma A S_1$, чији су елементи

$$\gamma A = \textcircled{R}, \qquad AS_1 = \textcircled{D}, \qquad \text{угао } A\gamma S_1 = \varepsilon,$$

између њих имамо везу

сл. 119

$$\sin\textcircled{R} = \mathrm{ctg}\,\varepsilon\ \mathrm{tg}\,\textcircled{D}$$

Ако је диференцирамо, водећи рачуна да је ε константно, имаћемо

$$\cos\textcircled{R}\,d\textcircled{R} = \mathrm{ctg}\,\varepsilon\ \sec^2\textcircled{D}\,d\textcircled{D}$$

У доба равнодневица је, у пролетњој, на пр., $\textcircled{R} = 0$, $\textcircled{D} = 0$; сем тога, према подацима задатка, Сунчева деклинација се, у то време, мења за око 1′ на час; значи око 24′ на дан. Према томе, за дневну промену Сунчеве ректасцензије у доба еквинокција добивамо, из горње једначине:

$$d\textcircled{R} = 24'\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon \approx 24' \times 2.3053 \approx 55'.33 \approx 3^m\,41^s.$$

(207) (~~212.~~) Ако представимо, на сл. 120, Сунчев положај на еклиптици са S, образујемо правоугли сферни троугао $\gamma A S$ и приметимо да је

$$\gamma S = \lambda, \qquad \gamma A = \textcircled{R}, \qquad AS = \textcircled{D} \qquad \text{и угао } A\gamma S = \varepsilon,$$

између ових елемената имамо везе

$$\mathrm{tg}\,\textcircled{R} = \cos\varepsilon\ \mathrm{tg}\,\lambda,$$
$$\sin\textcircled{D} = \sin\varepsilon\ \sin\lambda.$$

Ако их диференцирамо, имајући у виду да је нагиб екватора непромењив, добивамо за промене Сунчевих екваторских координата

$$\sec^2\textcircled{R}\,d\textcircled{R} = \cos\varepsilon\ \sec^2\lambda\,d\lambda,$$
$$\cos\textcircled{D}\,d\textcircled{D} = \sin\varepsilon\ \cos\lambda\,d\lambda,$$

сл. 120

а одавде

$$d\textcircled{R} = \cos\varepsilon\ \sec^2\lambda\ \cos^2\textcircled{R}\,d\lambda,$$
$$d\textcircled{D} = \sin\varepsilon\ \cos\lambda\ \sec\textcircled{D}\,d\lambda.$$

Приметимо ли да је, према једном од образаца Гаусове групе,

$$\cos\textcircled{R} = \sec\textcircled{D}\,\cos\lambda,$$

и извршимо ли ову смену у изразу за промену ректасцензије, имаћемо

коначно за (тражене) промене Сунчевих ректасцензија и деклинација.

$$d\text{Ⓡ} = \cos\varepsilon \sec\text{Ⓓ}\, d\Lambda,$$

$$d\text{Ⓓ} = \sin\varepsilon \sec\text{Ⓓ} \cos\Lambda\, d\Lambda.$$

Ако сад приметимо да су у тренуцима:
еквинокција: Ⓓ $= 0°$ и Ⓡ $= \Lambda = 0°$, односно Ⓡ $= \Lambda = 180°$;
солстиција: Ⓓ $= +23°27'$ и Ⓡ $= \Lambda = 90°$, односно Ⓓ $= -23°27'$ и Ⓡ $= \Lambda = 270°$;
као и да је, према подацима задатка, $d\Lambda \approx 1°$ дневно, – из горњих образаца налазимо за промене Сунчевих екваторских коорди- (ната:)
у доба еквинокција: dⓇ $= \cos\varepsilon\, d\Lambda$, dⒹ $= \pm \sin\varepsilon\, d\Lambda$;
у доба солстиција: dⓇ $= \sec\varepsilon\, d\Lambda$, dⒹ $= 0$.
Значи, у доба еквинокција: dⓇ $= 0°.917 \approx 55'$, dⒹ $= \pm 0°.398 \approx 23'.9$, } дневно.
у доба солстиција: dⓇ $= 1°.090 \approx 65'$, dⒹ $= 0$,

(208) (~~213.~~) За решења можемо доћи графички, пројицирајући видљиву небеску сферу на раван посматрачевог меридијана. Нека сл. 121 представља ту раван. Ако са P_n означимо на њој положај северног небеског пола, пречник E_1E_2 представљаће пројекцију екваторске, а пречник E_nE_s пројекцију еклиптичке равни на посматрачеву меридијанску раван. Према подацима задатка познат нам је Сунчев положај на еклиптици: оно се налази на деклинацији Ⓓ $= +20°8'$. У ствари, кроз ову деклинацију Сунце пролази двапут у току исте године: први пут (око 2 јуна) приближујући се летњем солстицију; други пут (око 12 јула) удаљујући се од летњег солстиција. Решење које овде дајемо вреди за било који од ових датума.

Ако са Σ представимо положај Сунца на тој деклинацији, онда (пројекција) небеског паралела S_nS_s, који тој деклинацији одговара, ~~[illegible]~~ представља Сунчеве привидне дневне путање тог дана. А како је раван слике уједно и раван посматрачевог меридијана, S_n представља положај поноћног Сунца за посматрача, уоченог датума. Према задатку, Сунце се у том тренутку налази на висини $h = H_nOS_n = 4°10'$. Значи раван посматрачевог хоризонта налази се на $4°10'$ испод правца поноћног Сунца, OS_n. Према томе је

$$\widehat{H_nOP_n} = \varphi = \widehat{H_nOS_n} + \widehat{S_nOP_n} = 4°10' + 90° - 20°8' = 74°2'.$$

До овог резултата могли смо доћи примећујући да за зениту даљину, односно висину, тела деклинације Ⓓ, на месту географске ширине φ имамо

Сл. 121

$$z = 90° - h = 180° \mp (\varphi + \text{Ⓓ}).$$

И ако у овај израз унесемо податке из задатка, добијамо за тражену географску ширину

(110) $$\varphi = 90° - \delta + h = 90° - 20° 8' + 4° 10' = 74° 2'.$$

209 ~~214.~~ Између нагиба еклиптике (ε) и Сунчеве ректасцензије (R) имамо познату релацију

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon \sin R,$$

где је са δ означена Сунчева деклинација. Ако је логаритмујемо, биће

$$\log\operatorname{tg}\delta = \log\operatorname{tg}\varepsilon + \log\sin R,$$

па диференцирамо, имајући у виду да деклинација остаје, у овом случају, непромењена, добићемо

$$0 = \operatorname{ctg}\varepsilon \sec^2\varepsilon \, d\varepsilon + \cos R \operatorname{cosec} R \, dR,$$

а одавде налазимо

$$\operatorname{tg} R = -\sin\varepsilon\cos\varepsilon \frac{dR}{d\varepsilon}.$$

Пошто нам је нагиб еклиптике познат, а промене (границе грешака) нагиба и ректасцензије дате у задатку, можемо одредити вредност ректасцензије Сунца, што значи и датум, за које дате промене (грешке) вреде. Ако у последњу релацију унесемо вредности познатих величина, налазимо

$\sin\varepsilon = 0.3979,$ $\quad dR = \pm 0^s.02 = \pm 0''.3,$

$\cos\varepsilon = 0.9174,$ $\quad d\varepsilon = \pm 1'';$

$\sin\varepsilon\cos\varepsilon = 0.3649;$ $\quad$ дакле $\operatorname{tg} R = 0.10947$, то јест $R = 6° 17' \approx 0^h 25^m.1$.

Ако узмемо да се Сунчева ректасцензија увећава по 4^m дневно, долазимо до закључка да се одређивање положаја γ-тачке из посматрања Сунчевих ректасцензија, у датим границама, може постићи ако се посматрања обављају по 6 дана пре, односно после, равнодневица.

210 ~~215.~~ Дужине меридијанске сенке вертикалног стуба мењају се, у току дана, са Сунчевом висином, а ова, опет, са Сунчевом деклинацијом, у току године. Сунчева деклинација пролази, у току године, кроз све вредности између $+23° 27'$ и $-23° 27'$. За посматрача на географској ширини φ мењају се, према томе, Сунчеве меридијанске висине, у току године, између:

највеће: $h_n =$ [redacted] $(90° - \varphi) + \varepsilon$,

најмање: $h_s =$ [redacted] $(90° - \varphi) - \varepsilon$.

За посматрача у Београду, чија је географска ширина $\varphi = +44° 48'$, вредности ових висина крећу се између:

највеће: $h_n = 90^\circ - 44^\circ 48' + 23^\circ 27' = 68^\circ 39'$,

најмање: $h_s = 90^\circ - 44^\circ 48' - 23^\circ 27' = 21^\circ 45'$. (дужине l,)

За дужине, D_n и D_s, меридијанских сенки вертикалног стуба, које тим висинама одговарају, налазимо

$$D_n = l\,ctg\,h_n = 4 \times 0{\cdot}39\,m = 1{\cdot}56\,m,$$

$$D_s = l\,ctg\,h_s = 4 \times 2{\cdot}51\,m = 10{\cdot}04\,m.$$

(211) (~~216~~) У решењу задатка ~~199~~ 194 нађено је да Сунчева меридијанска висина, на дан кад му деклинација износи $\delta = +18^\circ$, у местима на географској ширини $\varphi = -20^\circ$, износи $h = 52^\circ$. Према томе ће дужина сенке усправног стуба, висине l, износити у подне поменутог дана (кад је $\delta = +18^\circ$)

$$D = l\,ctg\,h = 25 \times 0{\cdot}781\,m = 19{\cdot}5\,m.$$

(212) (~~217~~) У местима на северној Земљиној хемисфери достиже Сунце своје највеће, односно најмање, висине у тренутку прелаза кроз меридијан на дан летњег, односно зимског, солстиција. Из решења задатка 215. знамо већ и да највећа (h_n), односно најмања (h_s) Сунчева меридијанска висина, у месту на географској ширини φ, износе:

$$h_n = (90^\circ - \varphi) + \varepsilon, \quad \text{односно} \quad h_s = (90^\circ - \varphi) - \varepsilon.$$

Ове висине могу се доста приближно одредити, ако се измере дужине, меридијанских, D_n и D_s, сенки усправног стуба, познате дужине (l). Из већ познатих релација имамо

$$ctg\,h_n = \frac{D_n}{l}, \qquad ctg\,h_s = \frac{D_s}{l}.$$

Ако унесемо у њих вредности података датих у задатку, налазимо

$[D_n]$	1·75 671,	$[ctg\,h_n]$	0·45 568,	$h_n = 19^\circ 18' 1''$,
$[l]$	1·30 103,	$[ctg\,h_s]$	9·64 444;	$h_s = 66\ 12\ 9$.
$[D_s]$	0·94 547;			

Ове вредности за висине омогућују нам да образујемо две једначине, из којих можемо одредити тражене величине: географску ширину места и нагиб еклиптике. Имамо, доиста,

$$\varphi - \varepsilon = 90^\circ - h_n = 70^\circ 41' 59'',$$

$$\varphi + \varepsilon = 90^\circ - h_s = 23\ 47\ 51.$$

Одавде налазимо: $\varphi = +47^\circ 14' 55''$ и $\varepsilon = 23^\circ 27' 4''$.

Овај начин је кинеским астрономима био познат још пре више од бар тридесет векова.

213 (218.) Пошто се места налазе на меридијану Београда, чија нам је географска ширина позната, то — ако претпоставимо да је Земља сфера — помоћу датих удаљења места од Београда, лако ћемо одредити разлике географских ширина тих места и Београда, па, према томе, и њихове географске ширине.

Ако примстимо да су удаљења места од Београда лукови великих кругова на Земљи сфери (полупречника $R = 6372$ km) и означимо их са s, за разлике географских ширина имаћемо:

$$\Delta\varphi = \frac{180^\circ}{\pi}\frac{s}{R} = 57^\circ.29578 \times \frac{55}{6372} = 57^\circ.29578 \times 0.008632 = 0^\circ.49458 = 29'40''.$$

Географске ширине наших места су, према томе,

северније — $\varphi_n = +45^\circ 17' 53''$, јужније — $\varphi_s = +44^\circ 18' 33''$.

За Сунчеве меридијанске висине имамо:

$$h = (90^\circ - \varphi) + \delta_\odot,$$

а за његове деклинације имамо:

у дане еквинокција — $\delta_\odot = 0$;

на дан летњег солстиција — $\delta_\odot = +23^\circ 27'$;

на дан зимског солстиција — $\delta_\odot = -23^\circ 27'$.

Сунчеве меридијанске висине, у ове дане, у Београду су

$$h_e = 90^\circ - 44^\circ 48' = 45^\circ 12';$$
$$h_l = 90^\circ - 44^\circ 48' + 23^\circ 27' = 68^\circ 39';$$
$$h_z = 90^\circ - 44^\circ 48' - 23^\circ 27' = 21^\circ 45'.$$

Дужине (D) меридијанских сенки усправног стуба, дужине $l = 10$ m, биће

$$D_e = l\,\mathrm{ctg}\,h_e, \qquad D_l = l\,\mathrm{ctg}\,h_l, \qquad D_z = l\,\mathrm{ctg}\,h_z,$$

то јест, према горњој релацији, ако деклинацију на дан солстиција означимо са ε,

$$D_e = l\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad D_l = l\,\mathrm{tg}(\varphi - \varepsilon), \qquad D_z = l\,\mathrm{tg}(\varphi + \varepsilon).$$

Тражене разлике у дужинама обију сенки у нашим местима одредићемо из:

$$\Delta D_e = l(\mathrm{tg}\,\varphi_n - \mathrm{tg}\,\varphi_s), \qquad \Delta D_l = l[\mathrm{tg}(\varphi_n - \varepsilon) - \mathrm{tg}(\varphi_s - \varepsilon)], \qquad \Delta D_z = l[\mathrm{tg}(\varphi_n + \varepsilon) - \mathrm{tg}(\varphi_s + \varepsilon)].$$

Разлике тангенса, на десним странама, можемо — као што знамо — написати у облику погоднијем за примену логаритама

$$\Delta D_e = l \sin(\varphi_n - \varphi_s) \sec\varphi_n \sec\varphi_s,$$
$$\Delta D_l = l \sin(\varphi_n - \varphi_s) \sec(\varphi_n - \varepsilon) \sec(\varphi_s - \varepsilon),$$
$$\Delta D_z = l \sin(\varphi_n - \varphi_s) \sec(\varphi_n + \varepsilon) \sec(\varphi_s + \varepsilon).$$

Са подацима из задатка и израчунатим величинама биће:

$\varphi_n = +45^\circ 17' 53''$, $\quad \varphi_n = +45^\circ 18'$, $\quad \varphi_n - \varepsilon = 21^\circ 51'$, $\quad \varphi_n + \varepsilon = 68^\circ 45'$,

$\varphi_s = +44\ 18\ 33$, $\quad \varepsilon = 23\ 27$, $\quad \varphi_s - \varepsilon = 20\ 52$, $\quad \varphi_s + \varepsilon = 67\ 46$,

$\varphi_n - \varphi_s = 0^\circ 59' 20''$; $\quad \varphi_s = +44\ 19$;

29)

$[\sin(\varphi_n-\varphi_s)]$	8.23 701,	$[\sin(\varphi_n-\varphi_s)]$	8.23 701,	$[\sin(\varphi_n-\varphi_s)]$	8.23 701,
$[\sec\varphi_n]$	0.15 278,	$[\sec(\varphi_n-\varepsilon)]$	0.03 237,	$[\sec(\varphi_n+\varepsilon)]$	0.44 078,
$[\sec\varphi_s]$	0.14 534,	$[\sec(\varphi_s-\varepsilon)]$	0.03 240,	$[\sec(\varphi_n+\varepsilon)]$	0.42 197,
$\Sigma =$	8.53 513,	$\Sigma =$	8.30 178,	$\Sigma =$	9.09 976,
$[l]$	1.00 000;	$[l]$	1.00 000;	$[l]$	1.00 000;
$\Delta D_e =$	0.34 m;	$\Delta D_z =$	0.20 m;	$\Delta D_z =$	1.26 m.

214 (~~219.~~) У месту географске ширине φ Сунчева меридијанска висина, на дан летњег солстиција (ако дејство рефракције занемаримо) има вредност

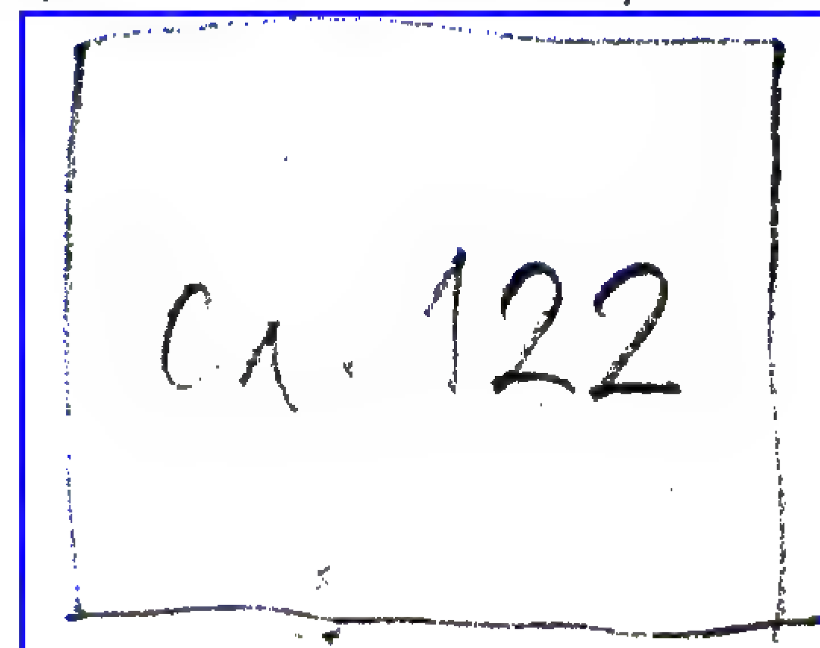
$$h = (90-\varphi)+\varepsilon.$$

Ако је меридијанска дужина сенке усправног стуба једнака висини самог стуба, Сунчева меридијанска висина је онда $h = 45°$. Из горње релације закључујемо да је географска ширина места

$$\varphi = +45°+\varepsilon = +68°\,27'.$$

Са сл. 122, која представља пројекцију посматрачеве видљиве небеске сфере на његову меридијанску раван, видимо да Сунце тог дана, услед свог привидног дневног кретања, описује небески паралел (чија је пројекција овде представљена) тетивом S_nS_s. Положај Сунца у поноћ представљен је, дакле, тачком S_n. Сунчеву висину, у том тренутку, налазимо, ако приметимо да је

$$\widehat{H_nOP_n} = \varphi = \widehat{H_nOS_n} + \widehat{S_nOP_n} = h + 90° - \varepsilon .$$


Сл. 122

2x 1/2

Одавде налазимо

$$\underline{h} = \varphi+\varepsilon-90° = 68°27' + 23°27' - 90° = \underline{1°\,54'}.$$

215 (~~220.~~) Ако је φ географска ширина места, на којем је измерена дужина (D) меридијанске сенке усправне облике, дужине l, а h Сунчева меридијанска висина, онда је

$$D = l\,\mathrm{ctg}\,h, \qquad \text{где је } h = (90°-\varphi)+(\delta).$$

Из прве од ових релација налазимо $\mathrm{ctg}\,h = 1.2$, што јест $h = 39°\,17'.4$ (величине). Ако диференцирамо горње релације, водећи рачуна да су l и (δ) константе имаћемо

$$dD = -l\,\mathrm{cosec}^2 h\,dh \quad \text{и} \quad dh = -d\varphi.$$

Из ових добивамо

$$d\varphi = \frac{dD}{l}\sin^2 h.$$

И, ако на десној страни унесемо вредности које су сад познате,

$$\sin h \approx 0.633, \quad \sin^2 h \approx 0.401; \quad \frac{dD}{l} = 0.0056,$$

добивамо

$$\underline{d\varphi} \approx \pm 0.0056 \times 0.401 \times 3437'.75 = \underline{\pm 7'.7}.$$

Видимо, дакле, да се мерењем дужине меридијанске сенке усправне (зарезане) оловке, дужине познате са тачношћу од 1 mm, може географска ширина места одредити са тачношћу од око осам минута [Напомињемо да при томе није узимано у обзир дејство рефракције].

(216) (221) Послужићемо се пројекцијом небеске сфере на посматрачеву меридијанску раван (в. сл. 123). Привидни дневни лук Сунчев оног дана кад је оно достигло деклинацију (D) представићемо тетивом S_sS_n. И видимо да оно тог дана остаје свих 24^h над хоризонтом места чије географске ширине нису мање од поларне даљине Сунчеве, другим речима за која је

$$\varphi \geq 90^\circ - D$$

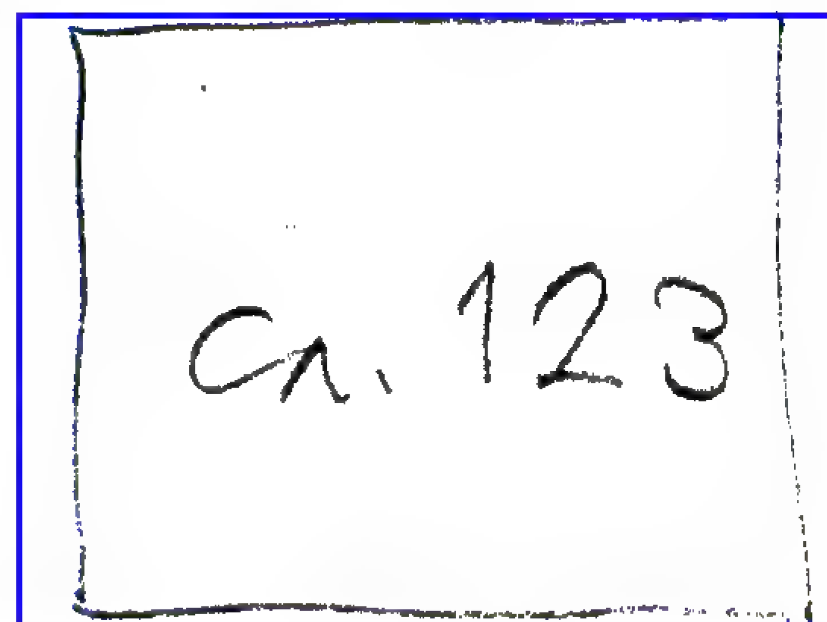
Део Земљине површине чије тачке овај услов задовољавају представљен је на слици сферном капом $Z_1P_nZ_s$, висине $QP_n = h_n$. Ако ту површину означимо са p_h, она износи

$$p_h = 2\pi R h_n,$$

где је са R означен полупречник Земљине сфере. Са слике видимо, међутим, да је

$$h_n = P_nO - QO = R - R\cos D = R(1-\cos D) = 2R\sin^2\tfrac{1}{2}D$$

Како је површина (P_σ) Земљине сфере



$$P_\sigma = 4\pi R^2,$$

за тражени однос ових двеју површина имаћемо:

$$\frac{p_h}{P_\sigma} = \frac{2\pi R \cdot 2R\sin^2\frac{1}{2}D}{4\pi R^2} = \sin^2\tfrac{1}{2}D$$

За исто толики део, p_h, површине око јужног Земљина пола, Сунце тог дана, кад његова деклинација достигне вредност D, остаје свих 24^h невидљиво, то јест под хоризонтом места. За преостали део Земљине површине, што значи

$$4\pi R^2 - 8\pi R^2\sin^2\tfrac{1}{2}D = 4\pi R^2(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}D) = 4\pi R^2\cos D,$$

Сунце тога (дана) један део свог привидног дневног пута проводи над, други део под хоризонтом места.

Тачно 12^h остаје над хоризонтом само у местима дуж Земљина екватора [при том рефракција није узимана у обзир].

(217) (222) Астрономски сумрак траје целу ноћ у месту географске ширине φ, ако ни у тренутку доње Сунчеве кулминације, дакле у поноћ, његова висина под хоризонтом места није већа од 18°, или његова зенитска да-

њина није већа од 108°.

На сл. 124, која представља пројекцију небеске сфере на посматрачеву меридијанску раван, представљен је са S_n Сунчев положај, на паралелу ($S_s S_n$) одређеном деклинацијом $\delta = +14°$, у тренутку његове доње кулминације. Из података који одређују тај положај, лако се може одредити географска ширина места. Са сл.. видимо да је

$$\widehat{E_2OS_n} + \widehat{S_nOH_n} + \widehat{H_nOP_n} = 14° + 18° + \varphi = 90°,$$

и тако налазимо $\varphi = +58°$.

Непосредније смо до решења могли доћи помоћу познатог обрасца који одређује трајање астрономског сумрака,

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H.$$

Сл. 124

Ако у овај унесемо услове задатка,

$$z = 90° + 18 = 108° \quad и \quad H = 12^h,$$

добивамо

$$\cos 108° = -\sin 18° = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta = -\cos(\varphi + \delta),$$

односно, ако га напишемо,

$$-\cos 72° = -\cos(\varphi + \delta),$$

и приметимо да је $\delta = +14°$, налазимо, као и графичком методом,

$$\varphi = +58°.$$

(218) ~~(223.)~~ Тражену вредност деклинације ћемо наћи из обрасца за трајање обданице, то јест временског размака који протекне од тренутка кад, при излазу, горњи руб Сунчева кружног диска додирне хоризонт места, па до тренутка кад, при залазу, горњи руб Сунчева кружног диска додирне хоризонт места. При том треба још у обзир узети и дејство рефракције. У хоризонту се узима за то дејство $R = 35'$.

Из дефиниције обданице видимо да је њено трајање одређено положајем Сунчева руба, јер обданица почиње чим се први Сунчев зрак појави на хоризонту места. А Сунчев положај на небеској сфери одређујемо — као што знамо — положајем његова средишта. Стога, дакле, морамо узети у обзир да се Сунчево средиште, у тренутку кад његов горњи руб додирне раван хоризонта места, налази за полупречник ($r_0 = 16'$) његова кружног диска испод хоризонта.

Ако на сл. 125 представимо са H_1H_2 пројекцију равни хоризонта места, онда круг са средиштем S представља шематски положај Сунчева средишта у тренутку излаза. А оно се налази, у том тренутку, на $35' + 16' = 51'$ испод
($R + r_0 =$)

хоризонта, што значи на зенитској даљини $z = 90°51'$. Ако Сунчев часовни (излаза) угао по реду половину трајања обданице, означимо са H, имаћемо

$$\cos 90°51' = -\sin 51' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H.$$

сл. 125

Према задатку је $\varphi = +44°48'$, $2H = 12^h$, дакле $H = 6^h = 90°$.
Тако да ћемо имати

$$\sin\delta = -\sin 51' \operatorname{cosec} 44°48' = -0.01483 \times 1.4192 = -0.02105,$$

$$\delta \approx 1° 12'.$$

(219) ~~224.~~ Ако се занемари дејство атмосфере на правац зрака, као и промена Сунчеве деклинације од тренутка његова излаза до залаза, и означи са H Сунчев часовни угао у тренутку излаза, вредност тог угла је

$$H = \arccos(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta),$$

где φ представља географску ширину места, а δ Сунчеву деклинацију у тренутку излаза. Трајање обданице износи онда $2H$. А трајање обноћнице, тог датума и на том месту, $24^h - 2H$. За однос (ω) ових трајања налазимо

$$\omega = \frac{H}{12^h - H} = \frac{\arccos(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta)}{12^h - \arccos(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta)}.$$

стр. 136. куцана

---

(220) ~~225.~~ Ако занемаримо промену Сунчеве деклинације од тренутка излаза до тренутка залаза, за половину трајања обданице, у месту географске ширине φ, оног датума кад је Сунчева деклинација имала вредност δ, имамо израз

$$\cos 90°51' = -\sin 51' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H.$$

У овом изразу познате су нам географске ширине места и (из Т.н.н. за 13 14^h, $\delta = +23°10'$,) деклинација Сунца, према томе можемо се њиме послужити за одређивање вредности часовног угла, у ствари трајања (полу)обданице. Како су подаци задатка ограничене тачности, рачун ћемо изводити помоћу последњег обрасца,

$$\cos H = -(\sin 51' + \sin\varphi\sin\delta)\sec\varphi\sec\delta.$$

$\sin 51' = 0.01483$, $\sin\varphi_1 = 0.70463$, $\sin\varphi_2 = 0.65650$,
$\sin\delta = 0.39341$, $\sec\varphi_1 = 1.40930$; $\sec\varphi_2 = 1.32568$;
$\sec\delta = 1.08771$;

$\sin\varphi_1 \sin\delta = 0.27721$, $\Sigma(I) = -0.29204$, $\sec\varphi_1 \sec\delta = -1.53291$,
$\sin\varphi_2 \sin\delta = 0.25821$; $\Sigma(II) = -0.27306$; $\sec\varphi_2 \sec\delta = -1.44196$;

$\cos H_1 = -0.44767$, $H_1 = 116°35'39'' = 7^h 46^m.4$, $H_1 - H_2 = 13^m.6$,
$\cos H_2 = -0.39376$; $H_2 = 113\ 11\ 20 = 7\ 32.8$, $2(H_1 - H_2) = 27.2$.

Разлика, дакле, између трајања обданица, 13 јуна (1962), у Београду и Битољу износи нешто више од 27^m!

(221) ~~(226.)~~ Из претходног задатка, односно његова решења познат нам је већ израз за одређивање трајања обданице, ако су нам познате величине φ и δ,

$$-\sin 51' = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H.$$

Задатак тражи да се одреде промене у трајању обданице услед промена Сунчеве деклинације. Зато, диференцирајмо горњи израз сматрајући φ као непромењиво. Имаћемо

$$0 = (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos H)d\delta - \cos\varphi\cos\delta\sin H\,dH.$$

Одавде налазимо за промену у трајању обданице у функцији промене Сунчеве деклинације

$$dH = \operatorname{cosec}H(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos H)d\delta$$

Приметимо ли, међутим, да је

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta,$$

и извршимо ли замену у другом члану, у загради, имаћемо за промену

$$dH = \operatorname{cosec}H\operatorname{tg}\varphi(1+\operatorname{tg}^2\delta)d\delta = \operatorname{cosec}H\operatorname{tg}\varphi\sec^2\delta\, d\delta,$$

односно,

$$dH = \operatorname{tg}\varphi\sec^2\delta(1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta)^{-\frac{1}{2}}d\delta.$$

Десну страну можемо свести на облик погодан за логаритамски рачун, ако приметимо да је

$$1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta = (\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta)(\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta)\sec^2\varphi\sec^2\delta,$$

што јест да је

$$1-\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2\delta = \cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)\sec^2\varphi\sec^2\delta.$$

У том случају добивамо за промену трајања обданице (у ствари половину трајања)

$$dH = \sin\varphi\sec\delta[\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)]^{-\frac{1}{2}}d\delta$$

У задатку су тражене вредности ових промена, за географску ширину Београда, у дане почетака свакога од четири годишња доба. Промене су, другим речима, тражене за:

$$\varphi = +44^\circ 48' \text{ и } \delta_1 = 0,\ d\delta = +24';\quad \delta_{2,4} = \pm 23^\circ 27',\ d\delta = 0;\quad \delta_3 = 0,\ d\delta = -24'.$$

Како је у солстицијима (22 јуна и 22 децембра) $d\delta = 0$, трајања обданица се тих датума не мењају. За промене трајања обданица у дане еквинокција, имамо

$$dH = \operatorname{tg}\varphi\, d\delta \text{ или, у временским секундама, } dH^s = \frac{d\delta''}{15}\operatorname{tg}\varphi.$$

Према томе, налазимо за Београд:

$[d☊]$	3.15 836,	$[dH^s]$	1.97 924,
$[15]$	1.17 609,		$dH^s \approx 95^s = 1^m 35^s$;
$\Delta =$	1.98 227,		
$[tg\varphi]$	9.99 697;		

Према томе промена износи, за дан пролетње равнодневице $+3^m 10^s$, за дан јесење равнодневице $-3^m 10^s$.

Ако отворимо Г. к. к. видећемо да се, заиста, у дане равнодневице трајања обданица продужују, односно скраћују, за нешто више од 3^m дневно.

222 (227.) Пошто су дате екваторске координате пола равни Млечног пута, можемо израчунати њихове еклиптичке координате, помоћу Гаусове групе образаца. Ако са (A, D) означимо екваторске, а са (λ, β) еклиптичке координате пола равни Млечног пута, имаћемо:

$$\cos\beta \sin\lambda = \sin D \sin\varepsilon + \cos D \cos\varepsilon \sin A,$$
$$\cos\beta \cos\lambda = \cos D \cos A,$$
$$\sin\beta = \sin D \cos\varepsilon - \cos D \sin\varepsilon \sin A.$$

Из прва два, делећи, налазимо

$$tg\,\lambda = tg\,D \sin\varepsilon \sec A + \cos\varepsilon\, tg\,A,$$

израз из којега можемо израчунати лонгитуду пола. Добивамо:

$[tg\,D]$	9.70 717,	$[\cos\varepsilon]$	9.96 256,	$N_I + N_{II} = -0.01\,230$,
$[\sin\varepsilon]$	9.59 983,	$[tg\,A]$	9.32 747,	$\lambda = 179°\,42'$.
$[\sec A]$	0.00 960n,	Z_{II}	9.29 003,	
$Z_I =$	9.31 660n,	N_{II}	0.19 500;	
$N_I =$	−0.20 730;			

За одређивање тренутака Сунчева пролаза кроз раван Млечног пута латитуду не морамо ни израчунавати. Заиста, са познавањем и само лонгитуде пола равни Млечног пута можемо одредити лонгитуде тачака пресека еклиптике и (великог круга) Млечног пута, такозваних „чворова" Млечног пута. За лонгитуду узлазног чвора (☊), то јест оне од двеју тачака пресека кроз коју Млечни пут прелази са јужне на северну страну еклиптике, налазимо

$$☊ = \lambda + 90° = 269°\,42', \text{ приближно, дакле, } 270°;$$

за лонгитуду силазног чвора (☋), налазимо

$$☋ = ☊ + 180° = \lambda - 90° = 89°\,42', \text{ приближно } 90°.$$

Из ових резултата видимо да Сунце кроз раван Млечног пута пролази у дане солстиција; и то, кроз узлазни чвор — на дан зимског, кроз силазни чвор — на дан летњег солстиција.

223 (228.) Астрономи старог века, па, дакле, и Птолемеј, знали су за гномон и служили су се њиме, али га — како изгледа — нису искоришћавали за непосредна одређивања висинâ пола тачака на Земљи. То сведочи и једно поглавље у Птолемејеву Алмагесту, у којем излаже како се из трајања најдуже обданице у години — што су називали клима — одређује висина пола, то јест географска ширина места, и обратно. А, затим, у истој глави, објашњава како се могу, помоћу најдуже обданице, дакле познате климе, и висине пола неког места израчунати дужина меридијанске гномонове сенке и обрнуто. Тако треба и разумети овај задатак, којим се тражи да се, полазећи од измерених клима за Сиракузу и Атину, и Сунчеве деклинације у доба солстиција, одреде висине полова тих градова.

Нама су географске ширине тих градова, данас, тачно познате, тако да ћемо бити у стању и да проверимо резултате до којих је Птолемеј дошао, а покушаћемо и да објаснимо њихова одступања од стварних вредности тражених величина.

Са подацима задатка, то јест трајањима најдужих обданицâ у години, у Сиракузи и Атини, и нагибом еклиптике — што значи Сунчевом деклинацијом тога дана — могу се израчунати тражене географске ширине. Претпоставићемо — што и вероватно изгледа — да је почетак обданице и Птолемеј рачунао од тренутка појаве на хоризонту (одн. ишчезавања) горњег руба Сунчева привидног кружног диска. Значи да треба сматрати као да су, у вредностима које даје за трајања обданица, садржана и дејства рефракције и положај средишта Сунчева диска при изласку (одн. заласку). Другим речима, за одређивање географских ширина, морамо применити образац

$$-\sin 51' = \sin\varphi\sin\varepsilon + \cos\varphi\cos\varepsilon\cos H_z,$$

где H_z означава половину трајања најдуже обданице. Уводећи параметара m и M, дефинисаних помоћу израза

$$m\sin M = \sin\varepsilon$$

$$m\cos M = \cos\varepsilon\cos H_z,$$

из којих изводимо

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg}\varepsilon\sec H_z \qquad и \qquad m = \sin\varepsilon\operatorname{cosec} M, —$$

за одређивање географских ширина добивамо израз

$$\cos(\varphi - M) = -\frac{\sin 51'}{m}.$$

Са подацима којима располажемо имаћемо, према томе:

$[\sec H'_z]$	0.49 290 n,	$[\operatorname{cosec} M_1]$	0.09 213,	$\varphi_1 - M_1 =$	91° 42'.0,
$[\operatorname{tg} \varepsilon]$	9.64 552,	$[\sin \varepsilon]$	9.60 675,	$\varphi_2 - M_2 =$	91° 40'.7,
$[\sec H''_z]$	0.47 650 n,	$[\operatorname{cosec} M_2]$	0.09 843,		
$[\operatorname{tg} M_1]$	0.13 842 n,	$[m_1]$	9.69 888,	$\varphi_1 =$	+37° 43'.8,
$[\operatorname{tg} M_2]$	0.12 202 n;	$[\sin 51']$	8.17 128 n,	$\varphi_2 =$	+38 44.4,
$M_1 =$	126° 1' 50",	$[m_2]$	9.70 478,		
$M_2 =$	127 3 42";	$[\cos(\varphi_1 - M_1)]$	8.47 240 n,	$\Delta\varphi_1 =$	−0° 39'.8,
		$[\cos(\varphi_2 - M_2)]$	8.46 650 n;	$\Delta\varphi_2 =$	−0 46'.4,

јер данас знамо да су тачне вредности географских ширина:

Сиракузе $\varphi_1 = +37° 4'$, Атине $\varphi_2 = +37° 58'$.

Птолемеј је, међутим, са истим подацима, за географске ширине ових градова нашао:

за Сиракузу $\varphi_1 = +36° 1'$, за Атину $\varphi_2 = +37° 3'$.

Птолемејеве вредности разликују се од горе добијених за:

$$\Delta\varphi'_1 = +1° 42'.8 \quad и \quad \Delta\varphi'_2 = +1° 41'.4.$$

Приближна једнакост ових разлика указује на вероватност да је узрок ових одступања – систематског карактера. Но не може се рећи лежи ли у рачунском или посматрачком поступку.

Како су нам познате тражене географске ширине, пак можемо и природно је да покушамо да упоредимо вредности стварних часовних углова, то јест трајања најдужих обданица у овим градовима, са Птолемејевим вредностима тих величина.

Са данашњим вредностима географских ширина ових градова и вредношћу Сунчеве деклинације из Птолемејева времена, дакле:

$$\varphi_1 = +37° 4', \quad \varphi_2 = +37° 58', \quad Ⓓ = \varepsilon = +23° 51',$$

тачне вредности најдужих полудневних лукова добићемо из обрасца

$$\cos H_0 = -(\sin 51' + \sin\varphi \sin\varepsilon) \sec\varphi \sec\varepsilon.$$

Према томе ће бити:

$\sin\varphi_1 = 0.60\,274$,	$\sin\varphi_2 = 0.61\,520$,	$\sin Ⓓ = 0.40\,434$,
$\sec\varphi_1 = 1.25\,324$,	$\sec\varphi_2 = 1.26\,844$,	$\sec Ⓓ = 1.09\,337$;
$\sin\varphi_1 \sin Ⓓ = 0.24\,371$,	$\sin 51' + \sin\varphi_1 \sin Ⓓ = +0.25\,824$,	$\sec\varphi_1 \sec Ⓓ = 1.37\,026$,
$\sin\varphi_2 \sin Ⓓ = 0.24\,875$;	$\sin 51' + \sin\varphi_2 \sin Ⓓ = +0.26\,358$;	$\sec\varphi_2 \sec Ⓓ = 1.38\,687$;

$\cos H_1 = -0.35\,427$,	$H_1 = 110° 44' 56'' = 7^h 23^m.0$,	$2H_1 = 14^h 46^m.0$,
$\cos H_2 = -0.36\,555$;	$H_2 = 111\ 26\ 30 = 7\ 25.8$;	$2H_2 = 14\ 51.6$.

Птолемејева трајања обданица су – као што видимо – ~~дужа~~ за по читавих 16^m краћа од тачних трајања!

Оволика одступања није лако објаснити, кад се ништа (поуздано и) (и временски познати ...) ближе не зна

За мерење времена до Птолемеја, а и у његово време, искоришћавала су два начина, према добу дана и дужини размака које је требало измерити: Сунчани часовници – за дуже размаке – и пешчани и водени часовници – за краће временске размаке и у току ноћи. Помоћу Сунчаних часовника (гномона) време је одређивано из промена праваца и дужинâ сенки, махом, на хоризонталној равни. Тачност, међутим, одређивања праваца није била висока. Грешке од 1°–2° (па и веће) лако су чињене. Те грешке, опет, утичу на изведену вредност часовног угла. Њихово дејство можемо одредити из познатог синусног обрасца за положајни сферни троугао,

$$\sin H \cos \delta = \sin A \sin z.$$

Ако овај прво логаритмујемо, па затим диференцирамо, налазимо

$$\operatorname{ctg} H \, dH = \operatorname{ctg} A \, dA.$$

Одавде добијамо за грешку часовног угла у функцији грешке азимута

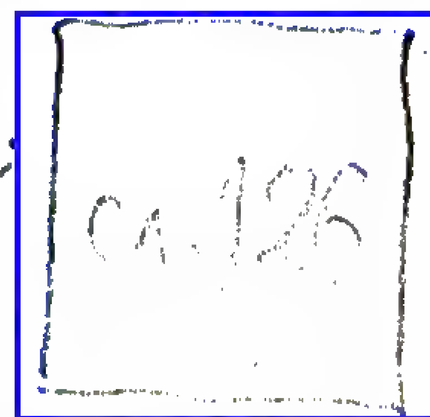
$$dH = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} H \, dA.$$

Применимо ли ову релацију на вредности Птолемејевих трајања обданица у Сиракузи и Атини, на дан летњег солстиција, имаћемо

	Сиракуза	Атина
$\operatorname{tg} H$:	-2.6395,	-2.5452,
$\operatorname{ctg} A$:	-0.5875,	-0.5973,
dH:	$1.55\, dA$;	$1.52\, dA$.

Видимо, дакле, да грешка од, рецимо, 1°5 у азимуту правца гномонове сенке може, у овом случају, за собом повући, у часовном углу излаза (залаза), значи и трајању обданице, грешку од: $2 \times 1.5 \times 1.5 = 4°5 \approx 18^m$, а то је вредност реда величине нађене разлике (од 16^m).

(224) ~~(229)~~ На сл. 126, која представља шематски изглед небеске сфере са хоризонтом посматрача О, уцртани су и означени са:



- P_nP_s – светска оса, са северним и јужним небеским половима;
- OZ_n – правац посматрачеве вертикале, са зенитом;
- H_nH_s – пројекција посматрачевог хоризонта;
- E_1E_2 – тачке пресека небеског екватора и посматрачевог меридијана;
- $S_nI_ES_sI_W$ – паралел деклинације δ који Сунце тог дана привидно описује (оборен на раван посматрачевог меридијана);
- I_E – тачка Сунчевог излаза тог дана;
- I_W – тачка Сунчевог залаза тог дана;
- C – пројекција северног небеског пола на раван паралела.

Са сл. видимо да над хоризонтом места Сунце тог дана описује лук $I_ES_sI_W$, а под хоризонтом лук $I_WS_nI_E$. Каже се да, у том случају, или тог дана, Сунчев привидни дневни лук износи $2I_ECS_s$.

Да бисмо могли графички одредити трајање обданице према трајању обданице тога дана, за посматрача на географској ширини, испомоћи ћемо се сл. 127, која представља небеску сферу пројицирану на посматрачеву меридијанску раван. Но са једном допуном. Небески паралел $S_nI_ES_sI_WS_n$, са сл. ..., чија је пројекција на сл. 126 представљена дужином S_nS_s, на овој слици још оборен на посматрачеву меридијанску раван (обрнут за 90° око свог пречника S_nS_s). Тако је добивена кружна линија $S_sI_ES_nI_W$. Но овај, као што видимо, лук $I_ES_sI_W$ представља за посматрача видљиви, или надхоризонтски, део, а лук $I_WS_nI_E$ невидљиви, или

подхоризонтски, део Сунчева привидног дневног пута тог дана.

Видимо и да првом луку, то јест трајању обданице одговара часовни угао $I_E\widehat{C}I_W = 2I_E\widehat{C}S_s$; другом, то јест трајању обноћнице, одговара часовни угао $I_E\widehat{C}I_W = 2\widehat{I_E C S_n} = 2(180° - I_E\widehat{C}S_s)$.

Означимо са τ Сунчев полудневни лук, то јест часовни угао излаза, дакле $\tau = S_s\widehat{C}I_E$. Онда је

$$\tau = 180° - I_E\widehat{C}S_n = 180° - \sigma,$$

ако са σ означимо полуноћни лук. Са слике, даље, имамо

Сл. 127

$$\cos\sigma = \frac{CI}{CI_E} = \frac{CI}{CS_s} = \frac{OC\,\mathrm{tg}\,I\widehat{O}C}{OC\,\mathrm{tg}\,S_s\widehat{O}C} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}(90° - \delta)} = \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

Према томе, за τ долазимо до познатог израза

$$\cos\tau = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

односно

$$\tau = \arccos(-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta).$$

Трајање обданице износи, дакле, 2τ, а обноћнице 2σ. За однос, који ћемо означити са ω, налазимо

$$\omega = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\arccos(-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta)}{12^h - \arccos(-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta)},$$

вредност до које смо другим путем дошли у решењу задатка 224.

225 (~~230~~) Поћи ћемо од израза за депресију хоризонта (в.   ),

$$\Delta = \sqrt{\frac{5h}{3R}},$$

где R представља полупречник Земљине сфере, а h висину посматрача изражену у метрима. Према задатку је $h = \frac{R}{3200}$, тако да ћемо за депресију у лучним минутама имати

$$\Delta\,\mathrm{arc}\,1' = \left(\frac{5R}{3\times 3200R}\right)^{\frac{1}{2}} = (1920)^{-\frac{1}{2}}.$$

С друге стране, за промену зенитске даљине имамо, из одговарајућег сферног троугла,

$$dz = \cos\varphi \sin A\,dt.$$

Одавде налазимо, за време у току којега се та промена изврши,

$$dt = \sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,A\,dz.$$

Како се задатак односи на тренутак излаза на дан равнодневице, то је $A = 270°$, тако да за трајање добијамо

$$dt = -\sec\varphi\,dz.$$

Ако сад унесемо, место dz, горњу вредност депресије, изражену у лучним минутама, имаћемо

$$dt = -(1920)^{-\frac{1}{2}} \sec\varphi \, \frac{180 \times 60'}{15\pi},$$

то јест
$$dt = -0.02282 \times 1.4093 \times 229.183 \approx -7^s.4.$$

Одговор је, дакле, изаћи ће за посматрача на висини за $7^s.4$ раније него за онога на површини Земље.

226 ~~231~~ У решењима задатака ~~224~~ 219 и ~~229~~ 224 нађен израз за однос обданице (τ) према обноћници (σ), који треба, према задатку, да буде једнак m, дакле

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\arccos(-tg\varphi\, tg\delta)}{180^\circ - \arccos(-tg\varphi\, tg\delta)} = m.$$

Значи

$$\arccos(-tg\varphi\, tg\delta) = m \times 180^\circ - m \arccos(-tg\varphi\, tg\delta),$$

односно

$$(1+m)\arccos(-tg\varphi\, tg\delta) = m \times 180^\circ,$$

то јест

$$-tg\varphi\, tg\delta = \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

Одавде добивамо

$$tg\varphi = -ctg\delta \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

Дакле, за тражену географску ширину на дан летњег солстиција, то јест за $\delta = +23^\circ 27'$, имамо израз

(сл. 128, 1-5)

$$tg\varphi = -2.3053 \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right).$$

Дискусија. 1) Ако је $m = 0$, значи и $\tau = 0$, тога дана, на дотичном месту, нема обданице, што значи да Сунце целог тог дана остаје под хоризонтом места, за које је

$$tg\varphi = -2.3053, \quad \text{што значи} \quad \varphi = -66^\circ 33';$$

дакле за места што леже на јужном поларном кругу.

2) Ако је $0 < m < 1$, значи $\tau < \sigma$, то јест трајање обданице је краће од трајања обноћнице на том месту. Како је, у том случају,

$$\frac{m}{1+m} \times 180^\circ < \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ, \quad \text{то је} \quad \cos\left(\frac{m}{1+m} \times 180^\circ\right) > 0,$$

то налазимо

$$tg\varphi < 0, \quad \text{значи} \quad -66^\circ 33' < \varphi < 0^\circ.$$

Сл. 128 1-3

Другим речима, видимо да је обданица краћа од обноћнице у свим местима на појасу од јужног поларног круга до екватора.

3) Ако је $m = 1$, значи $\tau = \sigma$, трајања обданице и обноћнице су тог датума једнака,

$$\cos\frac{m}{1+m} \times 180^\circ = \cos 90^\circ = 0, \quad tg\varphi = 0, \quad \text{дакле } \varphi = 0^\circ.$$

сл. 128
4–5

значи, места се налазе дуж Земљина екватора.

4) $1 < m < \infty$, значи $\tau > 6$: трајање обданице је дуже од трајања обноћнице;

$$\cos\frac{m}{1+m}\times 180^\circ < 0, \qquad tg\varphi > 0, \qquad \text{дакле } 0 < \varphi < +66^\circ 33',$$

што ће рећи, у местима на површини између Земљина екватора и северног поларног круга.

5) $m \to \infty$, значи $\sigma = 0$; $\cos\frac{m}{1+m}\times 180^\circ \to -1$, $tg\varphi = 2\cdot 3053$, $\varphi = +66^\circ 33'$, то јест у местима на поларном кругу Сунце остаје целог тог дана над хоризонтом.

227 ~~232~~ На сл. 129 представљена су два места на истом Земљину паралелу тачкама A и B. Повучен је и велики круг чија је сферна даљина ($p = P_N Q$) од пола P_N једнака Сунчевој деклинацији тог дана; дакле, $p = \delta$.

Ови елементи одређују на слици два правоугла сферна троугла: AQP_N и BQP_N. Ако разлику у географској дужини места A и B означимо са L, а географску ширину паралела на којем се налазе места A и B са φ, из левог сферног троугла имамо

сл. 129

$$\cos\tfrac{1}{2}L = tg\,p\; tg\varphi .$$

Како је $p = \delta$,

$$\cos\tfrac{1}{2}L = tg\,\delta\; tg\varphi .$$

С друге стране, ако трајање обданице означимо са 2τ, имамо

$$\cos\tau = -tg\,\delta\; tg\varphi .$$

Из ове две једначине добивамо

$$\cos\tfrac{1}{2}L = \cos(12^h - \tau),$$

дакле

$$\tfrac{1}{2}L = 12^h - \tau,$$

односно

$$L = 24^h - 2\tau .$$

На десној страни имамо вредност трајања обноћнице, а на левој разлику у географским дужинама места A и B.

228 ~~233~~ Први начин) Ако занемаримо дејство рефракције, за часовни угао (H) Сунца у тренутку излаза, у месту географске ширине φ, на дан кад је Сунчева деклинација δ, имамо

$$\cos H = -tg\varphi\; tg\,\delta .$$

За Сунчев азимут, у том тренутку, имамо из поларног сферног троугла

$$\sin A = \sin H \cos\delta ,$$

$$\cos A = -\sec\varphi \sin\delta .$$

Диференцирајмо сад први и трећи од ових образаца, сматрајући географску ширину за непроменљиву, и имамо

$$-\sin H\,dH = -tg\varphi \sec^2\delta\, d\delta,$$
$$-\sin A\, dA = -\sec\varphi \cos\delta\, d\delta.$$

Из њих налазимо

$$d\delta = \sin H\, ctg\varphi \cos^2\delta\, dH, \qquad (1)$$
$$d\delta = \sin A \cos\varphi \sec\delta\, dA.$$

А како из положајног сферног троугла, у овом случају ($z=90°$), имамо

$$\sin A = \sin H \cos\delta,$$

то други од горњих образаца можемо написати

$$d\delta = \sin H \cos\varphi\, dA.$$

Изједначавањем са (1) добивамо

$$\sin H\, ctg\varphi \cos^2\delta\, dH = \sin H \cos\varphi\, dA.$$

И тако налазимо за разлику у Сунчеву азимуту

$$dA = \cos^2\delta\, cosec\varphi\, dH.$$

Како је, према задатку, $dH = 15m$,
имамо за разлику у азимуту

$$\Delta A' = 15m \cos^2\delta\, cosec\varphi.$$

Други начин. Ако је Сунце излазило другог дана m минута касније, значи да је тог дана, у тренутку излаза, његов часовни угао био m минута већи. На слици 130 видимо то и приказано: $dH = m = I_2P_nI_1$. Како је, према задатку, Сунчева деклинација била δ, у том тренутку, то је лук паралела

$$I_1K = m\cos\delta.$$

С друге стране, из малог правоуглог троугла на сфери I_1KI_2 имамо, ако угао I_2I_1K означимо са ψ,

$$I_1K = m\cos\delta = I_1I_2\cos\psi.$$

Како је, међутим, угао ψ једнак паралактичком углу q, а за овај угао имамо, из положајног сферног троугла, у овом случају ($z=90°$),

$$\cos q = \sin\varphi \sec\delta,$$

Сл. 130

добивамо да је

$$I_1I_2 = m\cos^2\delta\, cosec\varphi,$$

односно, изражено у лучним минутама, добивамо за разлику у азимуту

$$I_1I_2 = \Delta A' = 15m\cos^2\delta\, cosec\varphi.$$

229 (234.) За одређивање висине (h) тела, деклинације (δ), у првом верти-

калу места географске ширине φ имамо образац

$$\sin h = \sin \delta \operatorname{cosec} \varphi .$$

У правоуглом сферном троуглу ΥAS, чији су елементи $\Upsilon S = \Lambda$, $SA = \delta$ и угао $A\Upsilon S = \varepsilon$, имамо образац

$$\sin \Lambda = \sin \delta \operatorname{cosec} \varepsilon .$$

Заменимо ли, на десној страни, $\sin \delta$ из горњег обрасца, имаћемо

$$\sin \Lambda = \sin h \sin \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon ,$$

а одавде добивамо

$$\sin \varphi = \sin \Lambda \sin \varepsilon \operatorname{cosec} h ,$$

односно

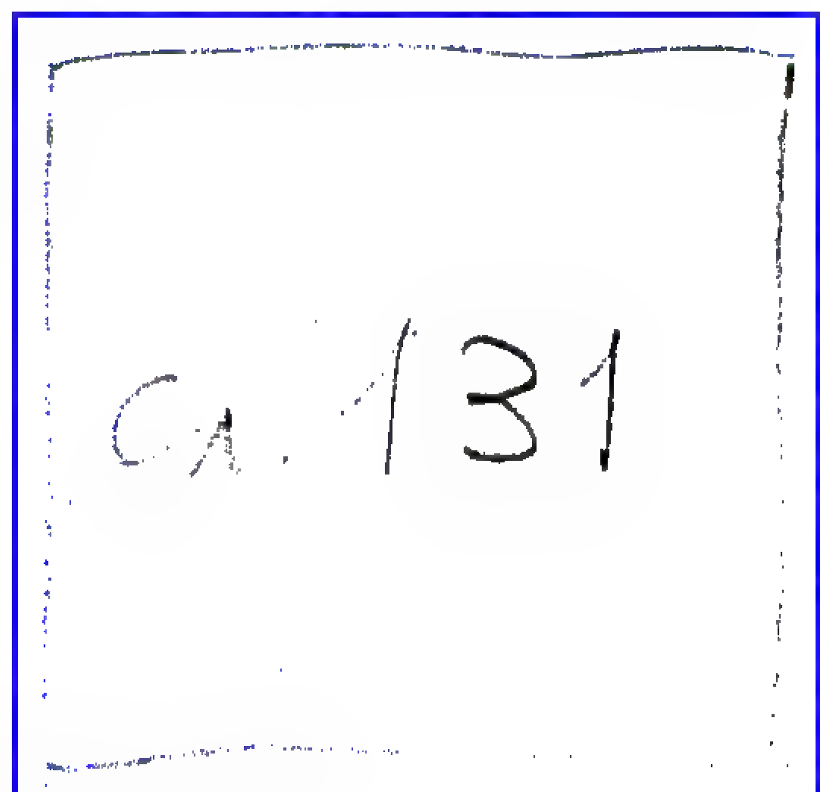
$$\varphi = \arcsin (\sin \Lambda \sin \varepsilon \operatorname{cosec} h).$$

(230) ~~(235)~~ На сл. 131 представљена је небеска сфера са уцртаним небеским екватором, E_1E_2, еклиптиком, E_nE_s, и њиховим половима, P_n и Π_n, уз то и положајем Сунчевим, у S, и његовом пројекцијом, A, на небески екватор. Тако је добивен сферни троугао P_nZ_nS, чији су елементи:

$$Z_nS = 90^\circ, \qquad P_nS = 90^\circ - \delta \qquad Z_nP_n = \varepsilon ,$$

јер се место налази на поларном кругу. За углове (часовни и азимут) имамо:

$$Z_n\widehat{P_n}S = 360^\circ - H , \qquad \text{а} \qquad P_nZ_nS = A - 180^\circ .$$



У овом сферном троуглу имамо

$$0 = \cos \varepsilon \sin \delta + \sin \varepsilon \cos \delta \cos H ,$$

одакле налазимо

$$\cos H = -\operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{tg} \delta ,$$

затим имамо

$$\sin \delta = -\sin \varepsilon \cos A ,$$

$$\cos \delta \sin H = -\sin A .$$

Диференцирамо ли први од ових образаца, имаћемо

$$-\sin H \, dH = -\operatorname{ctg} \varepsilon \sec^2 \delta \, d\delta$$

Ако, опет, приметимо да је

$$dH = -d\mathcal{R},$$

и извршимо ли ову замену, имаћемо

$$\sin H \, d\mathcal{R} = -\operatorname{ctg} \varepsilon \sec^2 \delta \, d\delta \qquad (1)$$

Диференцирајмо други од горњих образаца, имаћемо

$$\cos \delta \, d\delta = \sin \varepsilon \sin A \, dA ,$$

односно,

$$d\delta = \sin \varepsilon \sin A \sec \delta \, dA .$$

Извршимо ли у (1) замену ове вредности за $d\delta$, као и вредности $\sin H$ из трећег обрасца, имаћемо

$$\sin A \sec\delta \, dR = + \operatorname{ctg}\varepsilon \sec^2\delta \sin\varepsilon \sin A \sec\delta \, dA .$$

Одавде, пошто скратимо, добивамо

$$dA = \sec\varepsilon \cos^2\delta \, dR. \qquad (2)$$

Из правоуглог сферног троугла $A\gamma S$ имамо

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg}\Lambda \cos\varepsilon .$$

Одавде, диференцирањем, добивамо

$$\sec^2 R \, dR = \sec^2\Lambda \cos\varepsilon \, d\Lambda .$$

А како је у овом сферном троуглу

$$\cos\Lambda = \cos R \cos\delta$$

то добивамо

$$dR = \cos^2 R \cos\varepsilon \sec^2 R \sec^2\delta \, d\Lambda = \cos\varepsilon \sec^2\delta \, d\Lambda ,$$

то јест

$$d\Lambda = \sec\varepsilon \cos^2\delta \, dR. \qquad (3)$$

И видимо да је, дакле, у месту на поларном кругу дневна промена (2) тачке Сунчева залаза (dA) једнака дневној промени (3) Сунчеве лонгитуде ($d\Lambda$).

231 (236) На сл. 132 приказана је видљива половина небеске сфере за посматрача на географској ширини φ, са уцртаним небеским паралелом $S_s S_n$, деклинације δ, који Сунце привидно опише тог дана. На паралелу су обележени положаји Сунчева привидног кружног котура, при додирима његових рубова: западног у K_1, источног у K_2, са посматрачевим (западним) првим вертикалом, $Z_n W$. Ако означимо Сунчев привидни полупречник, S_2K_2, са $r_\odot$ и образујемо мали правоугли троугао на сфери S_2K_2I — где је са I обележена тачка пресека паралела, $S_n S_s$, са првим вертикалом, $Z_n W$ — из тог троугла имамо, као што видимо,

$$S_2K_2 = S_2 I \cos q ,$$

то јест

$$r_\odot = \tfrac{1}{2} dH \cos\delta \cos q ,$$

ако са q означимо паралактички угао $Z_n S_2 P_n$, једнак углу $S_1 S_2 Q$. Вредност овог угла налазимо, помоћу синусног обрасца, из положајног сферног троугла $Z_n S_2 P_n$:

$$\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A ,$$

дакле

$$\sin q = \cos\varphi \sin A \sec\delta .$$

Ако приметимо да се угао A мало разликује од $90°$, и да та, ако се не тражи апсолутна тачност, можемо узети као $A = 90°$, последњи израз постаје

$$\sin q = \cos\varphi \sec\delta .$$

Одавде, опет, изводимо

Сл. 132

$$1-\sin^2 q = \cos^2 q = (\cos^2\delta - \cos^2\varphi)\sec^2\delta.$$

Према томе ће, за дан солстиција, бити

$$2\tau_\odot = dH(\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},$$

односно

$$dH = 2\tau_\odot(\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

или, у секундама времена,

$$\tau = \frac{2\tau_\odot}{15}(\cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\tau_\odot}{15}(\sin^2\varphi - \sin^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, \quad q.e.d.$$

Први начин.)

(232) (~~237~~) На сл. 133 представљена је видљива небеска полусфера за посматрача на географској ширини φ, са уцртаним небеским паралелом S_1S_n, деклинације δ, који је Сунце тог дана привидно описало. Уцртани су и положаји Сунчева привидног кружног котура са средиштем у S_1, у тренутку додира његова доњег руба и равни посматрачева хоризонта, и са средиштем у S_2, у тренутку додира горњег његова руба и равни хоризонта.

Ако Сунчев привидни полупречник означимо са $\tau_\odot$, па из тачке пресека, V, паралела и посматрачева хоризонта спустимо лук великог круга VQ, тако да образујемо мали правоугли троугао на сфери VQS_2, видимо да је

$$VQ = VS_2\cos\delta\cos q, \quad \text{односно} \quad \tau_\odot = \tfrac{1}{2}dH\cos\delta\sin q,$$

ако приметимо да је угао VS_2Q једнак паралактичком углу $P_nS_2Z_n = q$.
Према томе ће бити

$$2\tau_\odot = dH\cos\delta\sin q.$$

С друге стране, из положајног сферног троугла, $Z_nP_nS_2$, имамо, према синусном обрасцу,

$$\cos\delta\sin q = \cos\varphi\sin A.$$

сл. 133

После замене у горњем изразу добивамо

$$2\tau_\odot = dH\cos\varphi\sin A.$$

За вредности азимута, на десној страни, можемо узети заједничку вредност (тачке V) за оба положаја Сунчева диска, вредност која одговара зенитској даљини $z = 90°$. За њу имамо, из положајног сферног троугла Z_nVP_n

$$\cos A = -\sin\delta\sec\varphi.$$

Одавде добивамо

$$1-\cos^2 A = \sin^2 A = (\cos^2\varphi - \sin^2\delta)\sec^2\varphi,$$

а затим и

$$\sin A = (\cos^2\varphi - \sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}\sec\varphi.$$

Према томе, за трајање (τ) залаза (или излаза) Сунчева привидног кружног диска (добивамо:)

$$\tau = \frac{2r_\odot}{15}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\delta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2r_\odot}{15}\left(\cos^2\delta - \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Вредности Сунчева привидног полупречника, $r_\odot$, мењају се, у току године, између 16′18″, у доба зимског, и 15′46″, у доба летња солстиција; око еквинокција њихова вредност се креће око 16′. Именитељ у последњем изразу има вредност: у доба еквинокција ($\delta=0$) $\cos\varphi$, у доба солстиција ($\delta=\pm 23°27'$) — што је написано. Видимо, према томе, да τ достиже своје највеће вредности, у току године, кад $\sin\delta$ достиже своје највеће, односно $\cos\delta$ своје најмање вредности. А то бива у доба солстиција.

Други начин. Из положајног сферног троугла имамо образац

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H.$$

Ако га диференцирамо, сматрајући δ и φ непроменљивим величинама, имаћемо

$$\sin z\, dz = \cos\varphi\cos\delta\sin H\, dH.$$

Ако дејство рефракције занемаримо, у тренутку излаза је $z = 90°$, тако да ћемо из последњег израза имати

$$dH = \sec\varphi\sec\delta\,\mathrm{cosec}\,H\, dz.$$

Према задатку је, Сунчев привидни полупречник, изражен у лучним секундама ($R_\odot$).

Према томе за трајање (τ) излаза Сунчева диска, изражено у временским секундама имаћемо израз

$$\tau = \frac{2}{15}R_\odot \sec\varphi\sec\delta\left(1 - tg^2\varphi\, tg^2\delta\right)^{-\frac{1}{2}},$$

што можемо написати

$$\tau = \frac{2}{15}R_\odot\left[\sec(\varphi+\delta)\sec(\varphi-\delta)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

У месту на географској ширини $\varphi = +45°$, за дан еквинокција, то јест за $\delta = 0$, ако за Сунчев привидни полупречник узмемо $R_\odot = 16' = 960''$, имаћемо за трајање излаза

[2]	0.30 103,
[15]	1.17 609,
Δ =	9.12 494,
[$R_\odot$] =	2.98 227,
[sec φ]	0.14 900,
[τ]	2.25 621,

дакле $\tau = 180^s.4 \approx 3^m$.

Ок 1/v

233) Ако означимо координате прве звезде, Σ_1, са λ_1, β_1, друге, Σ_2, са λ_2, β_2, а Сунчеву лонгитуду са Λ, са слике 134 видимо да за сферну даљину (D) Сунца

од прве звезде имамо $\cos D = \cos\beta_1\cos(\Lambda - \lambda_1)$,

од друге звезде имамо $\cos D = \cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Lambda)$.

сл. 134

Одавде изводимо да је

$$\cos\beta_1\cos(\Lambda - \lambda_1) = \cos\beta_2\cos(\lambda_2 - \Lambda).$$

Ако развијемо и средимо, налазимо

$$tg\Lambda = \frac{\cos\beta_2\cos\lambda_2 - \cos\beta_1\cos\lambda_1}{\cos\beta_1\sin\lambda_1 - \cos\beta_2\sin\lambda_2}.$$

234) Између еклиптичких и екваторских координата двеју некретница (Σ_1 и Σ_2, в. сл. 135), имамо ове обрасце

$$\cos\beta_1\sin\lambda = \cos\delta_1\sin\alpha_1,$$
$$\cos\beta_1\cos\lambda = \sin\delta_1\sin\varepsilon + \cos\delta_1\cos\varepsilon\sin\alpha_1,$$
$$\cos\beta_2\sin\lambda = \cos\delta_2\sin\alpha_2,$$
$$\cos\beta_2\cos\lambda = \sin\delta_2\sin\varepsilon + \cos\delta_2\cos\varepsilon\sin\alpha_2,$$

сл. 135

у којима је искоришћена околност да некретнице имају исту лонгитуду. Деобом другог четвртим и првог трећим обрасцем налазимо

$$\frac{\sin\delta_1\sin\varepsilon + \cos\delta_1\cos\varepsilon\sin\alpha_1}{\sin\delta_2\sin\varepsilon + \cos\delta_2\cos\varepsilon\sin\alpha_2} = \frac{\cos\delta_1\cos\alpha_1}{\cos\delta_2\cos\alpha_2}.$$

Одавде налазимо

$$\sin\delta_1\cos\delta_2\cos\alpha_2\sin\varepsilon + \cos\delta_1\cos\delta_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\varepsilon = \cos\delta_1\sin\delta_2\cos\alpha_1\sin\varepsilon + \cos\delta_1\cos\delta_2\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\varepsilon.$$

Поделимо ли обе стране производом $\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\varepsilon$, добићемо

$$tg\delta_1\cos\alpha_2\, tg\varepsilon + \sin\alpha_1\cos\alpha_2 = tg\delta_2\cos\alpha_1\, tg\varepsilon + \cos\alpha_1\sin\alpha_2.$$

Одавде, пошто средимо, добивамо

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = (\cos\alpha_1\, tg\delta_2 - \cos\alpha_2\, tg\delta_1)\, tg\varepsilon, \qquad q.e.d.$$

(235) ~~(240)~~. За одређивање Сунчевих екваторских координата имамо обрасце

$$\mathrm{tg}\,\mathcal{R} = \mathrm{tg}\,\Lambda \cos\varepsilon,$$
$$\mathrm{tg}\,\mathcal{D} = \sin\Lambda\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

Према подацима задатка биће

[tg Λ]	9.45 632,	[sin Λ]	9.43 926 n,
[cos ε]	9.96 257,	[sin ε]	9.59 980,
[tg $\mathcal{R}$]	9.41 889,	[sin $\mathcal{D}$]	9.03 906 n,
$\mathcal{R}$ =	194° 42′ 2″,	$\mathcal{D}$ =	−6° 16′ 53″.
$\mathcal{R}$ =	$12^h\ 58^m\ 48^s$.		

За проверавање израчунатих екваторских координата имамо

[cos $\mathcal{R}$]	9.98 555 n,
[cos $\mathcal{D}$]	9.99 738,
Σ = [cos Λ]	9.98 293 n; непосредно је [cos Λ] 9.98 293 n.

Јупитерову деклинацију одредићемо из обрасца

$$\mathrm{tg}\,\delta = \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

[sin α]	9.97 091,
[tg ε]	9.63 723,
[tg δ]	9.60 814, δ = +22° 4′ 45″.

Како се, према задатку, и Јупитер налазио, у том тренутку, на еклиптици, сферна даљина његова од Сунца биће једнака разлици њихових лонгитуда. Јупитерову лонгитуду одредићемо из обрасца

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \mathrm{tg}\,\alpha \sec\varepsilon.$$

[tg α]	0.42 180 n,
[sec ε]	0.03 743,
[tg λ]	0.45 923 n; λ = 109° 9′ 18″.

Нађену вредност можемо проверити помоћу обрасца

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda;$$

[cos α]	9.54 911 n,
[cos δ]	9.96 692,
[cos λ]	9.51 603 n, λ = 109° 9′ 17″.

За тражену сферну даљину Јупитера од Сунца налазимо Λ − λ = 86° 48′ 15″.

(236) ~~(241)~~ Ако екваторске координате Сунца означимо са $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$, звезде са α, δ, и географску ширину места са φ, часовне углове изласка Сунца и звезде, H и H_*, добићемо из познатих израза

$$\cos H = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\mathcal{D},$$
$$\cos H_* = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

Ако часовне углове изразимо помоћу разлика звезданог времена и ректасцензија, дакле ставимо $H = T_s - \textcircled{R}$ и $H_* = T_s - \alpha$,
где смо са T_s означили звездано време тренутка излаза, који је исти за оба тела, горњи изрази постају

$$\cos(T_s - \textcircled{R}) = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\textcircled{D},$$
$$\cos(T_s - \alpha) = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Ове можемо написати у облику

$$\sin[90^\circ - (T_s - \textcircled{R})] = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\textcircled{D},$$
$$\sin[90^\circ - (T_s - \alpha)] = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Како из правоуглог сферног троугла одређена Сунчевом лонгитудом имамо

$$\operatorname{tg}\textcircled{D} = \sin\textcircled{R} \operatorname{tg}\varepsilon,$$

можемо последња два обрасца написати у облику

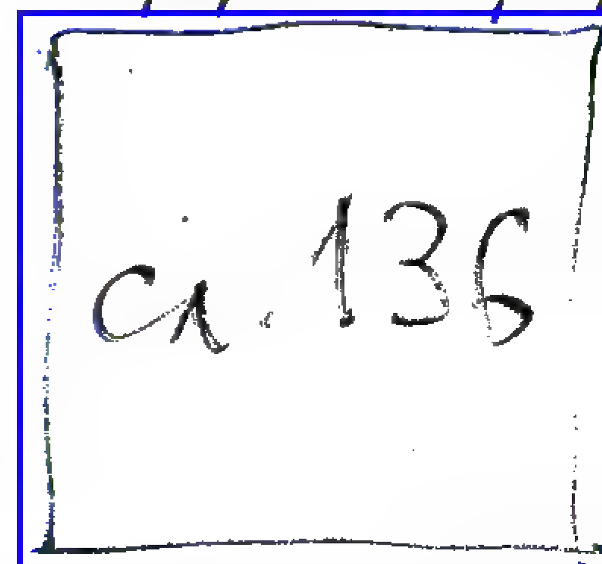
$$90^\circ - (T_s - \textcircled{R}) = \arcsin(-\operatorname{tg}\varphi \sin\textcircled{R} \operatorname{tg}\varepsilon),$$
$$90^\circ - (T_s - \alpha) = \arcsin(-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta).$$

Одузимањем доњег од горњег израза добијамо

$$\textcircled{R} - \arcsin(\sin\textcircled{R} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon) = \alpha - \arcsin(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta), \quad q.e.d.$$

(237) ~~(242)~~ Ако апстрахујемо дејство рефракције, онда можемо сматрати да су на сл. 136 представљени положаји Сунца привидног кружног контура, и то: са средиштем у S_1 на почетку, са средиштем у S_2 по завршетку његова залаза у месту географске ширине φ. Како у дан еквинокцијâ Сунце, у току свог привидног дневног пута, описује небески екватор, средиште његова диска у положајима S_1 и S_2 образује са својом пројекцијом, Q_1, на посматрачев хоризонт и западном тачком (W) правоугли сферни троугао (S_1Q_1W); а на завршетку залаза троугао WQ_2S_2. Ако Сунчев привидни (полу)пречник означимо са $r_\odot$ и приметимо да је угао $Q_1WS_1 = 90^\circ - \varphi$, а страна $WS_1 = 90^\circ - S_1E_1 = 90^\circ - H_1$, где је са H_1 означен часовни угао, из тог првог правоуглог сферног троугла имамо

$$\sin r_\odot = \cos\varphi \cos H_1; \qquad (1)$$



из другог правоуглог сферног троугла имамо

$$-\sin r_\odot = \cos\varphi \cos(H_1 + \tau).$$

Ако развијемо члан на десној страни, имаћемо

$$-\sin r_\odot = \cos\varphi \cos H_1 \cos\tau - \cos\varphi \sin H_1 \sin\tau.$$

Извршимо ли замену из првог израза, налазимо

$$\cos\varphi \sin H_1 = \sin r_\odot (1 + \cos\tau) \operatorname{cosec}\tau,$$
$$= \sin r_\odot \frac{2\cos^2 \frac{1}{2}\tau}{2\sin\frac{1}{2}\tau \cos\frac{1}{2}\tau} = \sin r_\odot \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\tau. \qquad (2)$$

Ако дигнемо на квадрат и саберемо једначине (1) и (2), имаћемо

$$\cos^2\varphi = \sin^2 r_\odot (1 + \mathrm{ctg}^2 \tfrac{1}{2}\tau) = \sin^2 r_\odot \,\mathrm{cosec}^2 \tfrac{1}{2}\tau,$$

а одавде добијамо

$$\cos\varphi = \sin r_\odot \,\mathrm{cosec} \tfrac{1}{2}\tau.$$

Како је, према задатку, $\tau = 30^m = 7^\circ 30'$, а $r_\odot = 16'$,
налазимо за тражену географску ширину вредност

$$\cos\varphi = 0{\cdot}00465 \times 15{\cdot}290 = 0{\cdot}07110, \text{ што јест } \varphi = \pm 85^\circ 55'.$$

(238) (243.) Пођи ћемо од обрасца који одређује, из положајног сферног троугла, висину (h) небеског тела

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta_\odot + \cos\varphi \cos\delta_\odot \cos H.$$

Ако диференцирамо, сматрајући $\delta_\odot$ и H за непроменљиве величине, имаћемо

$$\cos h\, dh = (\cos\varphi \sin\delta_\odot - \sin\varphi \cos\delta_\odot \cos H)\, d\varphi.$$

Из првог обрасца имамо, међутим,

$$\cos H = (\sin h - \sin\varphi \sin\delta_\odot) \sec\varphi \sec\delta_\odot.$$

Ако ову вредност унесемо у други члан друге једначине, добићемо

$$\cos h\, dh = \left[\cos\varphi \sin\delta_\odot - (\sin\varphi \sin h - \sin^2\varphi \sin\delta_\odot)\sec\varphi\right] d\varphi,$$

односно

$$\cos\varphi \cos h\, dh = (\cos^2\varphi \sin\delta_\odot - \sin\varphi \sin h + \sin^2\varphi \sin\delta_\odot)\, d\varphi,$$

што јест

$$\cos\varphi \cos h\, dh = (\sin\delta_\odot - \sin\varphi \sin h)\, d\varphi,$$

а одавде налазимо за разлику географских ширина места

$$d\varphi = \cos h \cos\varphi (\sin\delta_\odot - \sin h \sin\varphi)^{-1} dh.$$

(239) (244.) Трајање обданице на дан летњег солстиција ($\delta = \varepsilon$), у месту географске ширине φ_2 одређено је обрасцем

$$\cos H = -\mathrm{tg}\varphi_2 \mathrm{tg}\varepsilon.$$

Ако је у месту географске ширине φ_1 трајање обданице исто толико било месец дана пре јесење равнодневице, кад је Сунчева деклинација била, рецимо, $\delta_\odot$, онда ћемо имати

$$\cos H = -\mathrm{tg}\varphi_2 \mathrm{tg}\varepsilon = -\mathrm{tg}\varphi_1 \mathrm{tg}\delta_\odot \qquad (1)$$

Вредност деклинације $\delta_\odot$, имамо начина да одредимо. Додуше не тачну њену вредност, али довољно приближну. Према условима задатка, деклинација има вредност коју Сунце достиже месец дана пре јесење равнодневице. Познато је, међутим, да се Сунчева лонгитуда повећава, просечно, по 1° дневно. Значи

да ће у правоуглом сферном троуглу ♈AS, одређеном једном еквинокцијском тачком, Сунчевим положајем и пројекцијом овог положаја на небески екватор, бити позната два елемента: нагиб еклиптике и сферна даљина Сунца од еквинокцијске тачке (хипотенуза сферног правоуглог троугла). Она, према задатку, износи, приближно, 30°. Ако је означимо са l, из поменутог правоуглог сферног троугла имамо

$$\sin \textcircled{D} = \sin l \sin \varepsilon,$$

односно

$$\sin \textcircled{D} = \tfrac{1}{2} \sin \varepsilon.$$

Одавде је, међутим,

$$\cos \textcircled{D} = \tfrac{1}{2}(4 - \sin^2 \varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Значи

$$\mathrm{tg} \textcircled{D} = \sin \varepsilon (4 - \sin^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = \sin \varepsilon (3 + \cos^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}.$$

Заменом ове вредности у (1) добијамо

$$\mathrm{tg}\varphi_2 \, \mathrm{tg}\varepsilon = \mathrm{tg}\varphi_1 \sin\varepsilon (3 + \cos^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

а одавде

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2 \sec\varepsilon (3 + \cos^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}},$$

односно

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2 (1 + 3\sec^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \qquad q.e.d.$$

(240) (~~245.~~) На сл. 137 приказана је видљива половина привидне небеске сфере за посматрача O, који се налази негде на тропском појасу, и то у тренутку кад се еклиптика, $K\gamma Z_n$, поклапа се једним од посматрачевих вертикалних кругова. Значи, у тренутку кад еклиптика пролази кроз посматрачев зенит (Z_n). Према томе, пол (Π_n) еклиптике се налази у посматрачевој хоризонталној равни ($H_n W K H_s$). Сунце на еклиптици, чије су координате у том тренутку, према задатку, $\textcircled{R}$ и $\textcircled{D}$, представљено је на слици тачком S.

У сферном троуглу $\gamma E_2 Z_n$ користићемо се од његових елемената углом $E_2 \gamma Z_n = \varepsilon$, страном $E_2 Z_n = \varphi$ и страном $\gamma E_2 = \gamma Q + Q E_2 = \textcircled{R} + H$, где смо са H означили Сунчев часовни угао у тренутку посматрања. Како је ово правоугли сферни троугао, можемо прва два његова елемента, који су познати, одредити трећи (тачније), Сунчев часовни угао. Имамо, дакле,

$$\sin(\textcircled{R} + H) = \mathrm{tg}\varphi \, \mathrm{tg}\varepsilon.$$

Из правоуглог сферног троугла $\gamma Q S$, одређена Сунчевим положајем, имамо, међутим,

$$\sin \textcircled{R} = \mathrm{tg}\textcircled{D} \, \mathrm{tg}\varepsilon.$$

Делењем горњих двеју образаца добијамо

$$\sin(\textcircled{R} + H) = \sin \textcircled{R} \, \mathrm{tg}\varphi \, \mathrm{ctg}\textcircled{D},$$

сл. 137

то јест
$$\alpha_\odot + H = \arcsin(\sin\alpha_\odot \, tg\varphi \, tg\delta_\odot),$$
а одатле
$$H = \arcsin(\sin\alpha_\odot \, tg\varphi \, tg\delta_\odot) - \alpha_\odot, \quad q.e.d.$$

241 (~~246.~~) На сл. 138 представљена је небеска сфера са положајима некретнице, Σ, и Сунца, S, на истом небеском меридијану, ($P_n Q$) $\Upsilon Q = \alpha_\odot$. Ти положаји образују са еклиптиком, небеским екватором и великим кругом $P_n\Sigma S Q$ и $\Pi_n \Sigma K$ два правоугла сферна троугла: $SK\Sigma$ и ΥQS. У првом од ових страна $K\Sigma = \beta$ је, према задатку, незнатна, а услед тога је и друга страна, $SK = \lambda - \Lambda$, мала, тако да тај сферни троугао ($SK\Sigma$) можемо сматрати равним. И ако у њему угао $KS\Sigma$ (са η означимо), имаћемо из тог малог правоуглог троугла
$$\beta \doteq (\lambda - \Lambda)\, tg\eta.$$
Угао η — који нам је непознат — можемо одредити из правоуглог сферног троугла ΥQS. Имамо, дакле,
$$\sin\delta_\odot = tg\alpha_\odot \, ctg\eta.$$
Елиминисањем угла η из последња два израза, добивамо

Сл. 138

$$\lambda - \Lambda = \beta \sin\delta_\odot \, ctg\alpha_\odot.$$
Но како се у овом случају, према подацима задатка, и деклинација звезде мало разликује од Сунчеве деклинације, другим речима како је $\delta \approx \delta_\odot$, имаћемо
$$\lambda - \Lambda = \beta \sin\delta \, ctg\alpha, \quad q.e.d.$$

242 (~~247.~~) Поћи ћемо од познатих образаца за правоугли сферни троугао:

(1) $\sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\Lambda,$ (3) $\cos\Lambda = \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot,$

(2) $tg\alpha_\odot = \cos\varepsilon \, tg\Lambda,$ (4) $\sin\alpha_\odot = ctg\varepsilon \, tg\delta_\odot.$

Диференцирањем (2) добивамо, ако се послужимо ознакама задатка,
$$\dot\alpha_\odot \sec^2\alpha_\odot = \cos\varepsilon \sec^2\Lambda \, \dot\Lambda.$$
Ако овај израз напишемо
$$\dot\Lambda \cos\varepsilon = \dot\alpha_\odot \sec^2\alpha_\odot \cos^2\Lambda,$$
па извршимо замену из обрасца (3), имаћемо
$$\dot\Lambda \cos\varepsilon = \dot\alpha_\odot \cos^2\delta_\odot. \quad (5)$$
Сунчева лонгитуда се, према подацима задатка, мења униформно; значи $\dot\Lambda$ = конст. Према томе је и $\dot\Lambda \cos\varepsilon$ = конст. Тако да ћемо, ако диференцирамо последњи образац, имати
$$0 = \dot{A}\cos^2\delta_\odot - 2A\cos\delta_\odot \sin\delta_\odot \, \dot\delta_\odot.$$

Како је $\cos D \neq 0$, дељењем последњег израза овом величином имаћемо

$$\ddot{R}\cos D = 2\dot{R}\dot{D}\sin D, \quad \text{то јест} \quad \ddot{R} = 2\dot{R}\dot{D}\,\mathrm{tg}\,D, \quad q.e.d. \qquad (6)$$

С друге стране, ако диференцирамо (1), имаћемо

$$\dot{D}\cos D = \dot{\Lambda}\sin\varepsilon\cos\Lambda.$$

Извршимо ли на десној страни замену из (3), добићемо

$$\dot{D}\cos D = \dot{\Lambda}\sin\varepsilon\cos R\cos D.$$

Одавде налазимо

$$\dot{D} = \dot{\Lambda}\sin\varepsilon\cos R.$$

Унесемо ли овамо вредност за $\dot{\Lambda}$ из (5), имаћемо

$$\dot{D} = \dot{R}\cos^2 D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R.$$

Ако овај израз диференцирамо, добићемо

$$\ddot{D} = \ddot{R}\cos^2 D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - 2\dot{R}\dot{D}\cos D\sin D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - \dot{R}^2\cos^2 D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin R.$$

Извршимо ли у првом члану замену нађеном вредношћу за $\ddot{R}$ из (6), биће

$$\ddot{D} = 2\dot{R}\dot{D}\,\mathrm{tg}\,D\cos^2 D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - \dot{R}\dot{D}\sin 2D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - \dot{R}^2\cos^2 D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin R,$$

$$= \dot{R}\dot{D}\sin 2D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - \dot{R}\dot{D}\sin 2D\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos R - \dot{R}^2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sin R\cos^2 D.$$

Пошто скратимо и извршимо замену из (4), добивамо

$$\ddot{D} = -\dot{R}^2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\cos^2 D\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,D,$$

односно, пошто поново скратимо и уредимо

$$\ddot{D} = -\tfrac{1}{2}\dot{R}^2\sin 2D, \qquad q.e.d.$$

(243) ~~248.~~ Из правоуглог сферног троугла одређена Сунчевим положајем на еклиптици имамо образац

$$\mathrm{tg}\,R = \cos\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\Lambda.$$

Диференцирањем добивамо

$$\dot{R}\sec^2 R = \dot{\Lambda}\cos\varepsilon\sec^2\Lambda.$$

Па како из истог правоуглог сферног троугла имамо и образац

$$\cos\Lambda = \cos R\cos D,$$

после замене у горњем обрасцу имаћемо

$$\dot{R}\sec^2 R = \dot{\Lambda}\cos\varepsilon\sec^2 R\sec^2 D.$$

Одавде добивамо

$$\dot{R} = \dot{\Lambda}\cos\varepsilon\sec^2 D, \qquad q.e.d.$$

Потребан услов да разлика $(R-\Lambda)$, функција времена, буде екстремум јесте да буде

$$\frac{d(R-\Lambda)}{dt} = 0, \quad \text{то јест (да буде)} \quad \dot{R} = \dot{\Lambda}.$$

Са овим условом добивамо из горње једначине

$$\cos\varepsilon \sec^2\textcircled{D} = 1, \quad \text{односно} \quad \cos^2\textcircled{D} = \cos\varepsilon .$$

Одавде налазимо

$$\textcircled{D} = \arccos(\pm\sqrt{\cos\varepsilon}).$$

Ако за нагиб еклиптике усвојимо вредност $\varepsilon = 23°27'$, налазимо за деклинацију Сунца којој одговарају екстремне разлике $\textcircled{R}-\lambda$)

$$\textcircled{D} = \arccos(\pm\sqrt{0{\cdot}918}) = \arccos(\pm 0{\cdot}958) = \pm 16°\,38'.5 .$$

За датуме кад ти екстреми наступају налазимо у „Годишњаку нашег неба": око 3 фебруара, око 7 августа, " 7 маја, " 9 новембра.

(244) (~~249.~~) Ако се Сунце налази у близини (летњег) солстиција, његове лонгитуда и ректасцензија мало се разликују од 90°. Ставимо да је $\textcircled{R} = 90° - 2\eta$.
Из правоуглог сферног троугла одређена Сунчевим положајем (S) на еклиптици имамо

$$tg\,\textcircled{D} = \sin \textcircled{R}\, tg\,\varepsilon ,$$

а, према услову задатка,

$$tg\,\textcircled{D} = \cos 2\eta\, tg\,\varepsilon ,$$

односно

$$tg\,\varepsilon = \sec 2\eta\, tg\,\textcircled{D}$$

Ово је, како видимо, израз облика

$$tg\,y = n\, tg\,x .$$

Познато је, међутим, из првог дела Збирке решених задатака из Опште астрономије, стр. 12, да се овог облика израз може развити у бесконачан ред, облика

$$y = x + \frac{n-1}{n+1}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \cdots\cdots \qquad [n>1].$$

Ако то применимо на горњи израз, за нагиб еклиптике, добивамо

$$\varepsilon = \textcircled{D} + \frac{\sec 2\eta - 1}{\sec 2\eta + 1}\sin 2\textcircled{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sec 2\eta + 1}{\sec 2\eta + 1}\right)^2 \sin 4\textcircled{D} + \cdots\cdots$$

Како је, међутим,

$$\frac{\sec 2\eta - 1}{\sec 2\eta + 1} = \frac{1-\cos 2\eta}{1+\cos 2\eta} = \frac{2\sin^2\eta}{2\cos^2\eta} = tg^2\eta ,$$

добивамо горњи ред у [redacted] облику

$$\varepsilon = \textcircled{D} + tg^2\eta \sin 2\textcircled{D} + \frac{1}{2} tg^4\eta \sin 4\textcircled{D} + \cdots\cdots$$

Ако занемаримо мале величине реда вишег од другог, налазимо

$$\varepsilon = \textcircled{D} + \eta^2 \sin 2\textcircled{D}, \quad q.e.d.$$

(245) (~~250.~~) Користећи се првим од датих, или тачним изразом за одређивање нагиба еклиптике из посматрања Сунчевих координата у доба солстиција, даје израз

$$tg\,\varepsilon = tg\,\textcircled{D}\,cosec\,\textcircled{R},$$

можемо образац

$$tg(\varepsilon - \textcircled{D}) = (tg\,\varepsilon - tg\,\textcircled{D})(1 + tg\,\varepsilon\, tg\,\textcircled{D})^{-1},$$

написати у облику

$$tg(\varepsilon - \textcircled{D}) = tg\,\textcircled{D}(cosec\,\textcircled{R} - 1)(1 + tg^2\textcircled{D}\,cosec\,\textcircled{R})^{-1},$$

односно

$$tg(\varepsilon - \textcircled{D}) = sin\,\textcircled{D}\,cos\,\textcircled{D}(1 - sin\,\textcircled{R})(sin\,\textcircled{R}\,cos^2\textcircled{D} + sin^2\textcircled{D})^{-1}.$$

У доба летњег солстиција вредност Сунчеве ректасцензије је врло блиска $6^h = 90°$, тако да последњи фактор на десној страни смемо сматрати једнак јединици. А приметимо ли да је

$$1 - sin\,\textcircled{R} = 2 sin^2(45° - \tfrac{1}{2}\textcircled{R}),$$

последњу једначину можемо написати

$$tg(\varepsilon - \textcircled{D}) = sin\,2\textcircled{D}\,sin^2(45° - \tfrac{1}{2}\textcircled{R}).$$

(малене) Напред је већ наглашено било да се овај израз искоришћује искључиво у доба солстиција, другим речима у доба кад су разлике и $(\varepsilon - \textcircled{D})$ и $(45° - \frac{1}{2}\textcircled{R})$ — малене. И можемо га написати

$$(\varepsilon - \textcircled{D})\,arc\,1'' = sin\,2\textcircled{D}\,sin^2(45° - \tfrac{1}{2}\textcircled{R}).$$

Предности овог израза (који је, уосталом, друкчије само изведено и написано решење претходног задатка) треба тражити у чињеници што се нагиб више одређује помоћу мале (чак сасвим мале) разлике $(\varepsilon - \textcircled{D})$. При ефективном израчунавању ове разлике потребна тачност се постиже и логаритмима од три децимале, односно природним бројевима од по две (односно три) вредносне цифре.

Тачан израз за одређивање нагиба еклиптике је, као што је и у задатку наведено,

$$tg\,\varepsilon = tg\,\textcircled{D}\,cosec\,\textcircled{R}.$$

Израз је, како видимо, једноставан; погодан је и за логаритамски рачун. Али да би могао дати тачан резултат, морају и полазни подаци ($\textcircled{R}$, $\textcircled{D}$) бити дати, и рачунске операције изведене, са крајњом тачношћу. То значи, логаритмима од седам децимала, ако треба да се обезбеди десети део, односно од осам децимала, ако треба да се обезбеди стоти део секунде угла.

Илустроваћемо предности оба израза на једном нумеричком примеру. Посматрањем Сунца дан после летњег солстиција добивене су ове координате:

$$\textcircled{R} = 6^h\ 2^m\ 31^s.07 = 90°\ 37'\ 46''.05, \qquad \textcircled{D} = +23°\ 26'\ 57''.5.$$

Са овим подацима добивамо, помоћу горњих израза, за нагиб еклиптике

$[tg\,\textcircled{D}]$	9.637 2502,	$2\textcircled{D} =$	46° 53′ 55″,	$[sin\,2\textcircled{D}]$	9.863,
$[sin\,\textcircled{R}]$	9.999 9738,	$\frac{1}{2}\textcircled{R} =$	45 18 53,	$2[sin(45° - \frac{1}{2}\textcircled{R})]$	5.480,
$\Delta = [tg\,\varepsilon]$	9.637 2764,	$45° - \frac{1}{2}\textcircled{R} =$	−0 18 53;	$[(arc\,1'')^{-1}]$	5.314,
$\varepsilon =$	23° 27′ 2″.03.			$[\varepsilon - \textcircled{D}] =$	0.657, $\varepsilon - \textcircled{D} = 4''.54.$

Тако смо, приближним изразом, за нагиб еклиптике нашли $\varepsilon = 23^\circ 27' 2''.04.$

(246) (251.) На сл. 139 имамо представљене еклиптику, E_nE_s, са северним њеним полом, Π_n, и Сунчев небески екватор, E_2E_1, са северним његовим полом, $P_\odot$. Положај окота, у односу према еклиптици, одређен је лонгитудом узлазног чвора $\gamma O ☊ = ☊ = 75^\circ 7' 6''$, и нагиб равни Сунчева екватора према равни еклиптике, даке угао $E ☊ E_2 = \Pi_n O P_\odot = i = 7^\circ 15' 0''$.

Из ових података изводимо непосредно еклиптичке координате, λ и β, пола Сунчева екватора, $P_\odot$. Видимо на сл. да је $\lambda = \gamma ☊ J = ☊ + 270^\circ = 345^\circ 7' 6''$ и $\beta = JP_\odot = 90^\circ - 7^\circ 15' 0'' = 82^\circ 45' 0''$. Са овим координатама, ако за нагиб еклиптике усвојимо $\varepsilon = 23^\circ 27' 0''$, долазимо до тражених екваторских координата пола помоћу Гаусове групе образаца

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon,$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon,$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda.$$

Сл. 139

Увођењем двају помоћних параметара, дефинисаних једначинама

$$n\sin N = \sin\beta \quad \text{и} \quad n\cos N = \cos\beta\sin\lambda,$$

Гаусова група образаца се своди на облик погодан за логаритамски рачун:

$$\sin\delta = n\sin(N+\varepsilon),$$
$$\cos\delta\sin\alpha = n\cos(N+\varepsilon),$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda.$$

Са подацима којима располажемо имаћемо

[tg β]	0.89 546,	[n]	9.99 674,	[n]	9.99 674,
[cosec λ]	0.59 037n,	[cos(N+ε)]	9.63 113n,	[sin(N+ε)]	9.95 614,
Σ=[tg N]	1.48 583n,	[cos β]	9.10 106,	[sin δ]	9.95 288,
N =	91° 52′ 16″,	[cos λ]	9.98 518,	[cos δ]	9.64 509,
ε =	23 27 0.	[cos δ sin α]	9.62 787n,	[tg δ]	0.30 779,
N + ε =	115 19 16;	[cos δ cos α]	9.08 624,	δ =	+63° 47′ 24″.
[n sin N]	9.99 651,	[tg α]	0.54 163n,	α =	19h 4m 7s.4.
[sin N]	9.99 977;	α =	286° 1′ 50″;		
		[sin α]	9.98 278;		

Проверићемо добивене координате пола помоћу обрасца:

$$\cos N\cos\delta\sin\alpha = \cos(N+\varepsilon)\cos\beta\sin\lambda.$$

[cos δ]	9.64 509,	[cos(N+ε)]	9.63 113n,
[sin α]	9.98 278n,	[cos β]	9.10 106,
[cos N]	8.51 395n,	[sin λ]	9.40 963n,
Σ(I)	8.14 182,	Σ(II)	8.14 182.

Ако потражимо на карти неба положај међу звездама Сунчевог северног небеског пола, видећемо да се, према израчунатим координатама, овај налази у сазвежђу Змаја (Draco), у непосредној близини звезде π, око пете привидне величине, а више јужније од звезде δ Draconis, треће привидне величине.

(247) ~~252.~~ На сл. 140 представљени су положаји и величине сенке слободног вертикалног зида (правоугла облика), ABCD, висине a, дужине l, усмерена у правцу E – W, у подне и у 18^h. Ако површине тих сенки означимо са: прве са S_0, друге са S, за прву ћемо имати

$$S_0 = l c_0 = l a \operatorname{ctg} h_0 = l a \operatorname{tg} z_0 = l a \operatorname{tg}(\varphi - \delta).$$

Код друге сенке треба да приметимо, прво, да је, у 18^h, часовни угао Сунца $H = 6^h = 90^\circ$. Значи положајни сферни троугао је, у том тренутку, правоугли; дакле, имаћемо

$$\operatorname{ctg} A = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta$$

Одавде закључујемо да ће, ако је $\delta > 0$, бити $A > 90^\circ$. И са слике видимо да је угао између правца сенке и правца E – W, дакле угао $WDF = SDF - SDW = A - 90^\circ$.

Да бисмо могли написати израз за површину сенке, треба да приметимо да је

$$DK = d = -c\cos A = -a \operatorname{ctg} h \cos A.$$

Сл. 140

Према томе је површина друге сенке

$$S = -l a \operatorname{ctg} h \cos A.$$

Из правоуглог положајног сферног троугла имамо, међутим,

$$\operatorname{ctg} h = -\operatorname{ctg}\varphi \sec A,$$

тако да, после замене у горњем изразу, добијамо

$$S = l a \operatorname{ctg}\varphi.$$

Изједначимо ли ову површину са оном (S_0) у подне, биће

$$l a \operatorname{tg}(\varphi - \delta) = l a \operatorname{ctg}\varphi,$$

то јест

$$\varphi - \delta = 90^\circ - \varphi.$$

Одавде налазимо $\delta = 2\varphi - 90^\circ$.

Како је, према задатку, $\varphi = +52^\circ$, налазимо за вредност деклинације

$$\delta = +14^\circ.$$

Ако отворимо „Годишњак нашег неба", видећемо да наведени услови бивају остварени око 28 априла и 16 августа.

~~256. [illegible]~~
~~[illegible]~~

248 ~~253~~ Нека на сл. 141 правоугли троугао OBK представља правоугли троугли гномон, на хоризонталној равни, са хипотенузом паралелном светској оси, усмерен у правцу $E - W$. Означимо му вертикалну катету (OB) словом a. Пошто му је хипотенуза усмерена у правцу паралелном светској оси, угао $OKB = \varphi$, то јест једнак је географској ширини места.

Нека буде h висина Сунца у тренутку кад се изједначе површине гномона и његове сенке. Значи, дакле, $\widehat{OMB} = h$. Са слике видимо да је, онда,

$$OM = c = a \operatorname{ctg} h.$$

Видимо, даље, да се, према положају и правцу сенке, Сунце налази и равни вертикала азимута $\widehat{SOZ} = A$; као и да је и угао $NOM = A$, односно $\widehat{KOM} = 90° + A$. Са овим елементима биће површине гномона, p_g, и његове сенке, p_s,

$$p_g = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{и} \quad p_s = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} h \operatorname{ctg} \varphi \sin(90° + A).$$

Ставимо ли, сад, да су ове две површине једнаке, имаћемо

$$\operatorname{ctg} h \cos A = 1. \qquad (1)$$

Ову једначину можемо добити у другом облику, ако приметимо да из положајног сферног троугла имамо:

Сл. 141

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H,$$
$$\cos h = \cos \delta \sin H \operatorname{cosec} A,$$
$$\operatorname{ctg} A = (\sin \varphi \cos H - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi) \operatorname{cosec} H. \qquad (2)$$

Ако другу од ових поделимо првом, добијамо

$$\operatorname{ctg} h = \cos \delta \sin H \operatorname{cosec} A (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H)^{-1}.$$

Унесимо ову вредност у (1) и добићемо

$$\operatorname{ctg} A \cos \delta \sin H = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H.$$

А заменимо ли први фактор на левој страни изразом (2), добијамо

$$\cos \delta \sin \varphi \cos H - \sin \delta \cos \varphi = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H,$$

односно

$$\cos \delta \cos H (\sin \varphi - \cos \varphi) = \sin \delta (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

А одавде налазимо тражени услов за једнакост површина гномона и сенке

$$\cos H = - \operatorname{tg} \delta (\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi)^{-1} = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(45° + \varphi).$$

Додајмо да ће овај моћи бити остварен само ако је

$$|\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(45° + \varphi)| < 1, \quad \text{то јест ако је} \quad |\delta| + |45° + \varphi| < 90°,$$

дакле, само ако је $|\delta| + |\varphi| < 45°$.

((в. сл. 142)

249 ~~254~~ Вертикалан зид, постављен у равни азимута A, неће давати сенку док се средиште, S_2, Сунчева привидног диска буде налазило у равни

азимута A. У том положају Сунце са својом пројекцијом (Q) на посматрачев хоризонт и тачком W образује правоугли сферни троугао. У њему је:
страна $WQ = 90° - A$, сферни угао $QWS = 90° - \varphi$, страна $WS_2 = 90° - H$.
Међу овим елементима постоји релација

$$\sin\varphi = \operatorname{ctg}A \operatorname{tg}H,$$

односно

$$\operatorname{tg}H = \sin\varphi \operatorname{tg}A,$$

из које следује

$$H = \operatorname{arc\,tg}(\sin\varphi \operatorname{tg}A), \qquad q.e.d.$$

Сл. 142

(Сл. 143) Према задатку је висина зида $OB = CD = a$; а Сунце, пошто је посматрано у подне, налазило се у посматрачеву меридијану, дакле у положају S_1. Уочимо ширину сенке; то је дуж $IF = x$. Из равног троугла CDF имамо, прво,

$$FD = s = CD \operatorname{ctg}h = a \operatorname{tg}\varphi;$$

а, затим,

$$x = IF = s \sin A = a \sin A \operatorname{tg}\varphi.$$

Сл. 143

250 ~~255.~~ У подне, то јест у тренутку Сунчева пролаза кроз меридијан места, његова висина је — на дан еквинокција, пошто се налази у равни небеског екватора —

$$h = 90° - \varphi.$$

Према томе, дужина (x) хоризонталне сенке вертикалног стуба, висине a, биће

$$x = a \operatorname{ctg}h = a \operatorname{tg}\varphi.$$

На дан (летњег) солстиција Сунчева деклинација је $\delta = +\varepsilon$. Ако му висину, при пролазу кроз први вертикал места, географске ширине φ, означимо са ψ, из положајног сферног троугла ћемо имати

$$\sin\psi = \sin\varepsilon \operatorname{cosec}\varphi.$$

Дужина (y) сенке вертикалног стуба, висине a, биће у том тренутку

$$y = a \operatorname{ctg}\psi.$$

Елиминишемо ли величину a из ових двеју релација, имаћемо

$$x = y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi, \qquad q.e.d.$$

---

251 ~~256.~~ За место на Земљину екватору је $\varphi = 0°$. Према томе, из израза за трајање обданице (2H), на географској ширини φ, кад је Сунчева деклинација δ,

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta = 0, \qquad (1)$$

следује $H = 90° = 6^h$.

Израз за трајање (T) вечерњег (астрономског) сумрака има облик

256 наставак

$$\cos 108^\circ = -\sin 18^\circ = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(H+\sigma).$$

Ако развијемо последњи фактор на десној страни, занемарујући при томе мале величине другог и виших редова, имаћемо

$$-\sin 18^\circ = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H - \cos\varphi\cos\delta\sin H\sin\sigma.$$

Одавде, опет, налазимо, ако узмемо у обзир (1),

$$\sin 18^\circ = \cos\delta\sin\sigma,$$

односно

$$\sin\sigma = \sin 18^\circ \sec\delta.$$

Одавде добивамо за трајање сумрака

$$\sigma = (\mathrm{arc}\,1^\circ)^{-1}\arcsin(\sin 18^\circ\sec\delta),$$

што јест, изражено у временским јединицама,

$$\sigma^{(h)} = \frac{1}{15}\cdot\frac{180}{\pi}\arcsin(\sin 18^\circ\sec\delta) = \frac{12}{\pi}\arcsin(\sin 18^\circ\sec\delta), \qquad q.e.d.$$

На дан летњег солстиција је $\delta = \varepsilon = +23^\circ 27'$, те ће бити

$[\sin 18^\circ]$	9.48 998,
$[\sec\varepsilon]$	0.03 744,
$[\sin\sigma_\sigma]$	9.52 742,

$$\sigma_\sigma = 1^h\,18^m.8.$$

✓ 252 (257). На сл. 144 представљени су положаји: посматрачевог зенита (Z_{II}) и Сунца (S_1), у тренутку кад се средиште његовог привидног диска нашло у равни посматрачевог хоризонта (при чему дејство рефракције није узимано у обзир); као и положаји: посматрачевог зенита (Z_1) и Сунца (S_2), у тренутку кад се средиште његовог привидног диска спустило до зениталне даљине $Z_{II}S_2 = 108^\circ$, на којој се, па залазу, завршава астрономски сумрак за посматрача на географској ширини φ.

Ако паралактичке углове, на овој слици, означимо: $Z_{II}S_1P_n$ са q_1, и $Z_{II}S_2P_n$ са q_2, из положајних сферних троуглова $Z_{II}S_1P_n$ и $Z_{II}S_2P_n$ имамо

Сл. 144

$$\sin\varphi = \cos\delta\cos q_1,$$
$$\sin\varphi = -\sin 18^\circ\sin\delta + \cos 18^\circ\cos\delta\cos q_2.$$

Према задатку, Сунчев положај одговара датуму најкраћег трајања астрономског сумрака. Но у том је случају – као што следује и из решења претходног задатка – угао $Z_{II}S_2Z_1 = 0$. Другим речима, на завршетку најкраћег трајања астрономског сумрака, мора се зенит Z_1 са Сунцем налазити на истом вертикалу. Ако још приметимо да су у положајним сферним троуглима

$$\operatorname{tg} 18^\circ \sin \delta_\odot = -\sin\varphi\,(1-\cos 18^\circ)\sec 18^\circ,$$

што јест, ако приметимо да је $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$,

$$\sin 18^\circ \sin\delta_\odot = -2\sin\varphi \sin^2 9^\circ,$$

односно

$$2\sin 9^\circ \cos 9^\circ \sin\delta_\odot = -2\sin^2 9^\circ \sin\varphi,$$

а одавде

$$\sin\delta_\odot = -\sin\varphi \operatorname{tg} 9^\circ.$$

Ако се сетимо да је за најкраће трајање астрономског сумрака нађено

$$\sigma = 2\arcsin(\sin 9^\circ \sec\varphi),$$

сад ћемо лако израчунати и његов износ и датуме у које падају најкраћа трајања астрономског сумрака у Београду. Имаћемо

$[\sin 9^\circ]$	9.19433,	$[\sin\varphi]$	9.84796,
$[\sec\varphi]$	0.14900,	$[\operatorname{tg} 9^\circ]$	9.19971n,
$[\sin\frac{1}{2}\sigma]$	9.34333,	$[\sin\delta_\odot]$	9.04767n,
$\frac{1}{2}\sigma =$	$12^\circ 44'$,	$\delta_\odot \approx$	$-6^\circ 25'$;
$\sigma =$	$25^\circ 28'$,		
$\sigma^{(h)} =$	$1^h 41^m.9$;		

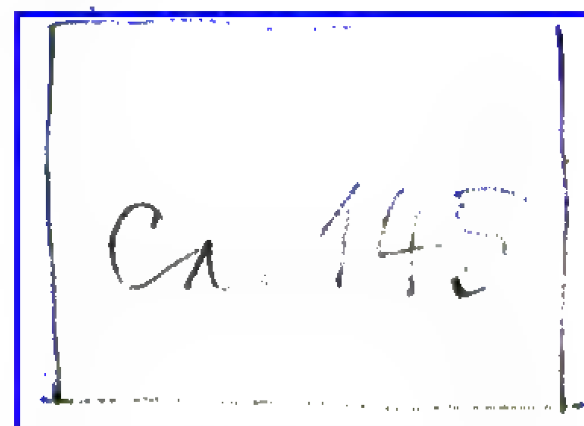
што значи да најкраће трајање падају: око 5 марта и око 10 октобра.

253 (258) Са сл. 145 видимо, ако лук великог круга Z_1Z_2 означимо са ψ, угао $Z_1P_1Z_2$ са σ и приметимо да је $Z_1S_2 = 90^\circ + h$, да је у сферном троуглу $Z_1P_1Z_2$:

$$\cos\psi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\sigma = \cos h\cos(q_2-q_1);$$

одавде налазимо

$$1-\cos^2\varphi(1-\cos\sigma) = \cos h\cos(q_2-q_1),$$


Сл. 145

што јест

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\sigma\cos^2\varphi = \cos h\cos(q_2-q_1),$$

одакле изводимо

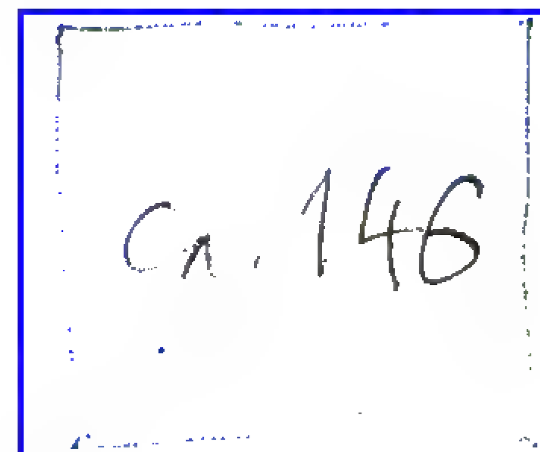
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\sigma\cos^2\varphi = 1-\cos h\cos(q_2-q_1), \qquad q.e.d.$$

254 (261) На сл. представљен је положај Сунчева привидног кружног диска, са средиштем у S, у тренутку пролаза кроз посматрачев меридијан P_1Z_1S. Сунчева деклинација износи, према задатку, $\delta_\odot = +3^\circ 30' 40''$. Ако је $R_\odot$ Сунчев привидни полупречник, $S_1S_2 = 2R_\odot$. Са слике видимо да је

$$S_1S_2 = O_1S_1 \times S_1\widehat{O}S_2 = O_1S_1 \times dH,$$

ако са dH означимо време потребно да кружни диск пређе преко посматрачева меридијана. Са слике видимо, исто тако, да је

$$O_1S_1 = OS_1\sin(90^\circ-\delta_\odot) = OS_1\cos\delta_\odot.$$


Сл. 146

Према томе је

$$2R_\odot = dH\cos\delta_\odot, \quad \text{што јест} \quad dH = 2R_\odot\sec\delta_\odot,$$

изражено у временским јединицама, то трајање износи

$$dH = \frac{2}{15}R_\odot\sec\delta_\odot.$$

Са подацима задатка биће, дакле,

$$dH^{(s)} = \frac{2}{15}\times 962\times 1.002 = 64.13\times 2.004 \approx 128^s.5.$$

255 (262) Ако је са географске ширине φ Сунце посматрано на зенитској даљини z, у тренутку кад му је деклинација била $\delta_\odot$, из положајног сферног троугла имамо, између тих величина и Сунчева часовног угла (H) ову релацију

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta_\odot + \cos\varphi\cos\delta_\odot\cos H.$$

Ако овај образац диференцирамо, сматрајући φ и $\delta_\odot$ за непромењиве величине, (имаћемо)

$$\sin z\,dz = \cos\varphi\cos\delta\sin H\,dH.$$

Заменом из синусног обрасца, можемо овај написати у облику

$$\sin z\,dz = \cos\varphi\sin z\sin A\,dH,$$

односно, пошто скратимо,

$$dz = \cos\varphi\sin A\,dH.$$

Ставимо ли сад

$$dz = 2R_{\odot} \quad \text{и} \quad dH = \tau,$$

за трајање пролаза Сунчевог привидног диска преко хоризонталног кончића теодолита имамо

$$\tau = 2R_{\odot}\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,A,$$

односно, у временским јединицама,

$$\tau = \frac{2}{15}R_{\odot}\sec\varphi\,\mathrm{cosec}\,A.$$

Напомињемо да азимут Сунца није дат у задатку, али се из датих података може израчунати.

256 Дејство рефракције треба занемарити. Ако Сунчев привидни полупречник означимо са $R_{\odot}$, зенитске даљине средишта Сунчевог привидног диска, при залазу, у тренутку додира са хоризонтом —

доњег Сунчевог руба: $z_1 = 90° - R_{\odot}$,

горњег Сунчевог руба: $z_2 = 90° + R_{\odot}$.

Из положајних сферних троуглова који тим тренуцима одговарају, имамо

$$\sin R_{\odot} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H_1,$$
$$-\sin R_{\odot} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H_2.$$

Одузимањем добијамо

$$2\sin R_{\odot} = \cos\varphi\cos\delta(\cos H_1 - \cos H_2),$$
$$2\sin R_{\odot} = -2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(H_1-H_2)\sin\tfrac{1}{2}(H_1+H_2),$$

односно

$$\sin R_{\odot} = \cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(H_2-H_1)\sin\tfrac{1}{2}(H_1+H_2)$$

а одавде је

$$\cos\varphi = \sin R_{\odot}\sec\delta\,\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}(H_2-H_1)\,\mathrm{cosec}\tfrac{1}{2}(H_1+H_2).$$

Сабирањем полазних двеју једначина добијамо

$$0 = 2\sin\varphi\sin\delta + 2\cos\varphi\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(H_2-H_1)\cos\tfrac{1}{2}(H_1+H_2).$$

Ако дигнемо на квадрат последње две једначине, имамо

$$\cos^2\varphi = \sin^2 R_{\odot}\sec^2\delta\,\mathrm{cosec}^2\tfrac{1}{2}(H_2-H_1)\,\mathrm{cosec}^2\tfrac{1}{2}(H_1+H_2)$$
$$\sin^2\varphi\sin^2\delta = \cos^2\varphi\cos^2\delta\cos^2\tfrac{1}{2}(H_2-H_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(H_1+H_2).$$

Из ових налазимо

$$\sin^2\tfrac12(H_1+H_2) = \sin^2 R_\odot \sec^2\delta \sec^2\varphi\, \mathrm{cosec}^2\tfrac12(H_2-H_1),$$
$$\cos^2\tfrac12(H_1+H_2) = \mathrm{tg}^2\delta\, \mathrm{tg}^2\varphi \sec^2\tfrac12(H_2-H_1).$$

Сабирањем ових двеју једначина налазимо
$$\mathrm{tg}^2\delta\,\mathrm{tg}^2\varphi\sec^2\tfrac12(H_2-H_1) + \sin^2R_\odot\sec^2\delta\sec^2\varphi\,\mathrm{cosec}^2\tfrac12(H_2-H_1)=1.$$

Одавде, опет, добивамо
$$\cos^2\delta\sin^2\tfrac12(H_2-H_1) = \mathrm{tg}^2\varphi\sin^2\delta\,\mathrm{tg}^2\tfrac12(H_2-H_1)+\sin^2R_\odot(1+\mathrm{tg}^2\varphi),$$

односно
$$\cos^2\delta\sin^2\tfrac12(H_2-H_1)-\sin^2R_\odot = \mathrm{tg}^2\varphi\left[\sin^2\delta\,\mathrm{tg}^2\tfrac12(H_2-H_1)+\sin^2R_\odot\right].$$

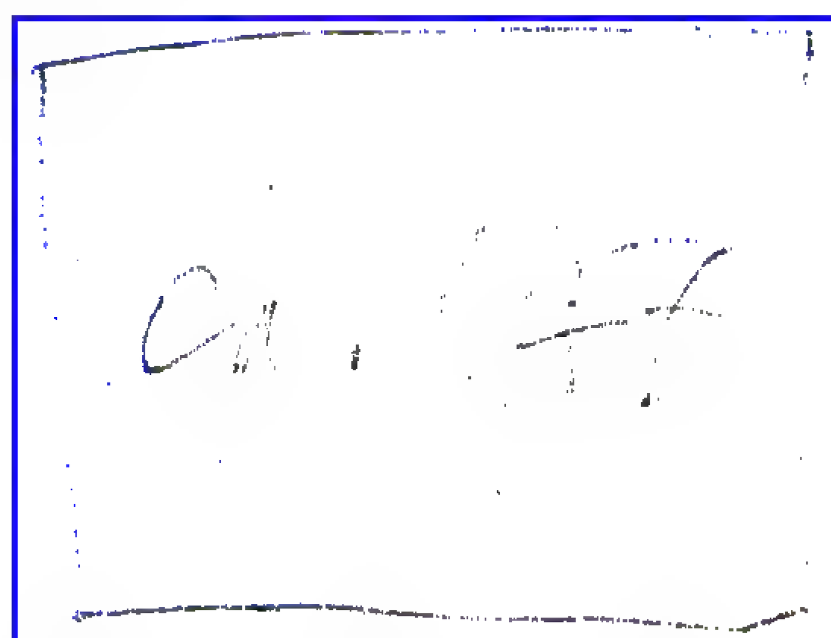
А одавде долазимо до израза
$$\mathrm{tg}^2\varphi = \left[\cos^2\delta\sin^2\tfrac12(H_2-H_1)-\sin^2R_\odot\right]\left[\sin^2\delta\,\mathrm{tg}^2\tfrac12(H_2-H_1)+\sin^2R_\odot\right]^{-1}$$

што даје за географску ширину
$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left\{\pm\left[\cos^2\delta\sin^2\tfrac12(H_2-H_1)-\sin^2R_\odot\right]\left[\sin^2\delta\,\mathrm{tg}^2\tfrac12(H_2-H_1)+\sin^2R_\odot\right]^{-1}\right\}^{\frac12}.$$

У доба еквинокција је $\delta = 0$, те ћемо за одређивање географске ширине добити израз
$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left\{\pm\left[\sin^2\tfrac12(H_2-H_1)-\sin^2R_\odot\right]\mathrm{cosec}^2R_\odot\right\}^{\frac12},$$

који можемо написати још и у облику
$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left(\pm\,\mathrm{cosec}\,R_\odot\left\{\sin\left[\tfrac12(H_2-H_1)+R_\odot\right]\sin\left[\tfrac12(H_2-H_1)-R_\odot\right]\right\}^{\frac12}\right.$$

(257) (264) На сл. 147 представљен је положај Сунчева привидног кружног диска, полупречника $s_1S = R_\odot$, са средиштем S (деклинације δ), на посматрачеву меридијану P_nS. Пошто се у задатку претпоставља да је Земљина хелиоцентрична путања кружна, значи да $R_\odot$ остаје непромењено. Означимо трајање пролаза Сунчева привидног кружног диска преко меридијана са τ. Из правоуглог сферног троугла P_nSs_1 (s_1S је лук великог круга) онда имамо
$$\sin R_\odot = \cos\delta\sin\tfrac12\tau.$$


Сл. 147

Ако ову релацију диференцирамо имаћемо
$$-\sin\delta\sin\tfrac12\tau\cdot\dot\delta + \tfrac12\cos\delta\cos\tfrac12\tau\cdot\dot\tau = 0.$$

Одавде изводимо
$$\dot\tau = 2\,\mathrm{tg}\,\delta\,\mathrm{tg}\tfrac12\tau\,\dot\delta.$$

Да τ буде екстремум, треба да буде $\dot\tau=0$. Како је, међутим, увек $\mathrm{tg}\frac12\tau>0$, поменути услов може бити испуњен ако је

или $\mathrm{tg}\,\delta=0$, дакле $\delta=0$;

или $\dot\delta=0$, значи $\delta=\pm\varepsilon$.

Први услов испуњен је у дане еквинокција; други је испуњен у дане солстиција.

Ако полазни образац напишемо у облику

$$\sin\tfrac{1}{2}\tau = \sin R_\odot \sec\delta$$

можемо помоћу њега, уносећи вредности Сунчевих деклинација за побројане датуме, наћи тражене екстремне вредности трајања пролаза. И налазимо:

1) за $\delta = 0$, $\sec\delta = 1$, $\tau = 2R_\odot = 32' = 2^m\,8^s$;

2) за $\delta = \pm 23^\circ 27'$, $\sec\delta = 1.09$, $\sin R_\odot = 0.00\,465$; $\sin\tfrac{1}{2}\tau = 0.00\,507$,

$\tfrac{1}{2}\tau = 17'.5$, $\tau = 35' = 2^m\,20^s$.

Са подацима задатка добијамо да се трајање пролаза Сунчева диска креће између

$$2^m\,8^s \leq \tau \leq 2^m\,20^s.$$

(258) ~~(265)~~ На сл. 148 приказана је схематски Земљина хелиоцентрична путања и њени екстремни положаји: П (перихел) и А (афел). Са ње се може видети зависност Сунчева привидног пречника од Земљине даљине од Сунца, или њена хелиоцентричног радијус-вектора. Означимо: Сунчеве привидне полупречнике са R, што значи да ће бити $\widehat{S\Pi s_1} = R_1$ и $\widehat{SAs_1} = R_2$; Земљине радијус-векторе $S\Pi = r_1$ и $SA = r_2$ и пречник Сунчеве сфере са d. Са слике видимо да између ових величина имамо релације

Сл. 148

$$d = r_1 \sin R_1 \quad \text{и} \quad d = r_2 \sin R_2,$$

из којих следује

$$r_2 \sin R_2 = r_1 \sin R_1.$$

Одавде налазимо

$$r_2 - r_1 = r_1(\sin R_1 - \sin R_2)\operatorname{cosec} R_2,$$

односно

$$r_2 - r_1 = 2r_1 \cos\tfrac{1}{2}(R_1+R_2)\sin\tfrac{1}{2}(R_1-R_2)\operatorname{cosec} R_2.$$

Са подацима задатка налазимо:

	Лог. са пет дец.	Лог. са седам дец.
$R_1 = 16'\,17''.50$,	$[2]$ 0.30 103,	$[2]$ 0.301 0300,
$R_2 = 15\ \ 45.39$,	$[r_1]$ 8.16 735,	$[r_1]$ 8.167 3469,
$R_1+R_2 = 32\ \ 2.89$,	$[\cos\frac{1}{2}(R_1+R_2)]$ 0.00 000,	$[\cos\frac{1}{2}(R_1+R_2)]$ 9.999 9953,
$R_1-R_2 = 0\ \ 32.11$;	$[\sin\frac{1}{2}(R_1-R_2)]$ 5.89 148,	$[\sin\frac{1}{2}(R_1-R_2)]$ 5.891 3204,
$\frac{1}{2}(R_1+R_2) = 16\ \ 1.45$,	$[\operatorname{cosec} R_2]$ 2.33 883,	$[\operatorname{cosec} R_2]$ 2.338 8157,
$\frac{1}{2}(R_1-R_2) = 0\ \ 16.06$;	$[r_2-r_1]$ 6.69 869,	$[r_2-r_1]$ 6.698 5083,
	$r_2-r_1 \approx 4\,996\,780$ km;	$r_2-r_1 = 4\,994\,690$ km.

(259) ~~(266)~~ Трајање (τ) обданице на паралелу географске ширине φ, оног дана кад се Сунце нађе на деклинацији δ, ако се поведе рачуна о

дејства рефракције (ако занемаре промене Сунчевих координата за време од његова излаза до залаза), одређено је обрасцем

$$\cos(90^\circ+35'+16') = -\sin 51' = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\tau + d\tau).$$

Ако развијемо други члан на десној страни и, при томе, занемаримо друге и више степене величине $d\tau$, имаћемо

$$-\sin 51' = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\tau - \cos\varphi\cos\delta\sin\tau\, d\tau.$$

Како је, међутим,

$$\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\tau = \cos 90^\circ = 0,$$

дакле $\cos\tau = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta$ (1)

добићемо из последњег израза

$$d\tau = 51'\sec\varphi\sec\delta\,\mathrm{cosec}\,\tau.$$

Према задатку је

$$d\tau = \tfrac{1}{2}15^m = 7^m5 = 112'5 \quad \text{и} \quad \delta = -10^\circ.$$

Тако да ћемо имати

$$\sin\tau = \frac{51}{112.5}\times\sec\delta\times\sec\varphi = \frac{51}{112.5}\times 1.015\times\sec\varphi.$$

Из ове и једначине (1) добићемо

$$\sin\tau = 0.460\sec\varphi,$$

$$\cos\tau = -0.176\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Ако дигнемо на квадрат па саберемо, добићемо

$$1 = 0.212\sec^2\varphi + 0.031\,\mathrm{tg}^2\varphi,$$

односно

$$\cos^2\varphi = 0.212 + 0.031\sin^2\varphi,$$

или

$$1-\sin^2\varphi = 0.212 + 0.031\sin^2\varphi,$$

а одавде имамо

$$0.788 = 1.031\sin^2\varphi, \text{ то јест } \sin^2\varphi = 0.76432, \text{ дакле } \varphi = \pm 60^\circ 57'.$$

Из „Годишњака нашег неба" видимо да предвиђено продужење настаје два пута у току године ($\delta = -10^\circ$): око 23 фебруара и око 20 октобра.

260 (267) На сл. 149 приказана је небеска сфера са Сунцем у S, вертикалним стубом OI и његовом сенком, OK, у том тренутку. Означимо висину Сунца над посматрачевим хоризонтом са h, дужину сенке (OK) са l. Усвојимо ли још, ради једноставнијег писања, дужину стуба OI за јединицу, биће

$$l = \mathrm{ctg}\,h, \qquad (1)$$

а из положајног сферног троугла

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos A,$$

где је са A означен азимут Сунца. Ако, место азимута, уведемо угао χ, дефинисан релацијом $\chi = 90^\circ - A$, последњи образац ће дати

$$\sin\chi = (\sin\varphi \sin h - \sin\delta)\sec\varphi \sec h. \qquad (2)$$

Сл. 149

Из (1) имамо, међутим,

$$\sin h = (1+l^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \sec h = (1+l^2)^{\frac{1}{2}}\, l^{-1}.$$

Унесимо ове вредности у (2) па ће бити

$$\sin\chi = \left[(1+l^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi - \sin\delta\right]\sec\varphi\, l^{-1}(1+l^2)^{\frac{1}{2}},$$

односно

$$\sin\chi = l^{-1}\left[tg\varphi - (1+l^2)^{\frac{1}{2}}\sin\delta\sec\varphi\right],$$

то јест

$$l\sin\chi = tg\varphi - (1+l^2)^{\frac{1}{2}}\sin\delta\sec\varphi.$$

Ставимо, да бисмо писање поједноставили,

$$tg\varphi = U, \qquad \sin\delta\sec\varphi = V. \qquad (3)$$

Тако ће последња једначина постати, пошто извршимо очигледне трансформације и уредимо

$$l^2(V^2 - \sin^2\chi) + 2lU\sin\chi + V^2 - U^2 = 0.$$

Заменом ли величине U и V њиховим вредностима из (3) и уведемо ли праволинијске координате (ξ,η) врха сенке, одређене изразима

$$\xi = l\cos\chi \quad и \quad \eta = l\sin\chi,$$

дакле $l^2 = \xi^2+\eta^2$ и $\sin^2\chi = \eta^2(\xi^2+\eta^2)^{-1}$, ова једначина постаје

$$\xi^2\sin^2\delta\sec^2\varphi + \eta^2(\sin^2\delta\sec^2\varphi - 1) + 2\eta\, tg\varphi + \sin^2\delta\sec^2\varphi - tg^2\varphi = 0.$$

Помножимо ли још ову једначину са $\cos^2\varphi$, да бисмо се решили неодређености за $\varphi = 90°$, добићемо коначно

$$\xi^2\sin^2\delta + \eta^2(\sin^2\delta - \cos^2\varphi) + \eta\sin 2\varphi + \sin^2\delta - \sin^2\varphi = 0,$$

што можемо написати још и у облику

$$\xi^2\sin^2\delta + \eta^2\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta) + \eta\sin 2\varphi - \sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\delta) = 0. \qquad (4)$$

Ово је тражена једначина криве коју описује врх сенке вертикалног стуба.

Облик, то јест врста и димензије криве зависе, како видимо, од Сунчева положаја δ на његовој привидној годишњој путањи и од посматрачева положаја на Земљиној површини. Тако видимо да:

1) за Земљине полове, дакле за $\varphi = \pm 90°$, једначина криве постаје

$$\xi^2\sin^2\delta + \eta^2\sin^2\delta - \cos^2\delta = 0,$$

односно

$$\xi^2 tg^2\delta + \eta^2 tg^2\delta = 1,$$

то јест

$$\xi^2 + \eta^2 = ctg^2\delta = l^2;$$

крива је, дакле, круг полупречника l — пута дужина стуба. За негативне деклинације ($\delta<0$) на северном Земљином полу, а за позитивне ($\delta>0$) на јужном Земљину полу нема сенке, јер се Сунце у то време налази под хоризонтом. За $\delta=0$, дакле у дане еквинокција, Сунце се налази у равни небеског екватора, што за Земљине полове значи у равни хоризонта, а то значи да је $h=0$, дакле — према (1) — l (то јест дужина сенке) је бескрајно.

2) Дуж Земљина екватора, дакле ако је $\varphi = 0^\circ$, једначина криве постаје

$$\xi^2 \sin^2\delta_\odot + \eta^2(\sin^2\delta_\odot - 1) + \sin^2\delta_\odot = 0,$$

то јест

$$\xi^2 \sin^2\delta_\odot - \eta^2 \cos^2\delta_\odot + \sin^2\delta_\odot = 0.$$

И видимо да је, за $\delta_\odot = 0$, то јест у дане еквинокција, $\eta = \pm 0$, другим речима, крива коју у току дана опише врх сенке је права паралелна правцу E-W. Све преостало време у току године је једначина

$$\xi^2 - \eta^2 \operatorname{ctg}^2\delta_\odot + 1 = 0,$$

што ће рећи, крива врха сенке је хипербола.

3) На свим осталим на Земљиној површини, за $\delta_\odot = 0$, то јест у дане еквинокција, једначина криве коју опише врх сенке постаје

$$\eta^2 \cos^2\varphi - \eta \sin 2\varphi + \sin^2\varphi = 0,$$

то јест

$$\eta^2 \pm 2\eta \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi = 0,$$

односно

$$(\eta \pm \operatorname{tg}\varphi)^2 = 0, \qquad \eta = \mp \operatorname{tg}\varphi,$$

дакле једначина праве. У току преосталих дана године једначина криве има облик (4). И видимо да ће крива бити:

ако је $\left\{\begin{matrix} |\varphi + \delta_\odot| \\ |\varphi - \delta_\odot| \end{matrix}\right\} < 90^\circ$, хипербола; ако је $\left\{\begin{matrix} |\varphi + \delta_\odot| \\ |\varphi - \delta_\odot| \end{matrix}\right\} = 90^\circ$, парабола;

ако је $\left\{\begin{matrix} |\varphi + \delta_\odot| \\ |\varphi - \delta_\odot| \end{matrix}\right\} > 90^\circ$, елипса.

1/2

261. ~~268.~~ Трајање обданице ($2H$), на географској ширини φ, кад Сунце достигне деклинацију $\delta_\odot$ одређено је изразом

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot.$$

За почетак непрекидне обданице (преко 24 часа), на географској ширини φ, узима се тренутак кад, у доњој својој кулминацији, Сунце остаје над посматрачевим хоризонтом. У том положају — то јест за $H = 180^\circ$ — горњи образац постаје

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot = 1.$$

Ако дигнемо на квадрат биће

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{ctg}^2\delta_\odot,$$

што можемо написати

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2\delta_\odot,$$

а што даје

$$\sin^2\delta_\odot = \cos^2\varphi.$$

Из правоуглог сферног троугла, одређена еквинокцијском (γ) тачком, Сунчевим положајем (1) на еклиптици и пројекцијом овога на небески екватор,

имамо, међутим,

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\Lambda.$$

Дигнемо ли ову једначину на квадрат и заменимо ли у њој горње вредности, налазимо за услов који Сунчеви положаји треба да испуњавају да би на датом паралелу владала непрекидна обданица

$$\sin^2\Lambda = \cos^2\varphi \operatorname{cosec}^2\varepsilon.$$

Од четири вредности Λ-е, између 0° и 360°, које задовољавају горњу једначину, нашем задатку одговарају оне из прва два квадранта, дакле $0 < \Lambda_1 < 90^\circ$ и $\Lambda_2 = 180^\circ - \Lambda_1$. Према подацима задатка биће, дакле

$[\cos\varphi]$	9.52 634,	то јест: $\Lambda_1 = 57^\circ 36'$, што одговара 19 мају,
$[\operatorname{cosec}\varepsilon]$	0.40 017,	$\Lambda_2 = 122\ 24$, " " 26 јулу;
$[\sin\Lambda]$	9.92 651;	а износи укупно 68 дана.

<u>Други начин.</u> Време (број дана) које Сунце остаје <u>над</u>, односно <u>под</u>, хоризонтом неког места са поларних капа може се одредити још на један начин — ако се занемари дејство рефракције. Да ово покажемо послужити ћемо се сликама 150 и 151, које представљају Земљину сферу, на којој су уцртани и означени са:

сл. 150

сл. 151

P_n и P_s — Земљини полови;
Π_n и Π_s — тачке пресека Земљине површине еклиптичком осом;
E_1E_2 — Земљин екватор;
E_nE_s — пресек Земљине површине и равни еклиптике;
$G_1\Pi_nP_nG_2$ — Земљин велики круг чији је пол пресек Земљине површине правцем $O\gamma$, или (геоцентричним) правцем Сунчева положаја на дан пролетње равнодневице;
$K_nQ\Pi_nK_s$ — Земљин велики круг чији је пол пресек Земљине површине правцем OS_n, или (геоцентричним) правцем Сунчева положаја око месец дана пре летњег солстиција.

Са ових слика видимо, дакле, да геоцентрични правац Сунца одређује на Земљиној површини пол великог круга — назваћемо га <u>граничним</u> кругом — који дели обасјану од необасјане Земљине половине. Видимо и то да се гранични круг двапута свега у току године — у дане пролетње (21 марта) и јесење (23 септембра) равнодневице — поклапа са једним од небеских меридијана: оним што пролази кроз еклиптичка полове. Према томе, у те дане — и само у те дане у току године — гранични круг полови Земљине паралеле, дакле и екватор. Значи, само у дане равнодневице остаје Сунце, на свим тачкама Земљине површине, половину дана (своје привидне дневне путање) <u>над</u>, половину <u>под</u> хоризонтом.

Усвојимо, сад, за почетни положај граничног круга — $G_1\Pi_nP_nG_2$ (в. сл.150), дакле круг одређен Сунчевим геоцентричним положајем у тренутку његова пролаза кроз пролетњу еквинокцијску тачку. Онда ће, у било којем другом тренутку, рецимо, кад Сунце буде пролазило кроз правац OS_n — одређен геоцентричном лонгитудом Сунца Λ — положај граничног круга бити (в. сл.151) $K_nQ\Pi_nK_s$. Овај, као што видимо, образује са почетним положајем граничног круга сферни угао $P_n\Pi_nQ = \Lambda$; дакле, не поклапа се више ни са једним небеским меридијаном. Сем тога видимо да кроз Сунчев положај повучени небески меридијан одређује на граничном кругу тачку Q — колатитуде једнаке Сунчевој деклинацији — која, са половима P_n и Π_n, образује правоугли сферни троугао. Уједно видимо да је колатитуда тачке Q

одређен сферни полупречник поларне капе на којој Сунце тог, или тих, дана не залази (односно не излази): значи свој дневни лук, или дневне лукове, проводи над (односно под) хоризонтом места.

Од тренутка кад ту вредност достигне, сферни полупречник – а, са њиме, и површина – стално обасјане поларне капе повећавају се до својих највећих могућих вредности, које достижу за $\Lambda = 90^\circ$ (односно $\Lambda = 270^\circ$). Сферни полупречник капе има тада вредност $P_n\Pi_n = 23^\circ 27'$, а поларна капа са непрекидним даном достиже до северног (односно јужног) поларног круга. Затим се сферни полупречник – а, са њиме, и површина – обасјане поларне капе поново смањивати, пролазећи кроз исте вредности као и док је $\Lambda \to 90^\circ$, само обрнутим редом.

Према томе, време за које Сунце не залази (односно не излази) на одређеном месту, географске ширине φ, са површине поларних капа, представљено је бројем дана у току којих Сунчева деклинација (узета апсолутно) остаје већа од колатитуде уоченог места.

Значи, за место на паралели $\varphi = +70^\circ 22'$, чија је колатитуда $90^\circ - \varphi = +19^\circ 38'$, Сунце у току године не залази за све време док му деклинација остаје $(\delta) \geq +19^\circ 38'$. А то одговара – као што из „Годишњака нашег неба" можемо видети – временском размаку од 19 маја до 26 јула, дакле 67 дана у току године.

Добивени резултат можемо проверити помоћу обрасца који имамо за правоугли сферни троугао $P_n\Pi_n Q$:

$$\sin\Lambda = \cos\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon.$$

Са вредностима задатка и познатом вредношћу за ε имамо:

[cosφ] 9.52 634,
[cosec ε] 0.40 017,
[sin Λ] 9.92 651; $\Lambda_1 = 57^\circ 36'$, $\Lambda_2 = 122^\circ 24'$, што одговара нађеним датумима, па, према томе, и горњем временском размаку.

одређен сферни полупречник поларне капе на којој Сунце тог, или тих, дана не залази (односно не излази): значи свој дневни лук, или дневне лукове, проводи над (односно под) хоризонтом места.

Од тренутка кад ту вредност достигне, сферни полупречник – а, са њиме, и површина – стално обасјане поларне капе повећавају се до својих највећих могућих вредности, које достижу за $\Lambda = 90°$ (односно $\Lambda = 270°$). Сферни полупречник капе има тада вредност $P_1\Pi_1 = 23°27'$, а поларна капа са непрекидним даном достиже до северног (односно јужног) поларног круга. Затим се сферни полупречник – а, са њиме, и површина – обасјане поларне капе почињу смањивати, пролазећи кроз исте вредности као и док је $\Lambda \to 90°$, само обрнутим редом.

Према томе, време за које Сунце не залази (односно не излази) на одређеном месту, географске ширине φ, са површине поларних капа, представљено је бројем дана у току којих Сунчева деклинација (узета апсолутно) остаје већа од колатитуде уоченог места.

Значи, за место на паралели $\varphi = +70°22'$, чија је колатитуда $90° - \varphi = +19°38'$, Сунце у току године не залази за све време док му деклинација остаје $(D) \geq +19°38'$. А то одговара – као што из „Годишњака нашег неба" можемо видети – временском размаку од 19 маја до 26 јула, дакле 67 дана у току године.

Добивени резултат можемо проверити помоћу обрасца који имамо за правоугли сферни троугао $P_1\Pi_1 Q$:

$$\sin\Lambda = \cos\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon .$$

Са вредностима задатка и познатом вредношћу за ε имамо:

[cos φ] 9.52 634,
[cosec ε] 0.40 017,
[sin Λ] 9.92 651; $\Lambda_1 = 57°36'$, $\Lambda_2 = 122°24'$, што одговара

нађеним датумима, па, према томе, и горњем временском размаку.



Slog petit na 28 c.

Вредности средње рефракције / p. v. 1/2 8l

z	R_0	z		R_0	Δ	z		R_0	Δ
0°	0″.0	30°	0′	71″.5	0″.4	75°	0′	221″.0	2″.5
1	1.1		30	72.8	0.4		20	226.1	2.6
2	2.1	51	0	74.1	0.4		40	231.4	2.8
3	3.2		30	75.4	0.4	76	0	237.0	2.9
4	4.2	52	0	76.8	0.5		20	242.8	3.0
5	5.3		30	78.2	0.5		40	248.9	3.2
6	6.3	53	0	79.6	0.5	77	0	255.2	3.4
7	7.4		30	81.1	0.5		20	261.9	3.5
8	8.5	54	0	82.6	0.5		40	268.9	3.7
9	9.5		30	84.1	0.5	78	0	276.3	3.9
10	10.6	55	0	85.6	0.6		20	284.0	4.1
11	11.7		30	87.3	0.5		40	292.2	4.3
12	12.8	56	0	88.9	0.6	79	0	300.8	4.6
13	13.9		30	90.6	0.6		20	309.9	4.9
14	15.0	57	0	92.3	0.6		40	319.6	5.1
15	16.1		30	94.1	0.6	80	0	329.8	5.4
16	17.2	58	0	95.9	0.6		20	340.6	5.8
17	18.4		30	97.8	0.6		40	352.2	6.2
18	19.5	59	0	99.7	0.7	81	0	364.5	6.6
19	20.7		30	101.7	0.7		20	377.7	7.0
20	21.9	60	0	103.8	0.7		40	391.7	7.6
21	23.1		30	105.9	0.7	82	0	406.8	8.1
22	24.3	61	0	108.0	0.8		20	423.0	8.7
23	25.5		30	110.3	0.8		40	440.4	9.5
24	26.8	62	0	112.6	0.8	83	0	459.3	10.2
25	28.0		30	115.0	0.8		20	479.7	11.1
26	29.3	63	0	117.5	0.8		40	501.9	12.1
27	30.6		30	120.0	0.9	84	0	526.1	13.2
28	32.0	64	0	122.7	0.9		20	552.5	14.6
29	33.3		30	125.4	0.9		40	581.6	15.9
30	34.7	65	0	128.3	0.9	85	0	613.5	17.2
31	36.1		30	131.2	1.0		10	630.7	18.2
32	37.5	66	0	134.3	1.0		20	648.9	19.1
33	39.0		30	137.4	1.1		30	668.0	20.1
34	40.5	67	0	140.7	1.2		40	688.1	21.2
35	42.1		30	144.2	1.2		50	709.3	22.5
36	43.6	68	0	147.8	1.2	86	0	731.8	23.8
37	45.3		30	151.5	1.3		10	755.6	25.3
38	46.9	69	0	155.4	1.4		20	780.9	26.8
39	48.6		30	159.5	1.4		30	807.7	28.5
40	50.4	70	0	163.8	1.5		40	836.2	30.3
41	52.2		30	168.3	1.6		50	866.5	32.3
42	54.1	71	0	173.0	1.6	87	0	898.8	34.5
43	56.0		30	177.9	1.7		10	933.3	36.9
44	58.0	72	0	183.1	1.8		20	970.2	39.5
45	60.0		30	188.6	1.9		30	1009.7	42.4
46	62.2	73	0	194.3	2.0		40	1052.1	45.5
47	64.4		30	200.4	2.2		50	1097.6	49.0
48	66.7	74	0	206.9	2.3	88	0	1146.6	52.8
49	69.0		30	213.7	2.4		10	1199.4	57.0
50	71.5	75	0	221.0		88	20	1256.4	

τ

Терм.°	τ	Δ
− 20°	+ 0.083	− 4.4
− 15	+ .061	− 4.2
− 10	+ .040	− 4.1
− 5	+ .020	− 3.9
0	0.000	− 3.8
+ 5	− .019	− 3.6
+ 10	− .037	− 3.5
+ 15	− .055	− 3.4
+ 20	− .071	− 3.3
+ 25	− .088	− 3.2
+ 30	− .104	− 3.1
+ 35	− .119	− 3.0
+ 40	− 0.134	

β

Баром.°	β
650	− 0.145
655	− .138
660	− .132
665	− .125
670	− .118
675	− .112
680	− .105
685	− .099
690	− .092
695	− .086
700	− .079
705	− .072
710	− .066
715	− .059
720	− .053
725	− .046
730	− .040
735	− .033
740	− .026
745	− .020
750	− .013
755	− .007
760	0.000
765	+ .007
770	+ .013
775	+ .020
780	+ .026
785	+ .033
790	+ 0.039

679 Pax 0.16949

Datum 1920	T	α_δ m.	$\Delta\alpha_m$	$\Delta\alpha_t$			$A_☾$	$\alpha - A_☾ = \psi$	$\frac{\Delta\alpha_t}{\Delta\alpha_0} = \frac{\alpha}{\beta}$	Ω^0	Ω^h	$\Omega - \psi$
	− 40											
	35											
	30											
XI-28	25	6h 37.4m										
XII-3	20	33.1	−4.3	−4.65			4h 40.2m	+1h 52.9m	0.7881	37° 59′	2h 31.9m	0h 39.0m
8	15	28.1	−5.0	−5.25			5 2.0	1 26.1	8898	27 9	1 48.6	0 22.5
13	10	22.6	−5.5	−5.65			5 24.0	0 58.6	9576	16 45	1 7.0	0 8.4
18	− 5	16.8	−5.8	−5.85			5 46.2	0 30.6	0.9915	7 28	0 29.9	−0 0.7
☍ XII-23	0	6 10.9	−5.9	−5.90			6 8.4	+0 2.5	1.0000	0 0	0 0.0	−0 2.5
28	+ 5	6 5.0	−5.9	−5.75			6 30.5	−0 25.5	0.9746	12 56	0 51.7	0 26.2
1921-I-2	10	5 59.4	−5.6	−5.35			6 50.4	0 51.0	9068	24 56	1 39.7	0 48.7
7	15	54.3	−5.1	−4.80			7 12.4	1 18.1	8136	35 33	2 22.2	1 4.1
12	20	49.8	−4.5	−4.15			7 34.2	1 44.4	7034	45 18	3 1.2	1 26.8
17	25	46.0	−3.8	−3.35			7 55.7	2 9.7	5678	55 24	3 41.6	1 31.9
22	30	43.1	−2.9	−2.45			8 16.9	2 33.8	4153	65 27	4 21.8	1 48.0
27	35	41.1	−2.0	−1.60			8 37.8	2 52.7	0.2712	74 16	4 57.7	2 [illegible].4
II-1	+ 40	39.9	−1.2									

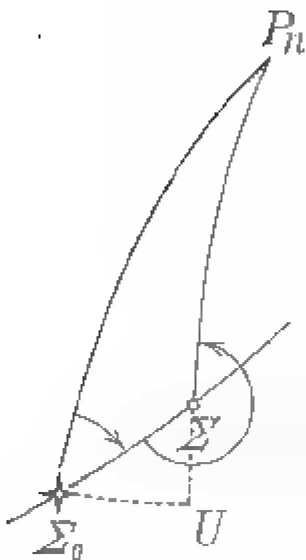
112 Iphigenie 0.17699

Datum 1921	T	α_δ m.	$\Delta\alpha_m$	$\Delta\alpha_t$			$A_☾$	$\alpha - A_☾ = \psi$	$\frac{\Delta\alpha_t}{\Delta\alpha_0} =$	Ω^0	Ω^h	$\Omega - \psi$
	− 40											
	35											
	30											
9	25	7h 21.5m										
14	20	17.2	−4.3	−4.55			5h 28.4m	+1h 48.8m	0.8053	36° 21′	2h 25.4m	0h 36.6m
19	15	12.4	−4.8	−5.00			5 50.6	1 21.8	8850	27 44	1 50.9	0 29.1
24	10	7.2	−5.2	−5.40			6 12.8	0 44.4	0.9557	17 7	1 8.5	0 24.1
1920-XII-29	− 5	7 1.6	−5.6	−5.65			6 35.0	0 26.6	1.0000	0 0	0 0.0	−0 26.6
☍ I-3	0	6 55.9	−5.7	−5.65			6 54.8	+0 1.1	1.0000	0 0	0 0.0	−0 1.1
8	+ 5	50.3	−5.6	−5.50			7 16.8	−0 26.5	0.9734	13 15	0 53.0	0 26.5
13	10	44.9	−5.4	−5.25			7 38.5	0 43.6	9292	21 41	1 26.7	0 43.1
18	15	39.8	−5.1	−4.80			7 59.9	1 20.1	8496	31 50	2 7.3	0 47.2
23	20	35.3	−4.5	−4.35			8 21.1	1 45.8	7699	39 39	2 38.6	0 52.8
28	25	31.1	−4.2	−3.55			8 41.9	2 10.8	6283	51 4	3 24.3	1 13.5
II-2	30	28.2	−2.9	−2.65			9 2.4	2 34.2	4690	62 2	4 8.1	1 33.9
7	35	25.8	−2.4	−2.00			9 22.6	2 56.8	0.3540	69 16	4 37.1	1 40.3
12	+ 40	24.2	−1.6									

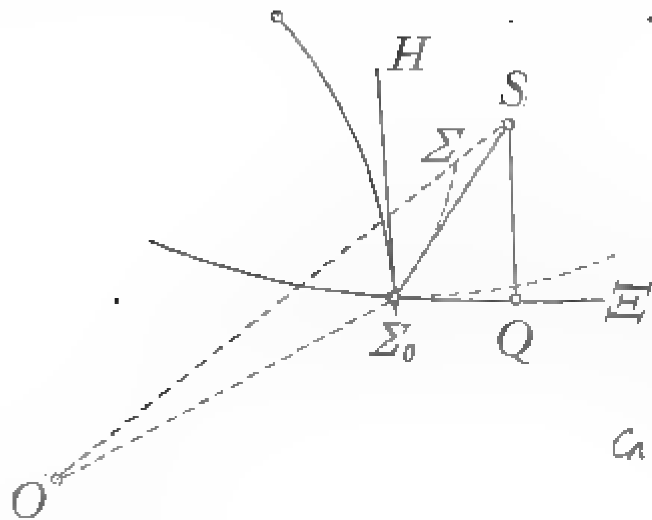
M \ e	0·05	0·10	0·15	0·20	0·25	0·30	0·35	0·40	0·45	0·50	0·55	0·60	e / M
1	0·05	0·11	0·18	0·25	0·33	0·43	0·54	0·67	0·82	1·00	1·22	1·50	1
2	0·11	0·22	0·35	0·50	0·67	0·86	1·08	1·33	1·63	2·00	2·44	2·99	2
3	0·16	0·33	0·53	0·75	1·00	1·28	1·61	2·00	2·45	2·99	3·65	4·47	3
4	0·21	0·44	0·70	1·00	1·33	1·71	2·15	2·66	3·26	3·97	4·85	5·93	4
5	0·26	0·55	0·88	1·25	1·66	2·14	2·68	3·31	4·06	4·95	6·03	7·36	5
6	0·32	0·66	1·05	1·49	1·99	2·56	3·21	3·97	4·86	5·91	7·19	8·76	6
7	0·37	0·77	1·23	1·74	2·32	2·98	3·73	4·61	5·64	6·86	8·33	10·12	7
8	0·42	0·88	1·40	1·99	2·65	3·40	4·26	5·26	6·42	7·80	9·45	11·44	8
9	0·47	0·99	1·58	2·23	2·97	3·81	4·77	5·89	7·19	8·72	10·54	12·72	9
10	0·52	1·10	1·75	2·47	3·29	4·22	5·29	6·52	7·94	9·62	11·60	13·96	10
11	0·57	1·21	1·92	2·72	3·62	4·63	5·79	7·13	8·69	10·50	12·63	15·15	11
12	0·63	1·32	2·09	2·96	3·93	5·04	6·30	7·74	9·41	11·36	13·63	16·30	12
13	0·68	1·43	2·26	3·20	4·25	5·44	6·79	8·34	10·13	12·20	14·60	17·39	13
14	0·73	1·53	2·43	3·43	4·56	5·83	7·28	8·93	10·82	13·01	15·53	18·44	14
15	0·78	1·64	2·60	3·67	4·87	6·22	7·76	9·51	11·51	13·80	16·44	19·44	15
16	0·83	1·75	2·76	3·90	5·17	6·61	8·23	10·07	12·17	14·57	17·30	20·40	16
17	0·88	1·85	2·93	4·13	5·48	6·99	8·69	10·63	12·82	15·31	18·14	21·31	17
18	0·93	1·95	3·09	4·36	5·77	7·36	9·15	11·17	13·45	16·03	18·94	22·18	18
19	0·98	2·06	3·25	4·58	6·07	7·73	9·60	11·70	14·07	16·73	19·70	23·01	19
20	1·03	2·16	3·42	4·81	6·36	8·10	10·04	12·22	14·66	17·40	20·44	23·79	20
21	1·08	2·26	3·57	5·03	6·65	8·45	10·47	12·72	15·24	18·05	21·15	24·53	21
22	1·13	2·36	3·73	5·25	6·93	8·80	10·89	13·22	15·80	18·67	21·82	25·24	22
23	1·17	2·46	3·89	5·46	7·21	9·15	11·30	13·69	16·35	19·27	22·46	25·91	23
24	1·22	2·56	4·04	5·67	7·48	9·48	11·70	14·16	16·87	19·84	23·08	26·54	24
25	1·27	2·66	4·19	5·88	7·75	9·81	12·09	14·61	17·38	20·40	23·66	27·14	25
26	1·31	2·76	4·34	6·09	8·02	10·14	12·48	15·05	17·87	20·93	24·22	27·71	26
27	1·36	2·85	4·49	6·29	8·27	10·45	12·85	15·48	18·34	21·43	24·75	28·24	27
28	1·41	2·95	4·64	6·49	8·53	10·76	13·21	15·89	18·79	21·92	25·25	28·75	28
29	1·45	3·04	4·78	6·68	8·77	11·06	13·56	16·29	19·23	22·38	25·73	29·22	29
30	1·50	3·13	4·92	6·88	9·02	11·36	13·91	16·67	19·65	22·83	26·18	29·67	30
31	1·54	3·22	5·06	7·06	9·25	11·64	14·23	17·04	20·05	23·25	26·61	30·09	31
32	1·58	3·31	5·20	7·25	9·49	11·92	14·56	17·40	20·44	23·65	27·02	30·49	32
33	1·62	3·40	5·33	7·43	9·72	12·20	14·87	17·75	20·81	24·04	27·40	30·86	33
34	1·67	3·49	5·47	7·61	9·94	12·46	15·17	18·08	21·16	24·40	27·76	31·21	34
35	1·71	3·57	5·59	7·78	10·16	12·72	15·47	18·40	21·50	24·75	28·10	31·53	35
36	1·76	3·66	5·72	7·95	10·37	12·97	15·75	18·71	21·82	25·07	28·43	31·84	36
37	1·80	3·74	5·84	8·12	10·57	13·21	16·02	19·00	22·13	25·38	28·73	32·12	37
38	1·84	3·82	5·97	8·28	10·77	13·44	16·28	19·28	22·42	25·68	29·01	32·38	38
39	1·87	3·90	6·09	8·44	10·97	13·67	16·53	19·55	22·70	25·95	29·27	32·62	39
40	1·91	3·98	6·20	8·60	11·16	13·89	16·78	19·81	22·97	26·22	29·52	32·85	40
41	1·95	4·06	6·32	8·75	11·34	14·10	17·01	20·06	23·22	26·46	29·75	33·06	41
42	1·99	4·13	6·43	8·89	11·52	14·30	17·23	20·29	23·45	26·69	29·96	33·24	42
43	2·03	4·20	6·54	9·03	11·69	14·50	17·44	20·51	23·68	26·90	30·16	33·42	43
44	2·06	4·28	6·65	9·17	11·85	14·69	17·65	20·72	23·89	27·10	30·34	33·57	44
45	2·10	4·35	6·75	9·31	12·02	14·87	17·84	20·92	24·08	27·29	30·51	33·71	45
46	2·13	4·42	6·85	9·44	12·17	15·04	18·03	21·11	24·27	27·46	30·66	33·84	46

M \ e	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	e / M
°													
61	2°57	5°24	8°02	10°89	13°82	16°80	19°80	22°78	25°74	28°65	31°48	34°23	
62	2.59	5.28	8.08	10.95	13.89	16.87	19.85	22.83	25.76	28.65	31.46	34.18	
63	2.61	5.32	8.13	11.02	13.95	16.92	19.90	22.86	25.78	28.64	31.42	34.11	
64	2.63	5.36	8.18	11.07	14.01	16.98	19.95	22.88	25.78	28.62	31.37	34.04	
65	2.65	5.40	8.23	11.12	14.06	17.02	19.98	22.90	25.78	28.59	31.32	33.96	
66	2.67	5.43	8.27	11.17	14.11	17.06	20.01	22.91	25.77	28.56	31.26	33.87	
67	2.69	5.46	8.31	11.22	14.15	17.10	20.03	22.92	25.75	28.51	31.19	33.77	
68	2.70	5.49	8.35	11.26	14.19	17.13	20.04	22.91	25.73	28.47	31.11	33.67	
69	2.72	5.52	8.39	11.29	14.22	17.15	20.05	22.90	25.70	28.41	31.03	33.56	
70	2.74	5.55	8.42	11.33	14.25	17.17	20.05	22.89	25.66	28.34	30.94	33.44	
71	2.75	5.57	8.45	11.36	14.28	17.18	20.05	22.87	25.61	28.27	30.84	33.31	
72	2.76	5.60	8.48	11.38	14.29	17.19	20.04	22.84	25.56	28.20	30.74	33.18	
73	2.78	5.62	8.50	11.40	14.31	17.19	20.03	22.80	25.50	28.11	30.63	33.04	
74	2.79	5.64	8.52	11.42	14.32	17.19	20.00	22.76	25.43	28.02	30.51	32.89	
75	2.80	5.65	8.54	11.44	14.32	17.18	19.98	22.71	25.36	27.92	30.38	32.74	
76	2.81	5.67	8.56	11.45	14.32	17.16	19.95	22.66	25.28	27.82	30.25	32.58	
77	2.82	5.68	8.57	11.45	14.32	17.14	19.91	22.60	25.20	27.71	30.12	32.42	
78	2.83	5.69	8.58	11.46	14.31	17.12	19.86	22.53	25.11	27.59	29.97	32.25	
79	2.84	5.70	8.59	11.46	14.30	17.09	19.82	22.46	25.02	27.47	29.83	32.08	
80	2.84	5.71	8.59	11.46	14.28	17.06	19.76	22.39	24.91	27.34	29.67	31.90	
81	2.85	5.72	8.59	11.45	14.26	17.02	19.70	22.30	24.81	27.21	29.51	31.71	
82	2.85	5.72	8.59	11.44	14.24	16.98	19.64	22.22	24.70	27.07	29.35	31.52	
83	2.86	5.73	8.59	11.42	14.21	16.93	19.57	22.12	24.58	26.93	29.18	31.33	
84	2.86	5.73	8.59	11.41	14.18	16.88	19.50	22.03	24.46	26.78	29.01	31.12	
85	2.86	5.73	8.58	11.39	14.14	16.82	19.42	21.93	24.33	26.63	28.83	30.92	
86	2.86	5.73	8.57	11.36	14.10	16.76	19.34	21.82	24.20	26.47	28.64	30.71	
87	2.86	5.72	8.55	11.34	14.06	16.70	19.25	21.71	24.06	26.31	28.45	30.49	
88	2.86	5.72	8.54	11.31	14.01	16.63	19.16	21.59	23.92	26.14	28.26	30.28	
89	2.86	5.71	8.52	11.27	13.96	16.56	19.06	21.47	23.77	25.97	28.06	30.05	
90	2.86	5.70	8.50	11.24	13.90	16.48	18.96	21.35	23.62	25.79	27.86	29.82	
91	2.86	5.69	8.48	11.20	13.85	16.40	18.86	21.22	23.47	25.61	27.65	29.59	
92	2.85	5.68	8.45	11.16	13.78	16.32	18.75	21.08	23.31	25.43	27.44	29.36	
93	2.85	5.66	8.42	11.11	13.72	16.23	18.64	20.95	23.14	25.24	27.23	29.12	
94	2.84	5.65	8.39	11.06	13.65	16.14	18.52	20.80	22.98	25.05	27.01	28.87	
95	2.84	5.63	8.36	11.01	13.58	16.04	18.40	20.66	22.81	24.85	26.79	28.63	
96	2.83	5.61	8.33	10.96	13.50	15.94	18.28	20.51	22.63	24.65	26.56	28.37	
97	2.82	5.59	8.29	10.90	13.42	15.84	18.15	20.35	22.45	24.44	26.33	28.12	
98	2.81	5.57	8.25	10.84	13.34	15.73	18.02	20.20	22.27	24.23	26.10	27.86	
99	2.80	5.55	8.21	10.78	13.26	15.63	17.89	20.04	22.08	24.02	25.86	27.60	
100	2.79	5.52	8.17	10.72	13.17	15.51	17.75	19.87	21.89	23.80	25.62	27.33	
101	2.78	5.49	8.12	10.65	13.08	15.40	17.61	19.70	21.70	23.59	25.37	27.07	
102	2.77	5.46	8.07	10.58	12.98	15.28	17.46	19.53	21.50	23.36	25.13	26.79	
103	2.76	5.43	8.02	10.51	12.89	15.15	17.31	19.36	21.30	23.14	24.88	26.52	
104	2.74	5.40	7.97	10.43	12.79	15.03	17.16	19.18	21.10	22.91	24.62	26.24	
105	2.73	5.37	7.92	10.36	12.68	14.90	17.01	19.00	20.89	22.67	24.36	25.96	
106	2.71	5.34	7.86	10.28	12.58	14.77	16.85	18.82	20.68	22.44	24.10	25.68	

M \ e	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	e \ M
121	2.39	4.66	6.79	8.80	10.70	12.47	14.14	15.71	17.19	18.58	19.88	21.11	
122	2.36	4.60	6.71	8.69	10.55	12.30	13.94	15.49	16.94	18.30	19.58	20.79	
123	2.34	4.54	6.62	8.57	10.41	12.13	13.74	15.26	16.68	18.02	19.28	20.47	
124	2.31	4.49	6.53	8.45	10.26	11.95	13.54	15.03	16.43	17.74	18.98	20.14	
125	2.28	4.43	6.44	8.33	10.11	11.77	13.33	14.79	16.17	17.46	18.67	19.81	
126	2.25	4.37	6.35	8.21	9.96	11.59	13.12	14.56	15.91	17.17	18.36	19.48	
127	2.22	4.30	6.26	8.09	9.80	11.41	12.91	14.32	15.64	16.88	18.05	19.15	
128	2.19	4.24	6.16	7.97	9.65	11.23	12.70	14.08	15.38	16.60	17.74	18.82	
129	2.16	4.18	6.07	7.84	9.49	11.04	12.49	13.84	15.11	16.31	17.43	18.48	
130	2.12	4.11	5.97	7.71	9.33	10.85	12.27	13.60	14.85	16.01	17.11	18.14	
131	2.09	4.05	5.88	7.58	9.17	10.66	12.05	13.35	14.58	15.72	16.79	17.81	
132	2.06	3.98	5.78	7.45	9.01	10.47	11.83	13.11	14.30	15.42	16.48	17.47	
133	2.02	3.91	5.68	7.32	8.85	10.28	11.61	12.86	14.03	15.13	16.16	17.12	
134	1.99	3.84	5.57	7.18	8.68	10.08	11.39	12.61	13.76	14.83	15.83	16.78	
135	1.96	3.77	5.47	7.05	8.52	9.89	11.17	12.36	13.48	14.53	15.51	16.44	
136	1.92	3.70	5.37	6.91	8.35	9.69	10.94	12.11	13.20	14.23	15.19	16.09	
137	1.88	3.63	5.26	6.77	8.18	9.49	10.71	11.85	12.92	13.92	14.86	15.74	
138	1.85	3.56	5.15	6.63	8.01	9.29	10.48	11.60	12.64	13.62	14.53	15.40	
139	1.81	3.49	5.05	6.49	7.84	9.09	10.25	11.34	12.36	13.31	14.21	15.05	
140	1.77	3.42	4.94	6.35	7.66	8.88	10.02	11.08	12.07	13.00	13.88	14.70	
141	1.73	3.34	4.83	6.21	7.49	8.68	9.79	10.82	11.79	12.69	13.55	14.34	
142	1.70	3.27	4.72	6.06	7.31	8.47	9.55	10.56	11.50	12.38	13.21	13.99	
143	1.66	3.19	4.60	5.92	7.13	8.26	9.32	10.30	11.22	12.07	12.88	13.63	
144	1.62	3.11	4.49	5.77	6.95	8.05	9.08	10.03	10.93	11.76	12.54	13.28	
145	1.58	3.03	4.38	5.62	6.77	7.85	8.84	9.77	10.64	11.45	12.21	12.92	
146	1.54	2.96	4.26	5.47	6.59	7.63	8.60	9.50	10.34	11.13	11.87	12.56	
147	1.50	2.88	4.15	5.32	6.41	7.42	8.36	9.24	10.05	10.82	11.53	12.20	
148	1.46	2.80	4.03	5.17	6.23	7.21	8.12	8.97	9.76	10.50	11.19	11.84	
149	1.41	2.72	3.91	5.02	6.04	6.99	7.88	8.70	9.46	10.18	10.85	11.48	
150	1.37	2.64	3.80	4.87	5.86	6.78	7.63	8.43	9.17	9.86	10.51	11.12	
151	1.33	2.55	3.68	4.71	5.67	6.56	7.39	8.16	8.87	9.54	10.17	10.76	
152	1.29	2.47	3.56	4.56	5.48	6.34	7.14	7.88	8.57	9.22	9.83	10.40	
153	1.24	2.39	3.44	4.40	5.30	6.12	6.89	7.61	8.28	8.90	9.48	10.03	
154	1.20	2.30	3.32	4.25	5.11	5.91	6.65	7.34	7.98	8.58	9.14	9.67	
155	1.16	2.22	3.19	4.09	4.92	5.69	6.40	7.06	7.68	8.25	8.79	9.30	
156	1.11	2.13	3.07	3.93	4.73	5.46	6.15	6.78	7.38	7.93	8.45	8.93	
157	1.07	2.05	2.95	3.77	4.54	5.24	5.90	6.51	7.07	7.61	8.10	8.57	
158	1.03	1.96	2.82	3.61	4.34	5.02	5.65	6.23	6.77	7.28	7.75	8.20	
159	0.98	1.88	2.70	3.45	4.15	4.80	5.39	5.95	6.47	6.95	7.41	7.83	
160	0.94	1.79	2.57	3.29	3.96	4.57	5.14	5.67	6.17	6.63	7.06	7.46	
161	0.89	1.70	2.45	3.13	3.76	4.35	4.89	5.39	5.86	6.30	6.71	7.09	
162	0.84	1.62	2.32	2.97	3.57	4.12	4.64	5.11	5.56	5.97	6.36	6.72	
163	0.80	1.53	2.20	2.81	3.37	3.90	4.38	4.83	5.25	5.64	6.01	6.35	
164	0.75	1.44	2.07	2.65	3.18	3.67	4.13	4.55	4.94	5.31	5.66	5.98	
165	0.71	1.35	1.94	2.48	2.98	3.44	3.87	4.27	4.64	4.98	5.31	5.61	
166	0.66	1.26	1.81	2.32	2.79	3.22	3.61	3.98	4.33	4.65	4.95	5.24	
167	0.61	1.17	1.69	2.16	2.59	2.99	3.36	3.70	4.02	4.32	4.60	4.86	
168	0.57	1.08	1.56	1.99	2.39	2.76	3.10	3.42	3.72	3.99	4.25	4.49	
169	0.52	1.00	1.43	1.83	2.19	2.53	2.84	3.14	3.41	3.66	3.90	4.12	
170	0.47	0.91	1.30	1.66	1.99	2.30	2.59	2.85	3.10	3.33	3.54	3.75	
171	0.43	0.82	1.17	1.50	1.80	2.07	2.33	2.57	2.79	3.00	3.19	3.37	
172	0.38	0.73	1.04	1.33	1.60	1.84	2.07	2.28	2.48	2.66	2.84	3.00	
173	0.33	0.64	0.91	1.16	1.40	1.61	1.81	2.00	2.17	2.33	2.48	2.62	
174	0.29	0.54	0.78	1.00	1.20	1.38	1.55	1.71	1.86	2.00	2.13	2.25	
175	0.24	0.45	0.65	0.83	1.00	1.15	1.30	1.43	1.55	1.67	1.77	1.87	
176	0.19	0.36	0.52	0.67	0.80	0.92	1.04	1.14	1.24	1.33	1.42	1.50	
177	0.14	0.27	0.39	0.50	0.60	0.69	0.78	0.86	0.93	1.00	1.07	1.12	
178	0.10	0.18	0.26	0.33	0.40	0.46	0.52	0.57	0.62	0.67	0.71	0.75	
179	0.05	0.08	0.13	0.17	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37	
180	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
M / e	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	M / e



P_n
Σ
Σ_0
U



Ca. 8

Z

S_0

S

K

R

S_1

I

z

z_0

P

Q

сл. 9

O



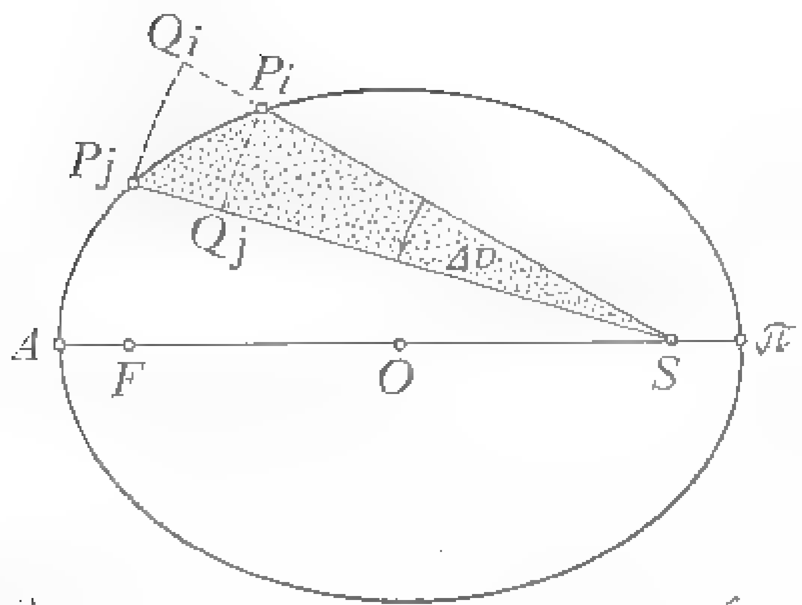
H2
P
h
A
H1
A
L
g
s
R
C
ε
B
T
Br
O



B
R
φ
a
b
p
A
F
O
ae
S
π



Q
B
P
φ
w
E
v
A
F
O
S
π


Qi
Pi
Pj
Qj
Δv
A
F
O
S
π

ua 1/2

P

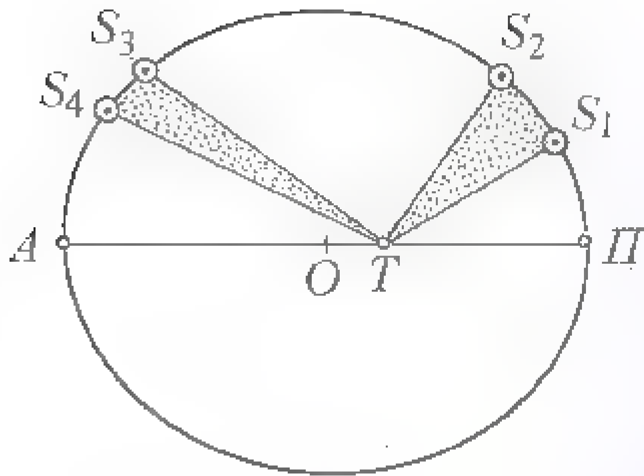
v

S

π

cn 1/4.




S_3
S_2
S_4
S_1
A
O
T
$П$

T_1

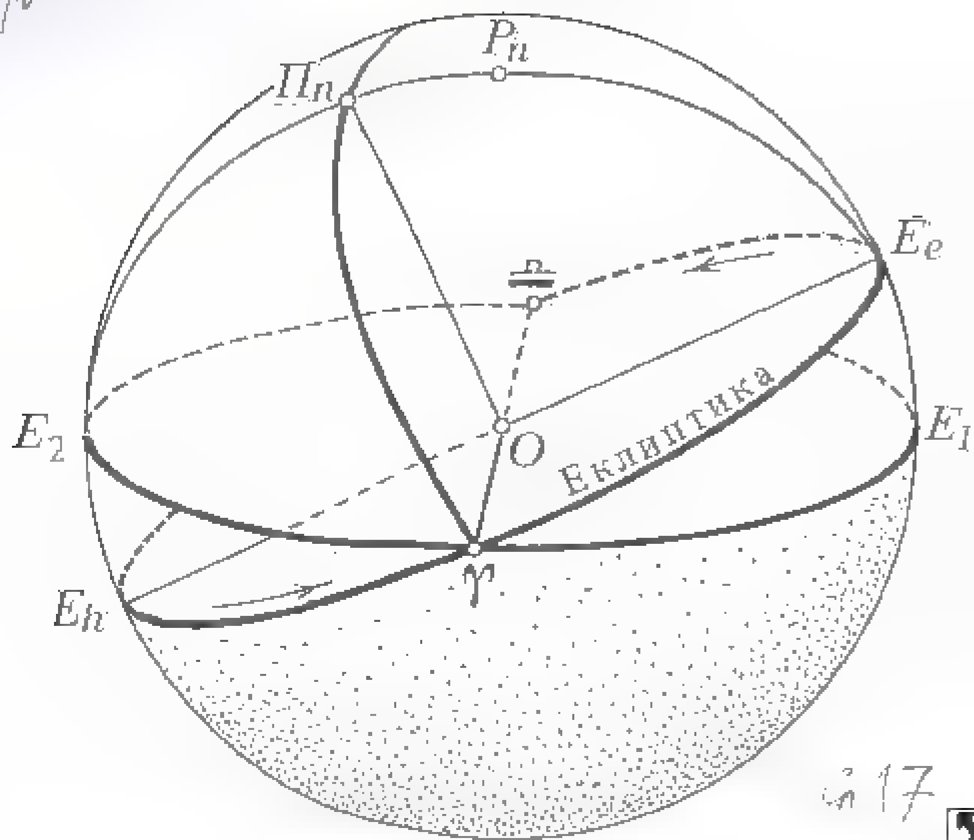
S

T_a T S_a

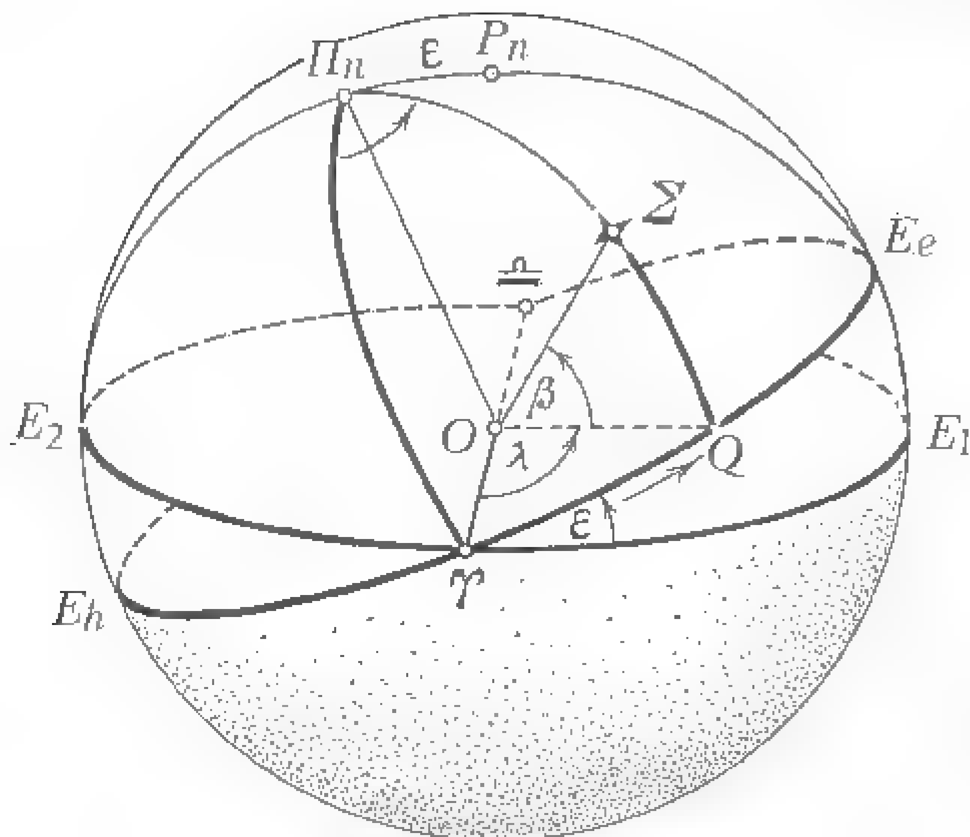
S_1

G 16





P_n
Π_n
E_e
E_2
E_1
O
Екліптика
E_h

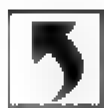


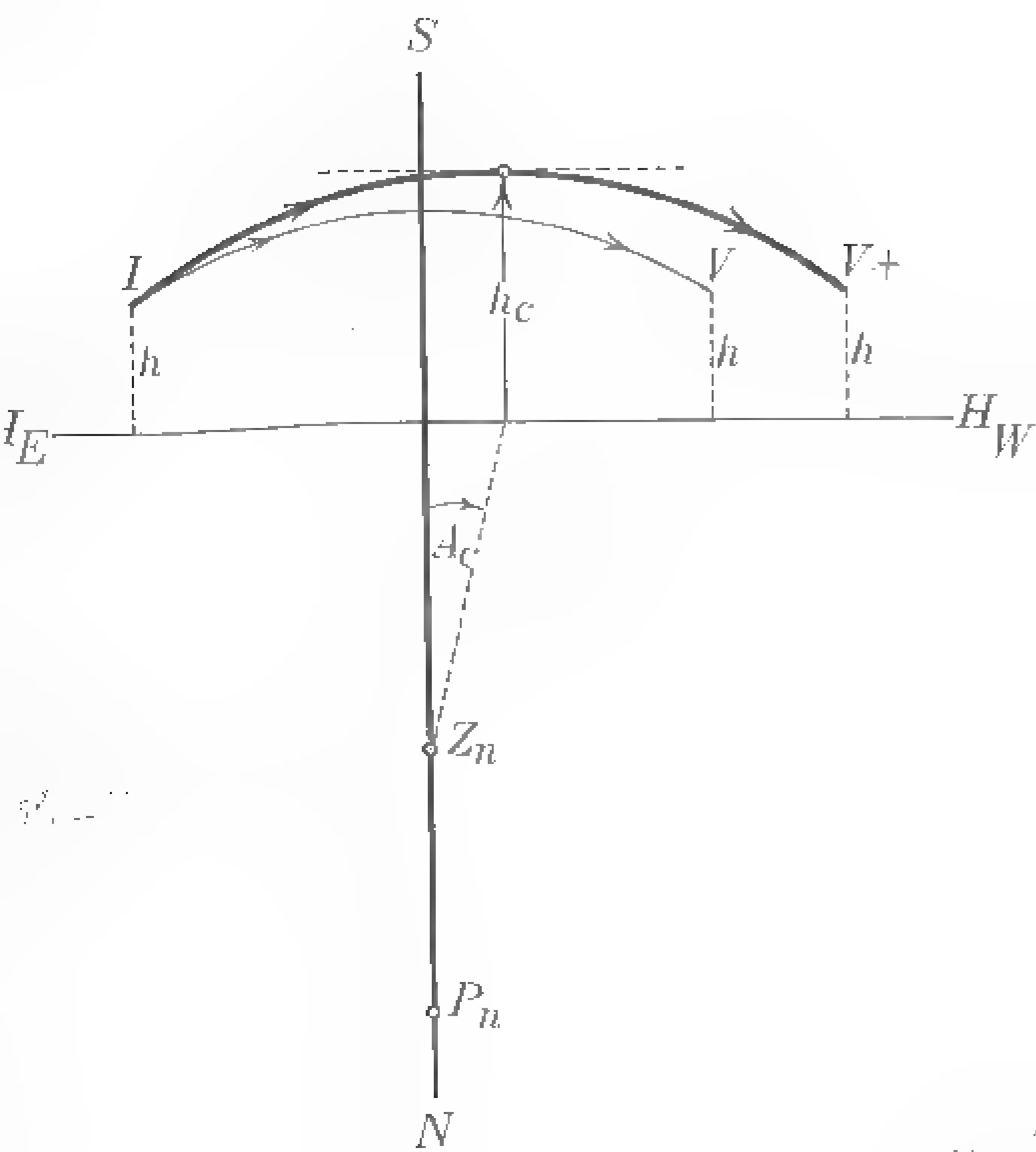
Π_n
ε
P_n
Σ
E_e
♎
β
E_2
O
λ
Q
E_1
ε
♈
E_h

P_n
Π_n
E_n
E_2
E_1
E_q
S_2
S_1
Σ_2
Σ_1
O
Q
♈
E_2'
E_1'
E_q'
E_s
U

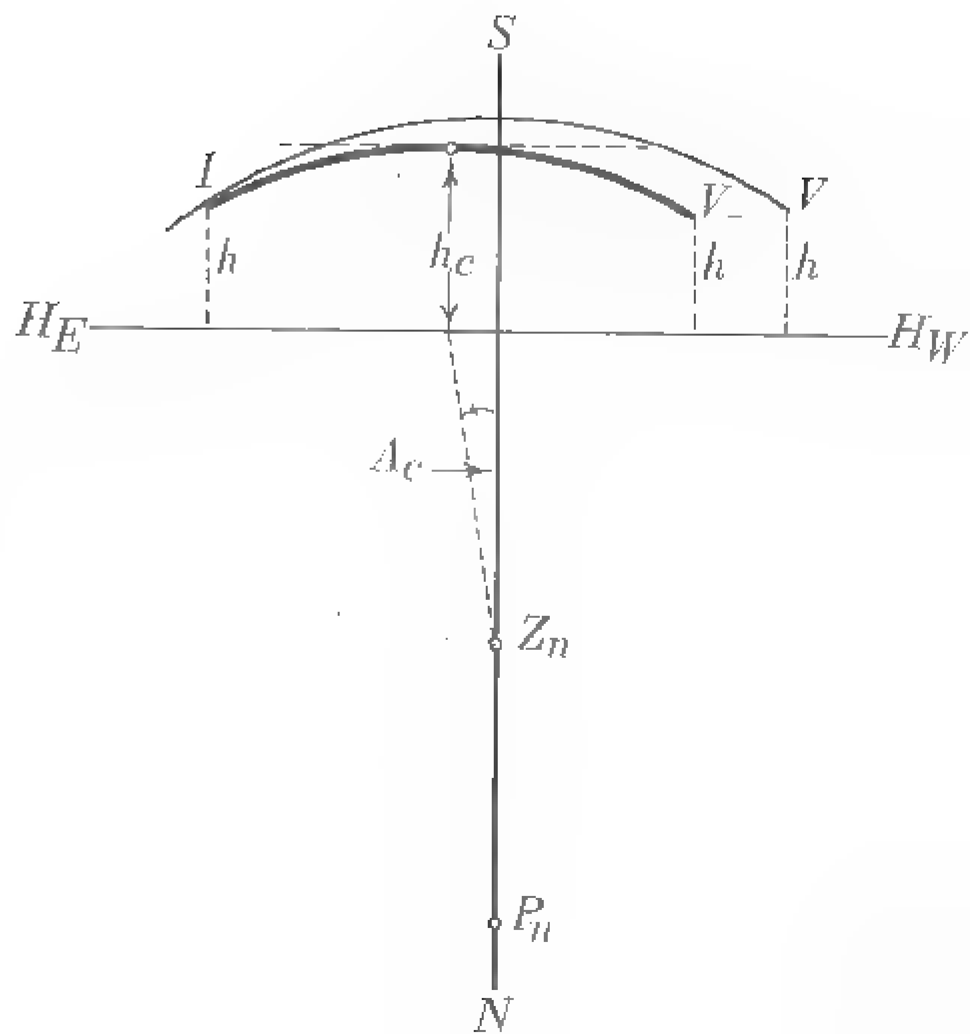
na 1/2

19





S
I
V
V+
h_c
h
h
h
H_W
A_c
Z_n
P_n
N


S
I
V
h
h
h
H
H
Z
P
N

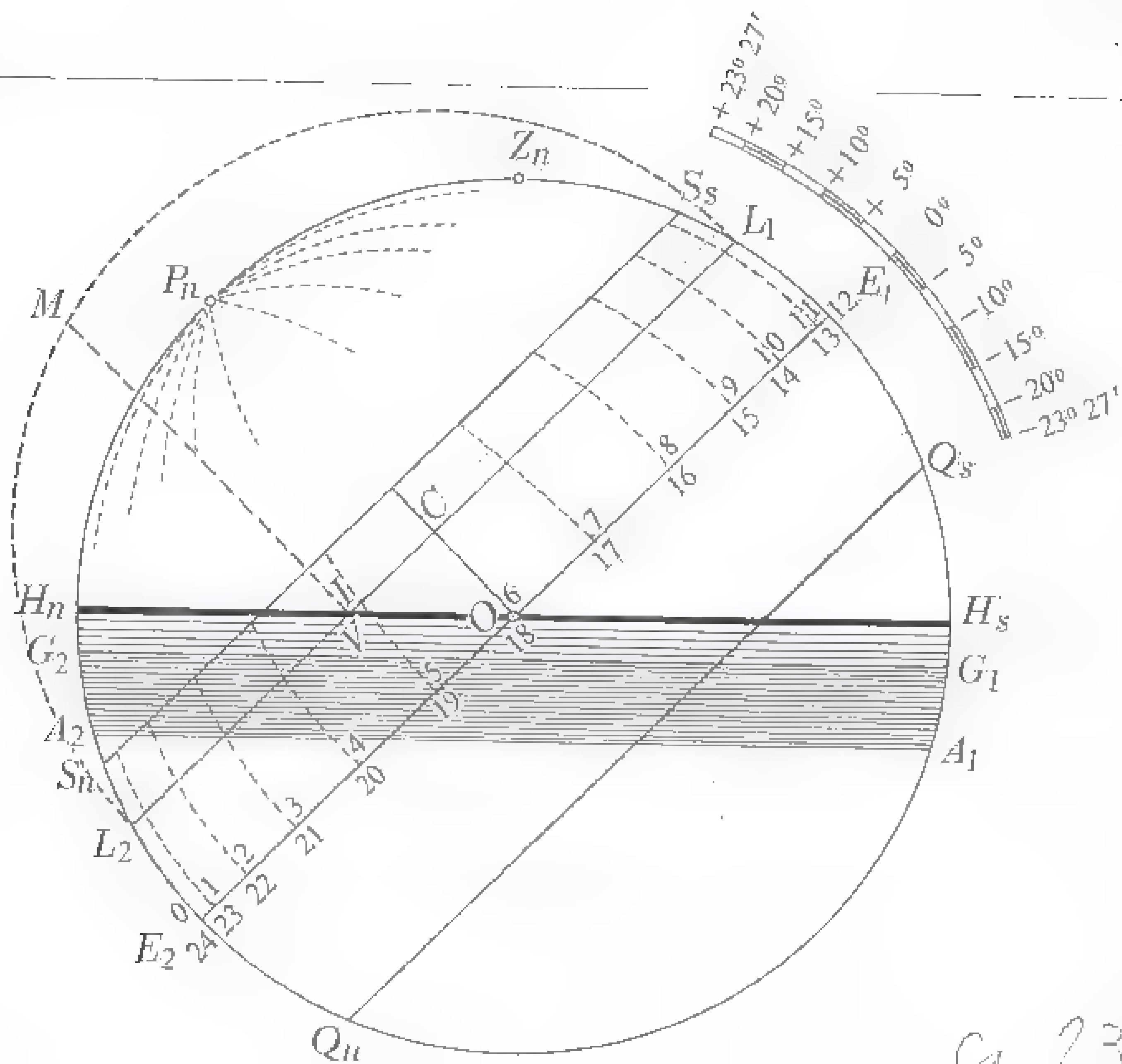
S

I V_1 V V_2

E W

Z_n

P_n


Zn
Pn
M
Ss
L1
E1
+23° 27'
+20°
+15°
+10°
+5°
0°
−5°
−10°
−15°
−20°
−23° 27'
Qs
C
Hn
Hs
O
V
G2
G1
A2
A1
Sn
L2
E2
Qn
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

Cl. 23

Z

P_n

N

O

I

Σ

Σ_R



Z_n

Σ_s

S_s

P_n

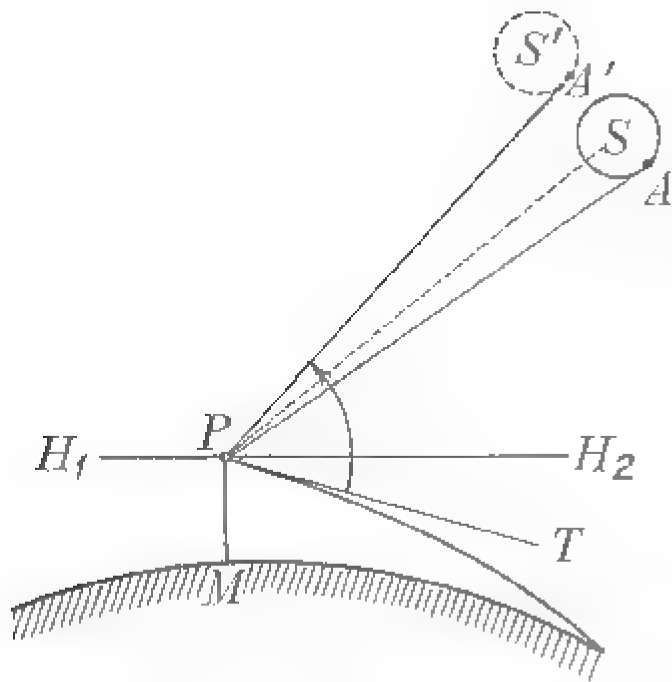
Σ_i

S_i

O

Сл. 91




S'
A'
S
A
P
H_1
H_2
T
M

Z_n

P_n

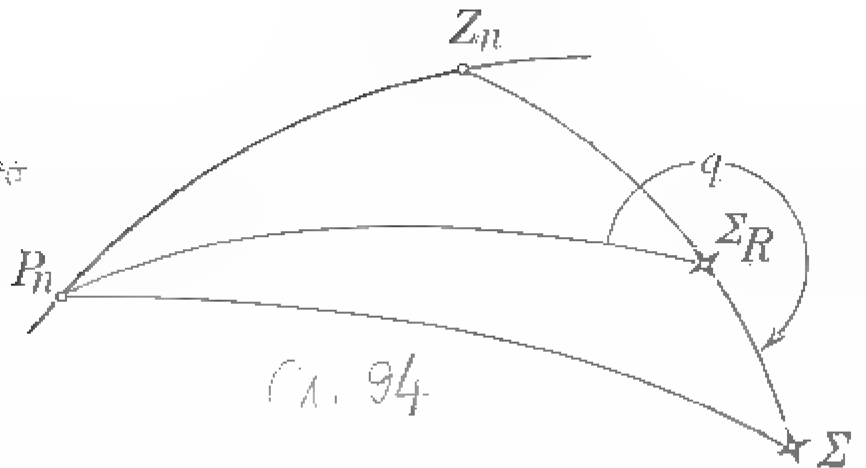
Σ_r



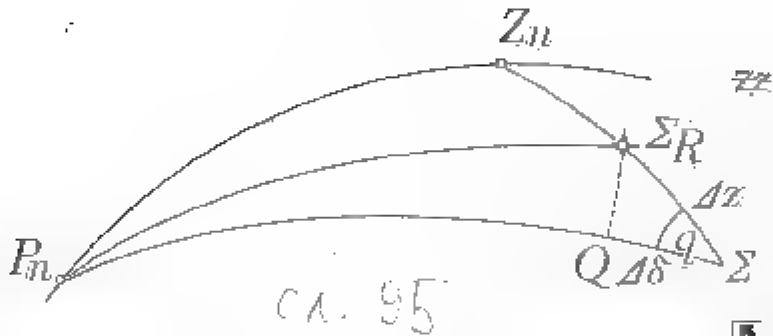
Σ

Сл. 93

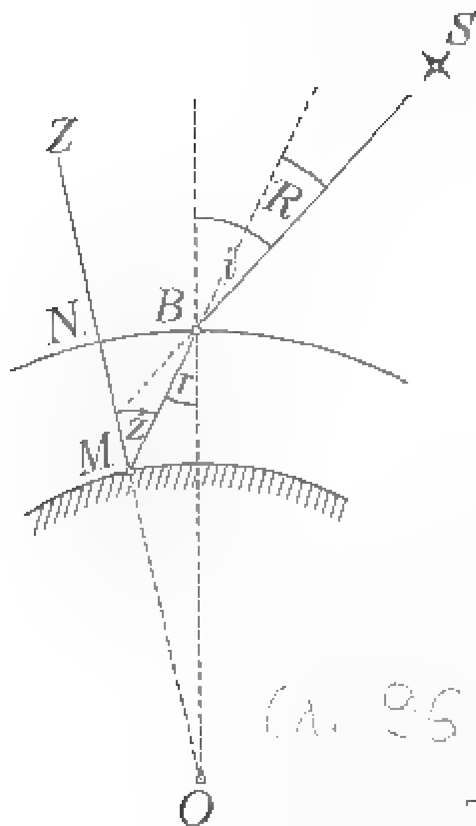


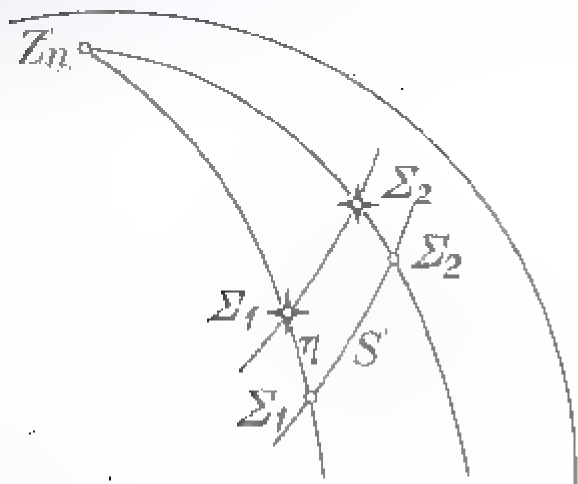


Ол. 94

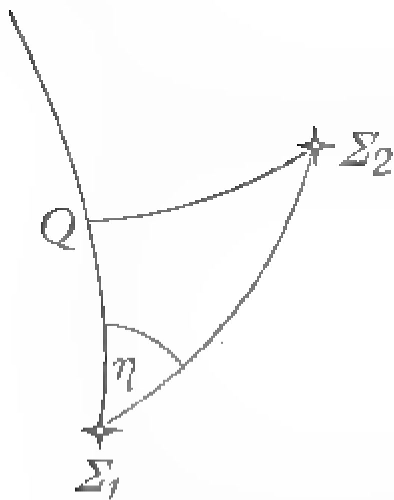


Z_n
Σ_R
Δz
q
P_n
Q
$\Delta\delta$
Σ


S
Z
R
i
B
N
r
z
M
O



Сл. 97



Сл. 98

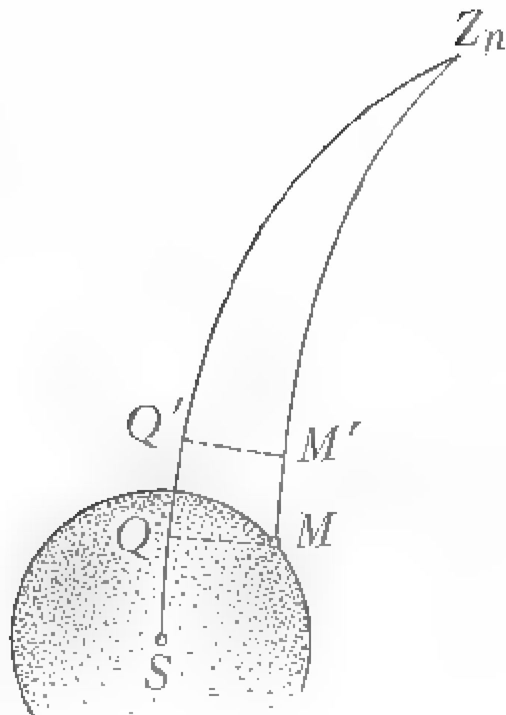
Z_n

Σ

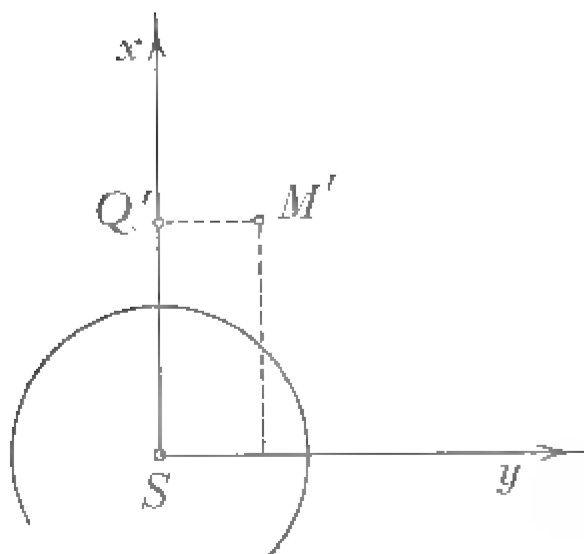
Σ_0

Сл. 99

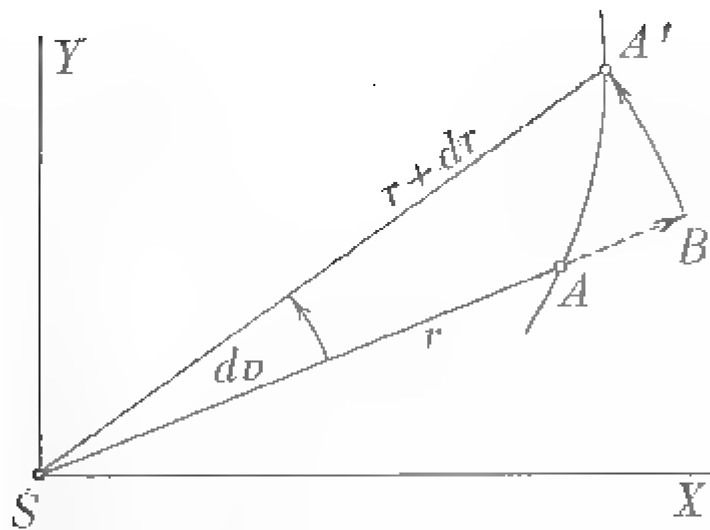


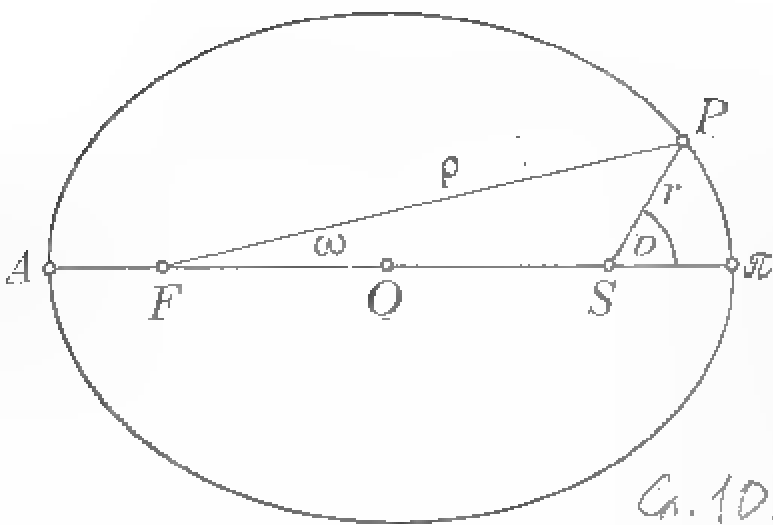


Cn. 100

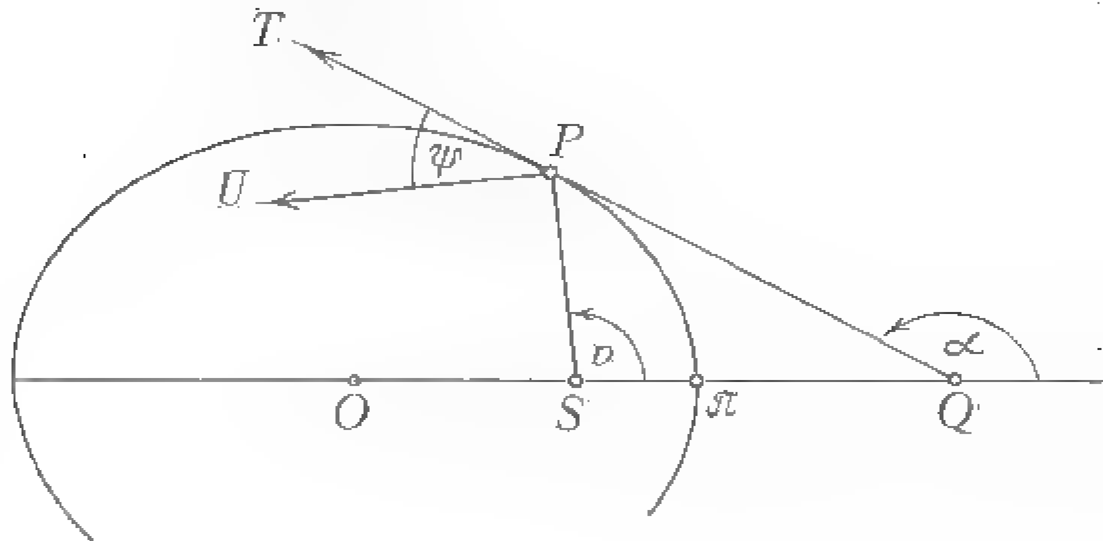


Сл. 101


Y
A'
r + dr
B
A
r
dv
S
X
5



P
ρ
r
ω
v
A
F
O
S
π
G. 103



Сл. 104

Q

B

K

W

U

L

P

v

F O S N π

Сл. 105

K

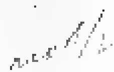
C_1 B

A F O J S π

C_2

CA, 106





G
Q
B
P
E
v
A F O S K π

Л. 108

Y

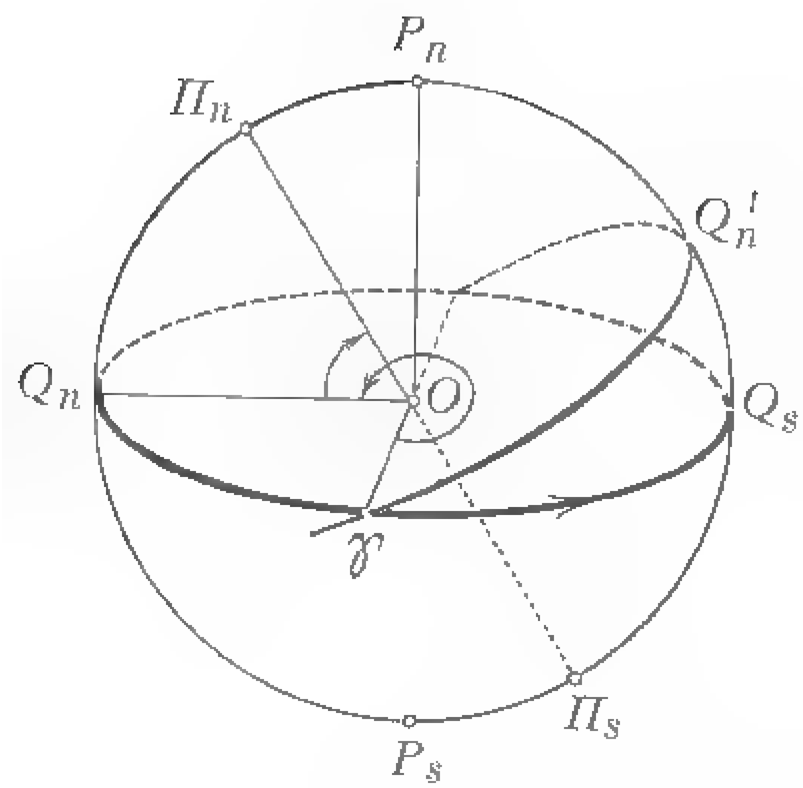
e N 0,5 1 L

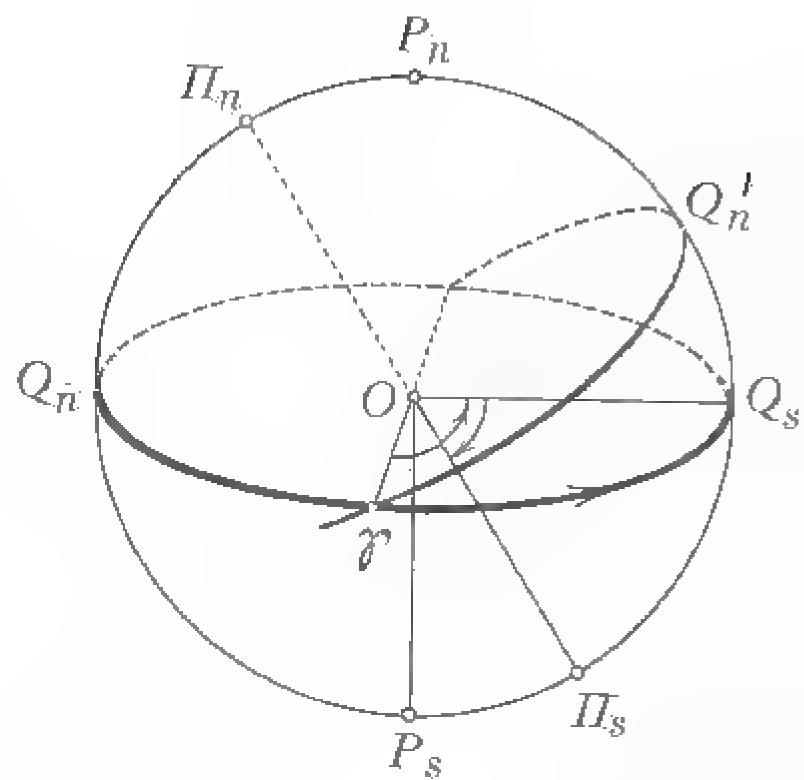
A

X

0 10 20 30 40 50 60 J 80 K 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180







Сл. 109

Π_n P_n
Q_s' O Q_n'
γ
Q_s
P_s Π_s

Π_n P_n
Q_s' O Q_n'
γ
Q_s
P_s Π_s

Сл. 110

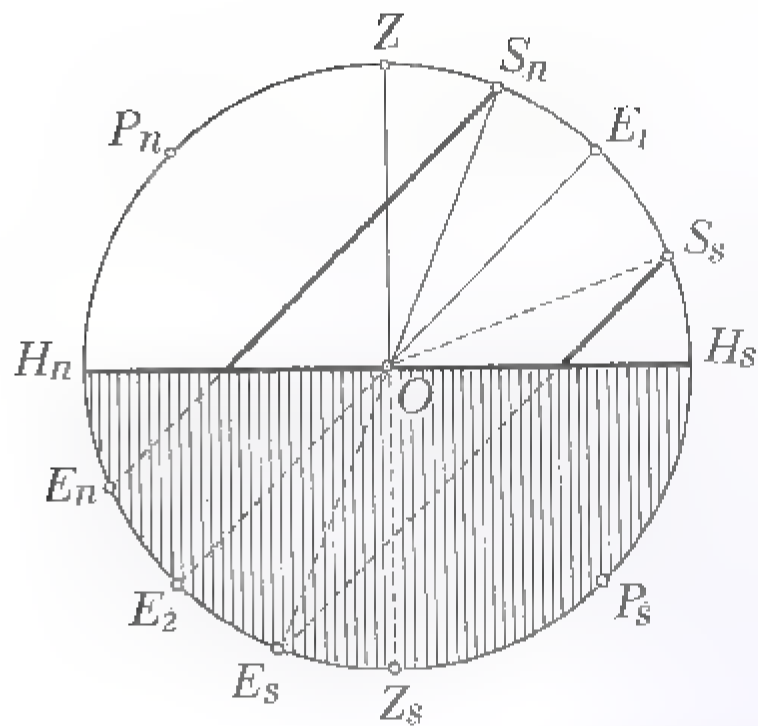
Сл. 111

Σ

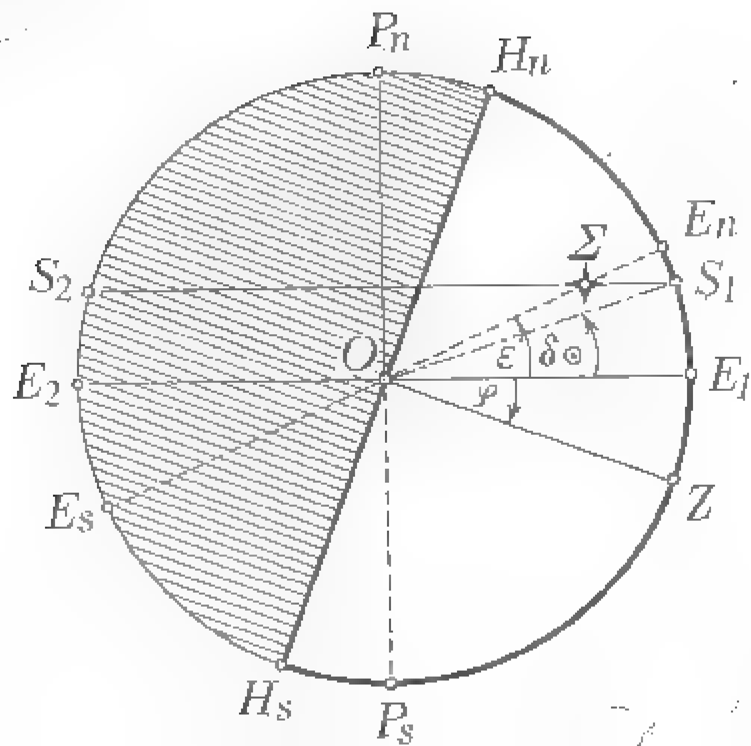
L

γ A





Сл. 112



P_n
H_n
E_n
Σ
S_2
S_1
O
ε
$\delta_\odot$
E_2
E_1
φ
E_s
Z
H_s
P_s

N

V

Σ

P_n

β

λ

W

E

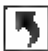
Z Π

γ

A

S

Сл. 114



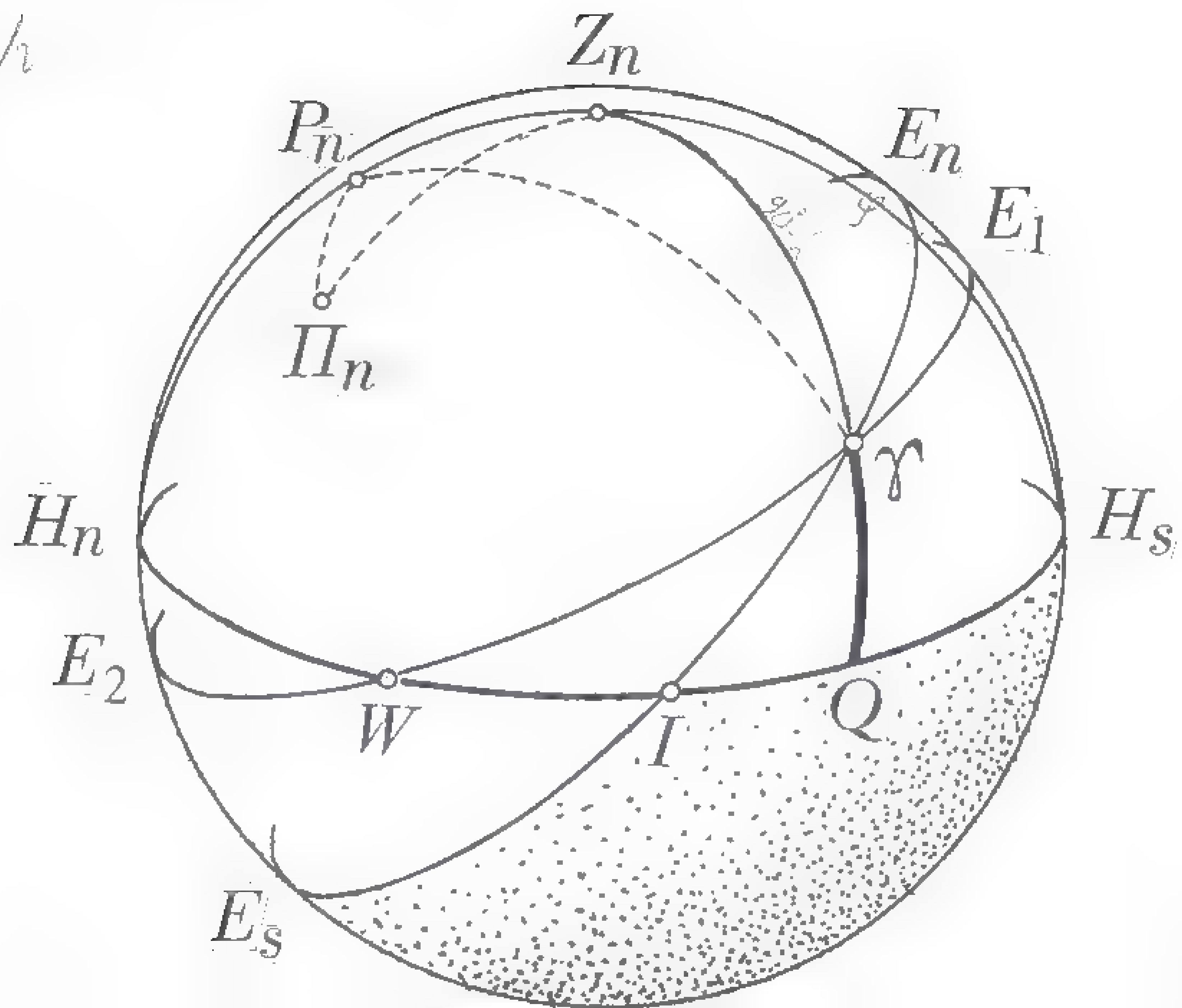
A_2

S D O

A_1

Сл. 115

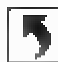


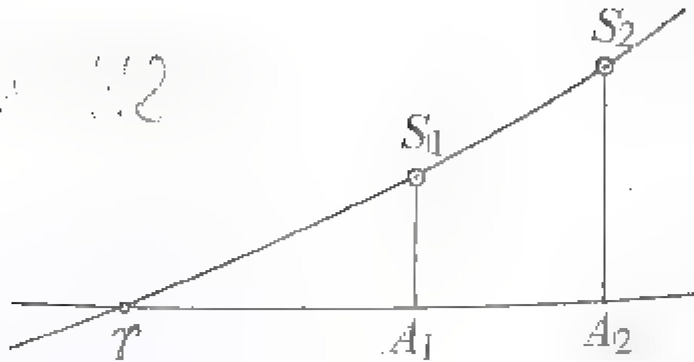


Z_n
P_n
E_n
E_1
Π_n
Υ
H_n
H_s
E_2
W
I
Q
E_s

Z_n P_n S_s Z_n' E_1 δ H_n H_s δ O E_2 H_s'

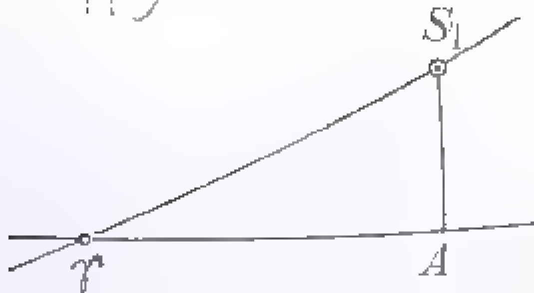
S_s E_1 O δ H_n H_s δ E_2 Z_s' H_s' P_s Z_s





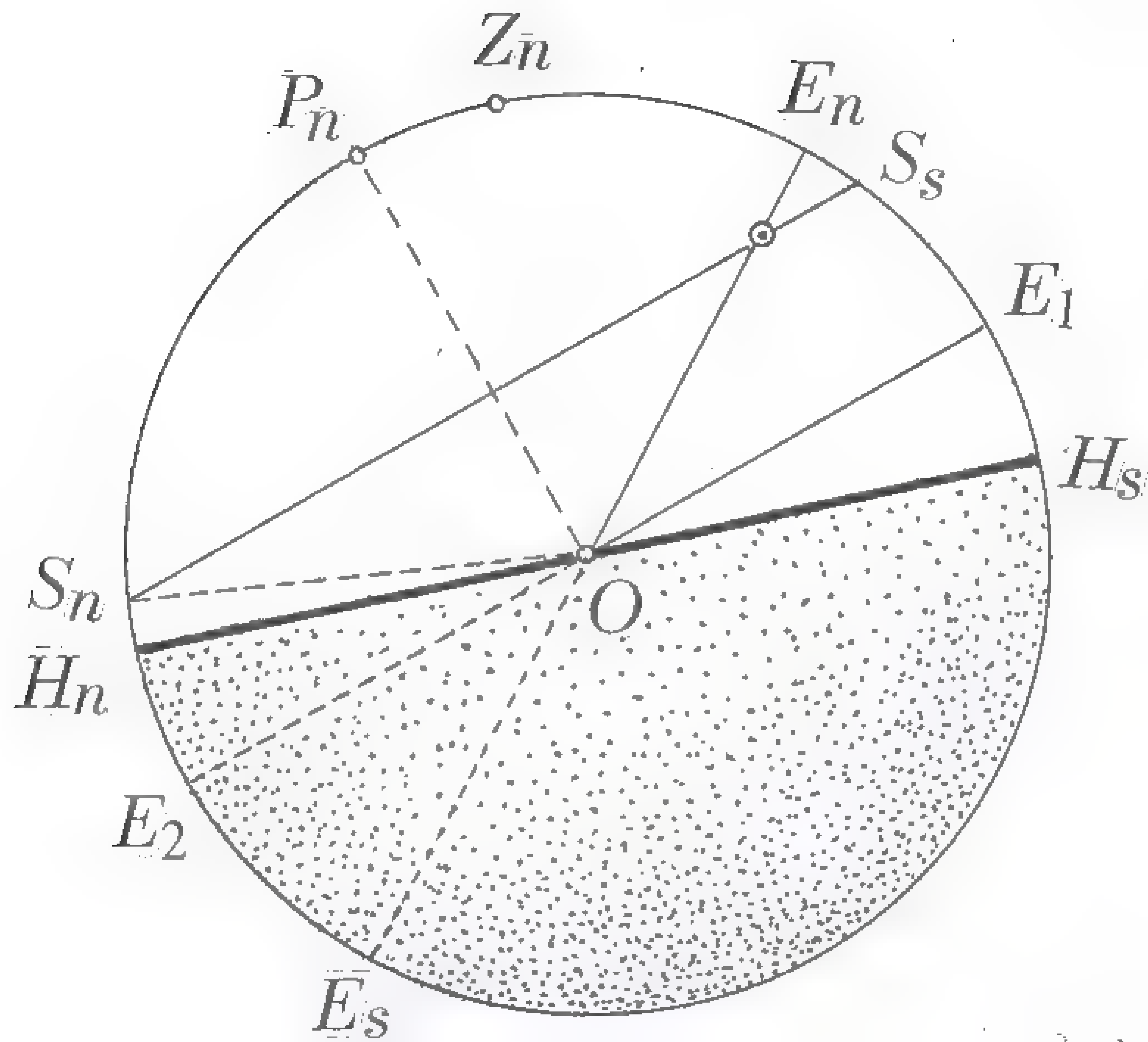
S_2
S_1
r
A_1
A_2

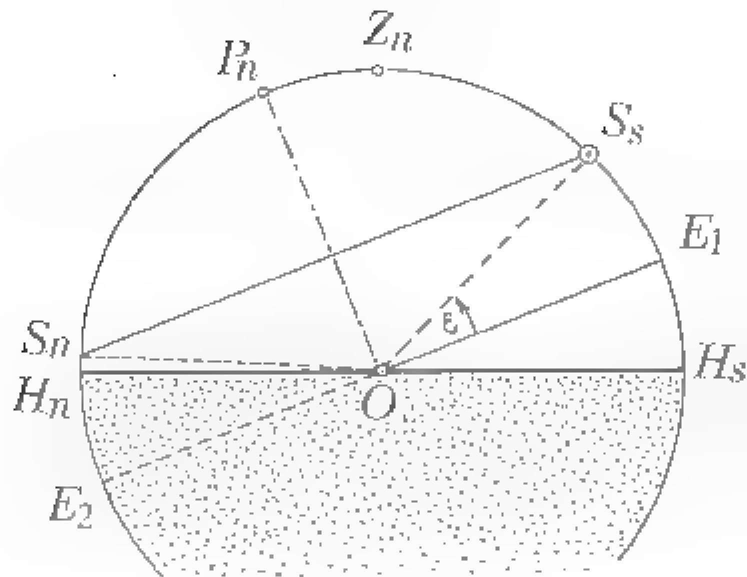
119





$\bar{S}$
γ
A


Z_n
P_n
E_n
S_s
E_1
H_s
S_n
O
H_n
E_2
E_s

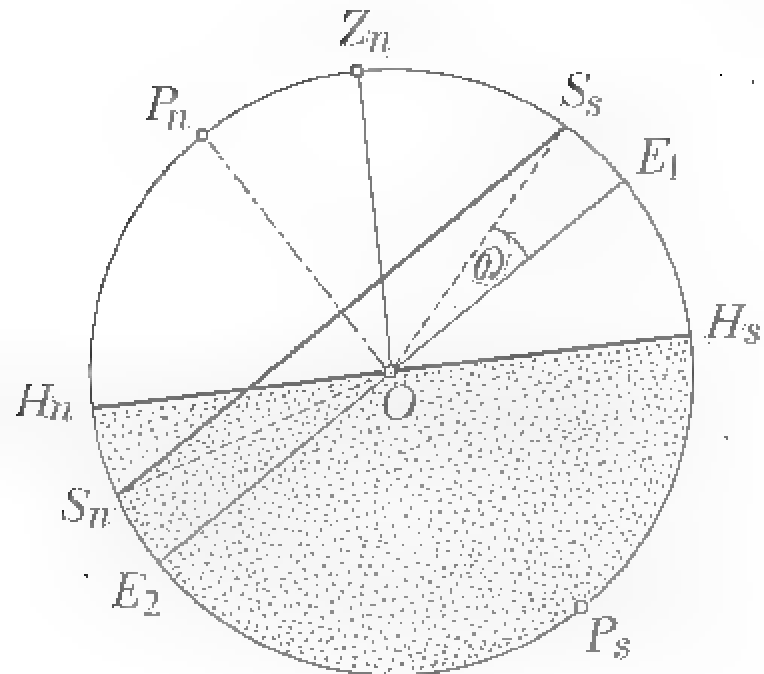

Z_n
P_n
S_s
E_1
ε
S_n
H_s
H_n
O
E_2

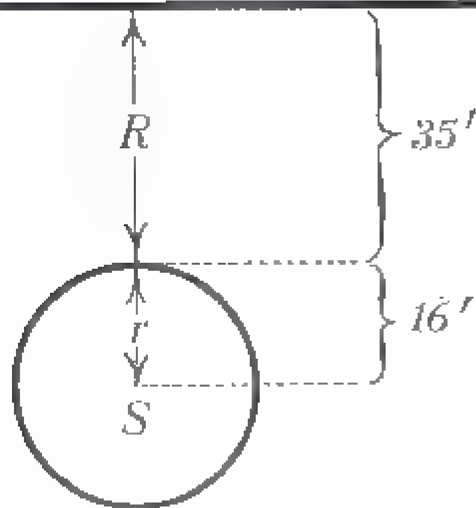
Сл. 123

Z_s
S_s
P_n
Q
E_1
Z_n
H_s
ω
O
S_n
E_2
P_s
H_n



сл. 124





405

x. 126

Z_n

P_n

S_s

E_1

I_W

C

H_s

H_n

O

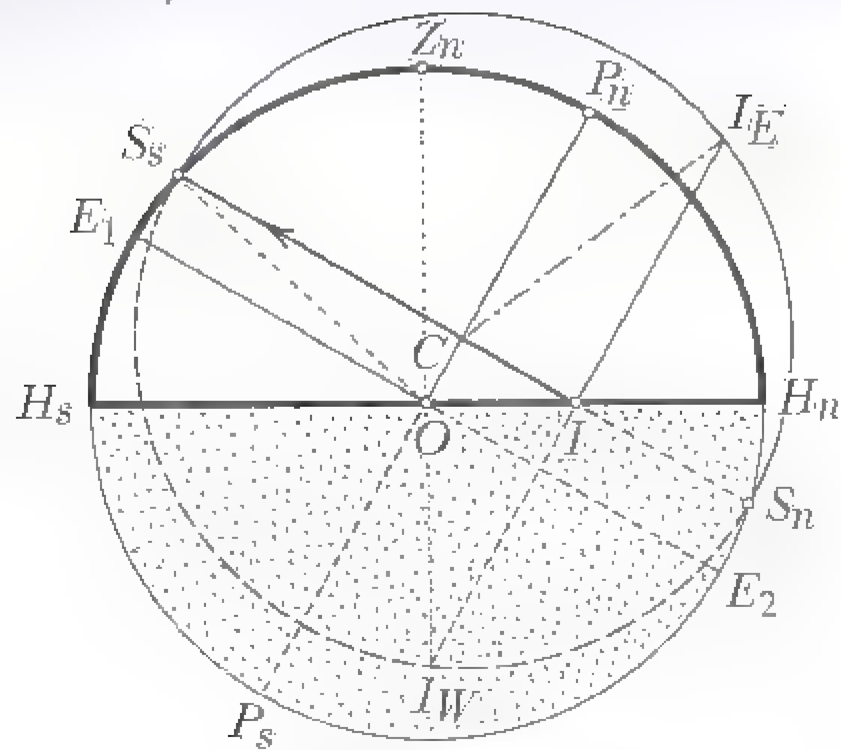
I_E

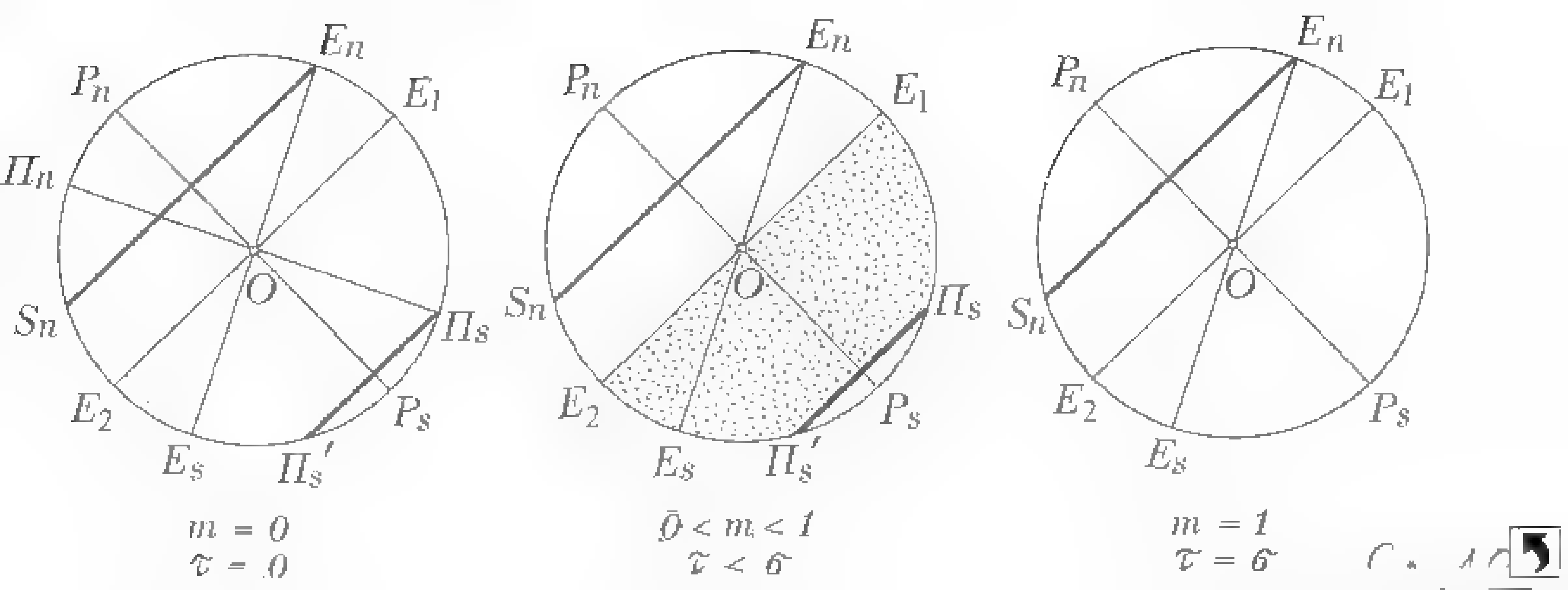
S_n

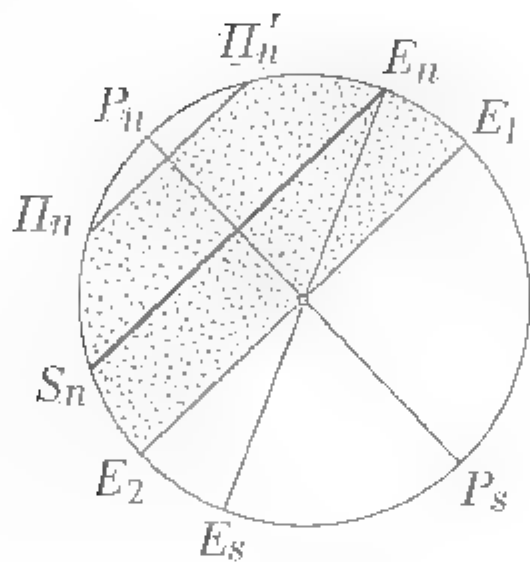
E_2

P_s

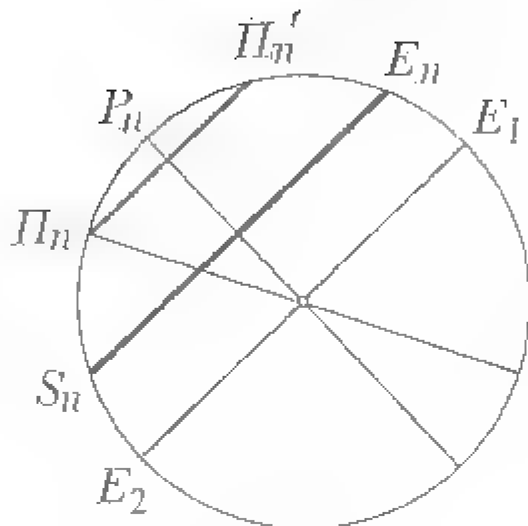
Сл. 127




E_n
P_n
E_1
Π_n
O
S_n
Π_s
E_2
P_s
E_s
Π_s'
$m = 0$
$\tau = 0$
$0 < m < 1$
$\tau < \sigma$
$m = 1$
$\tau = \sigma$



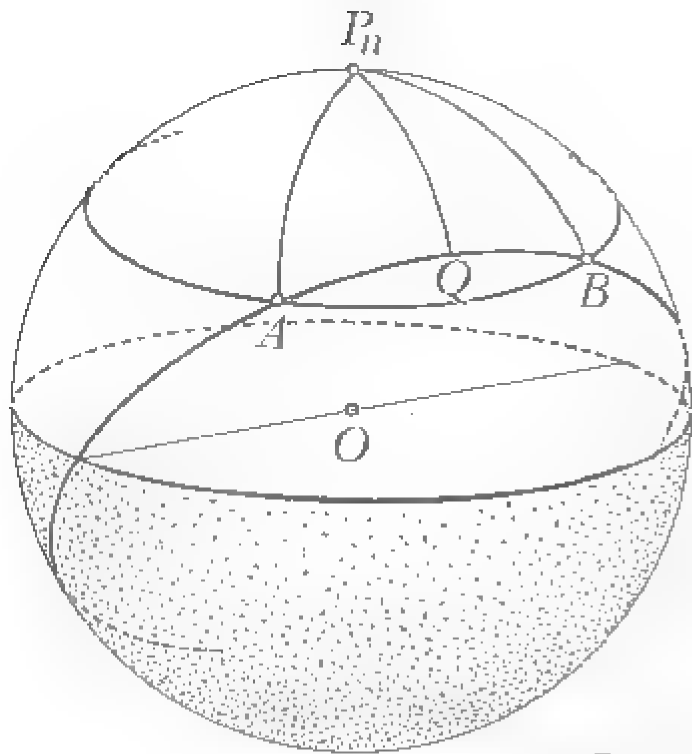
$1 < m < \infty$
$\tau > \sigma$



$m \to \infty$
$\sigma = 0$

с. 128, 4-5





Сл. 129

Сл. 130

Z_n

P_n

S_1

S_2

E_1

W

m

O

H_s

H_n

K

♈

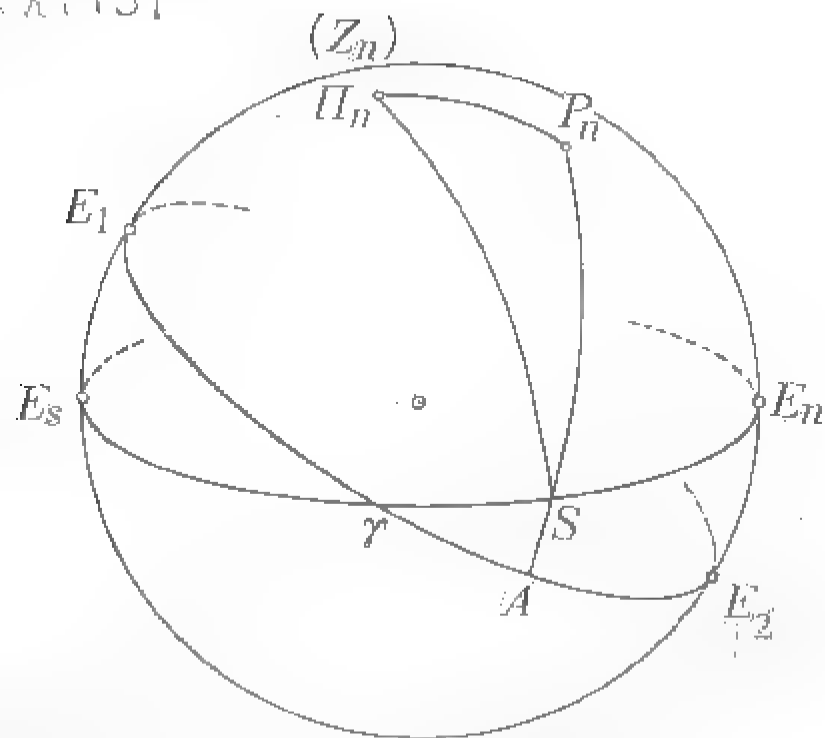
E

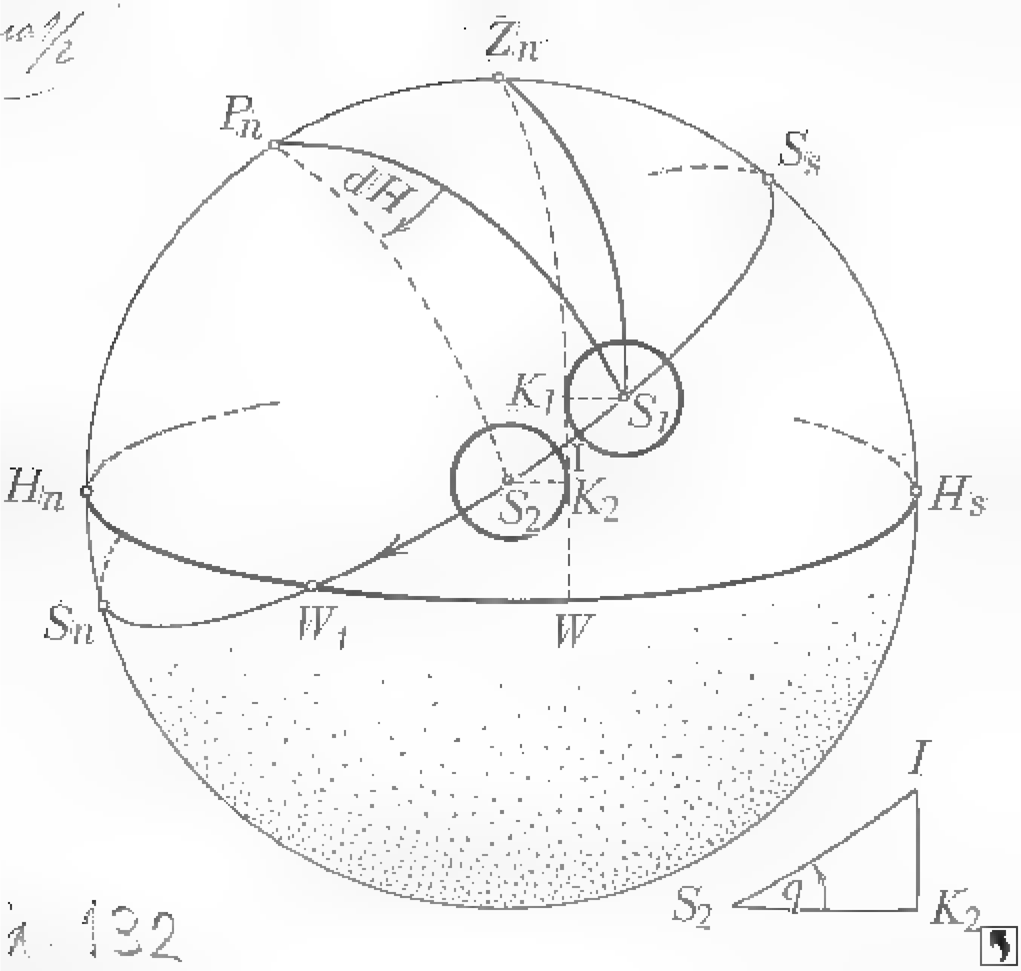
I_2

I_1

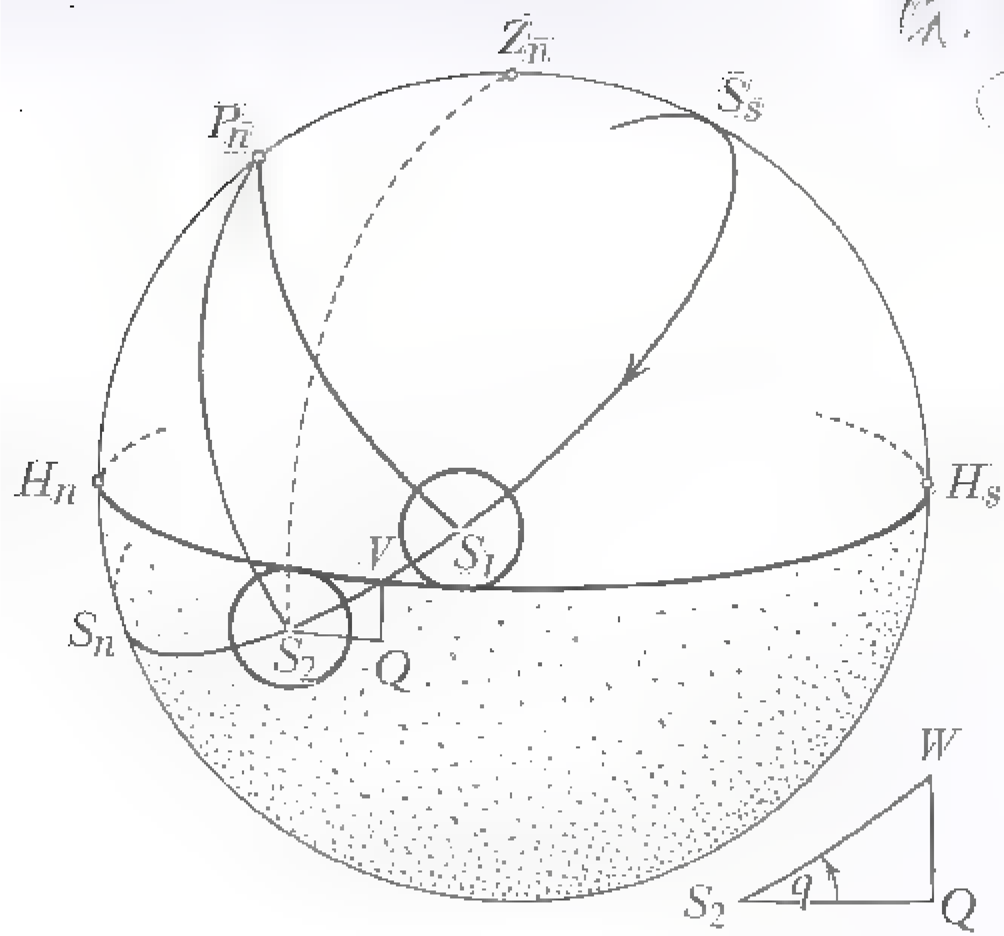
E_2

Сл. 131





132



Z_n
P_n
S_s
H_n
H_s
V
S_1
S_n
S_2
Q
W
q
S_2
Q

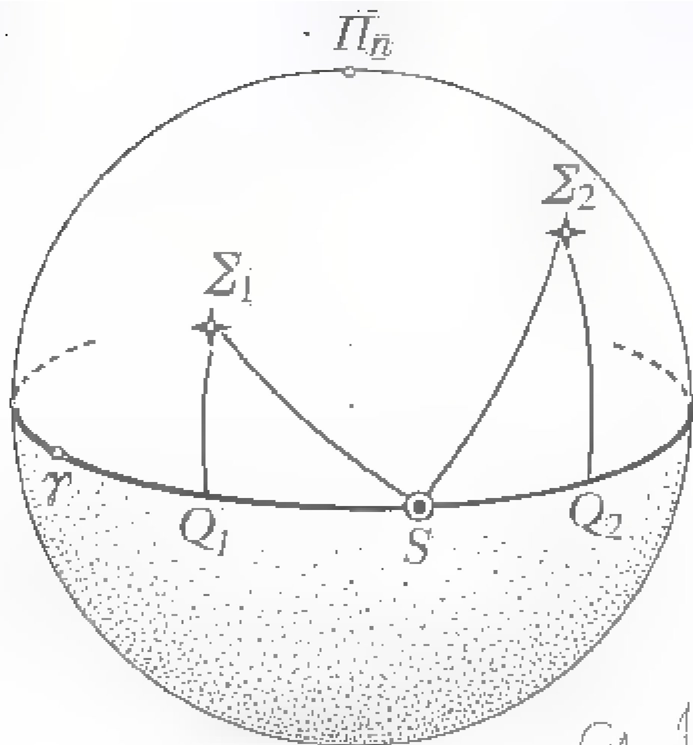
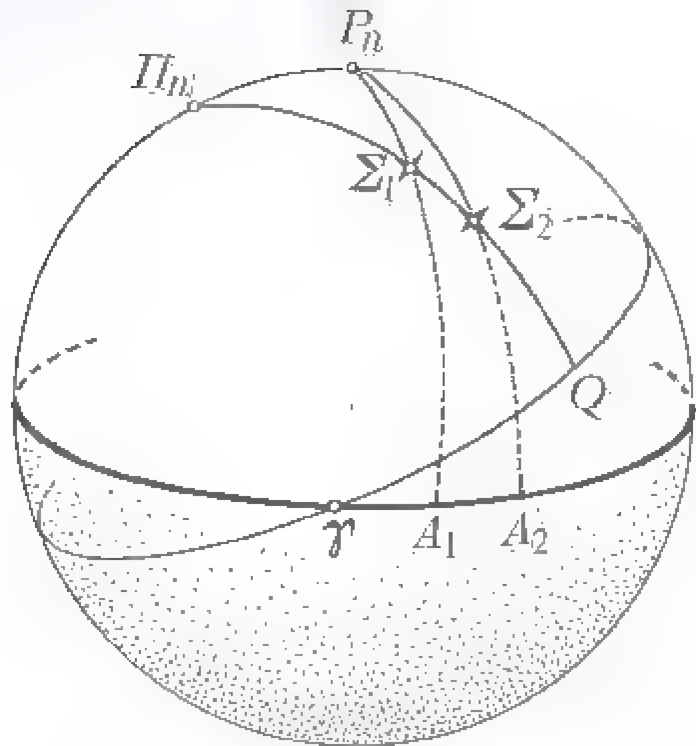
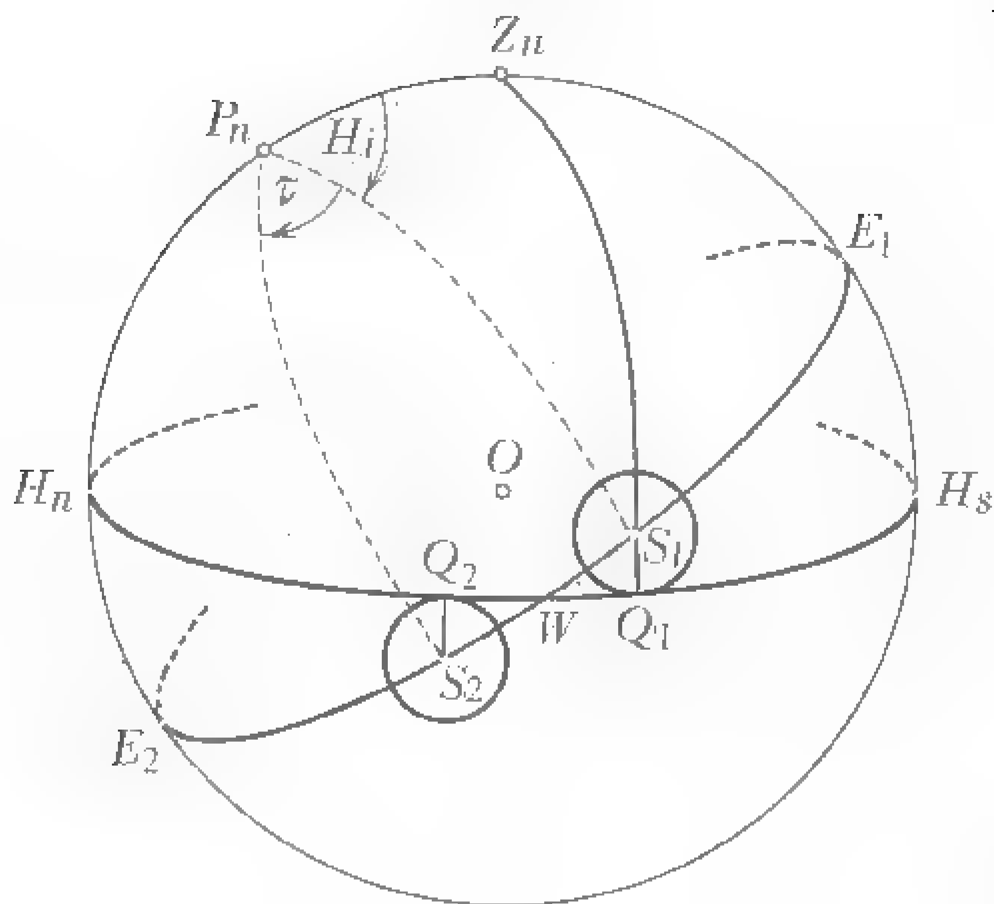


Рис. 134



Сл. 135



Сл. 136

Z_n E_2

S Q

P_n ♈

O

H_n H_s

Π_n

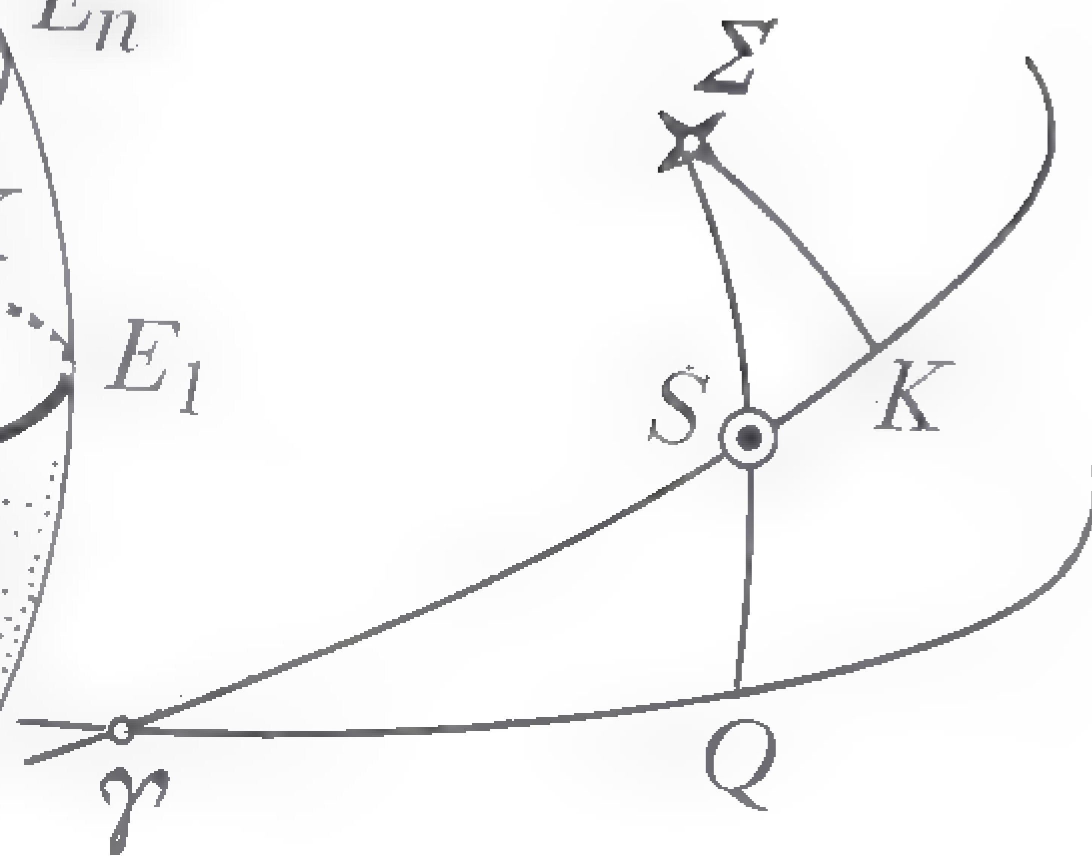
W K

Сл. 137



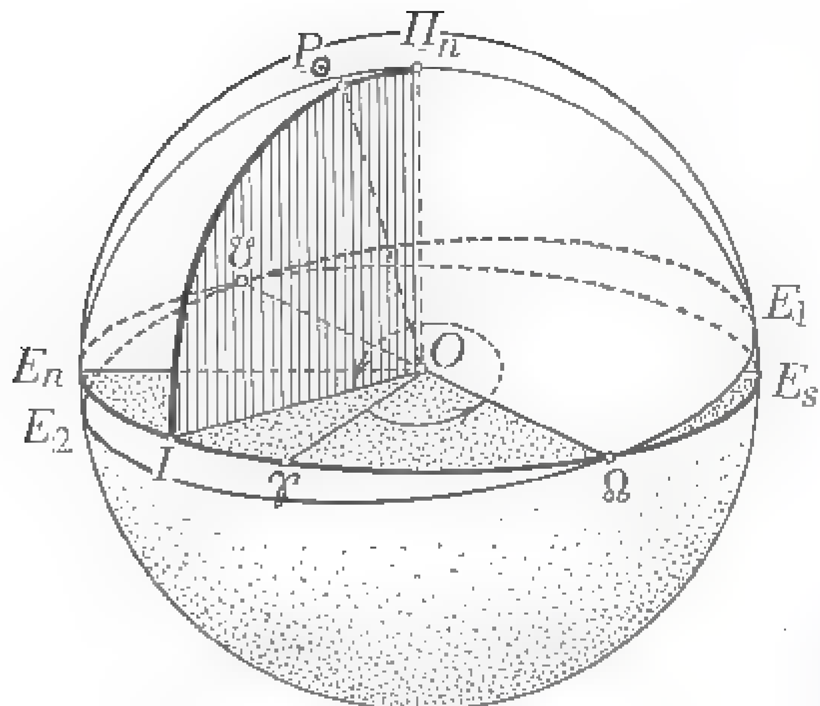
no 1/2

P_n
Π_n
Σ
E_n
S
K
E_2
O
E_1
Q
γ
E_s

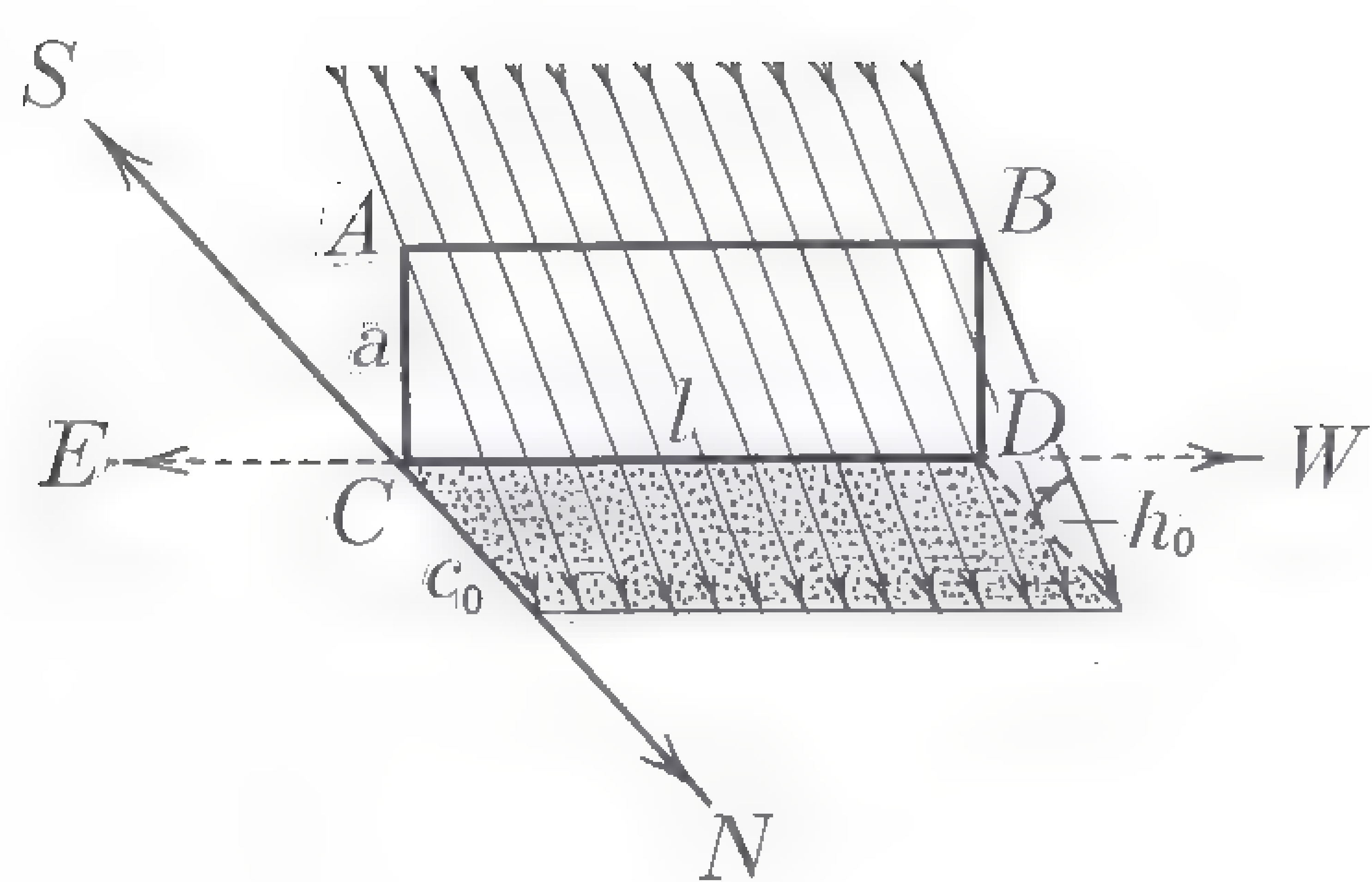


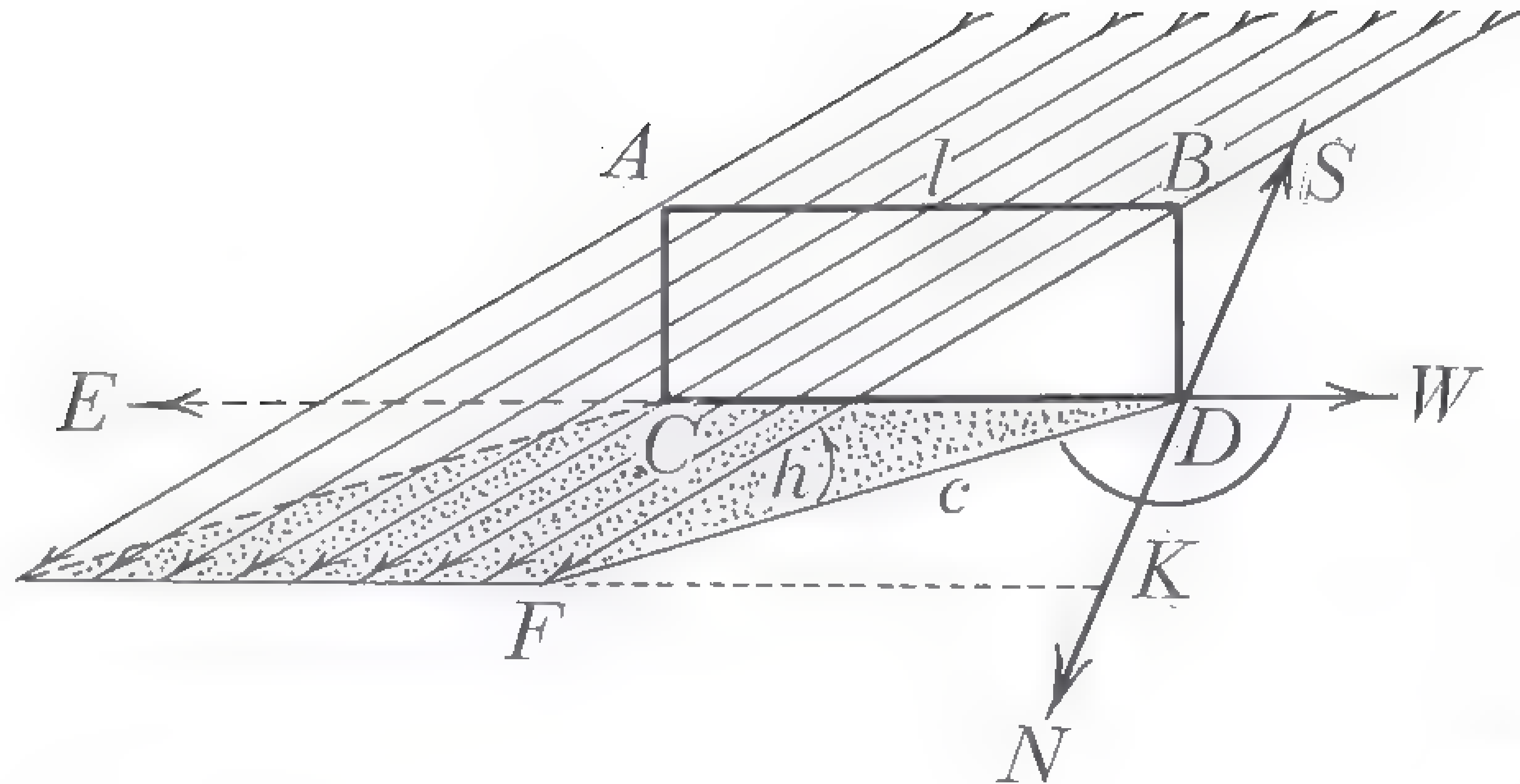
CA, 13S



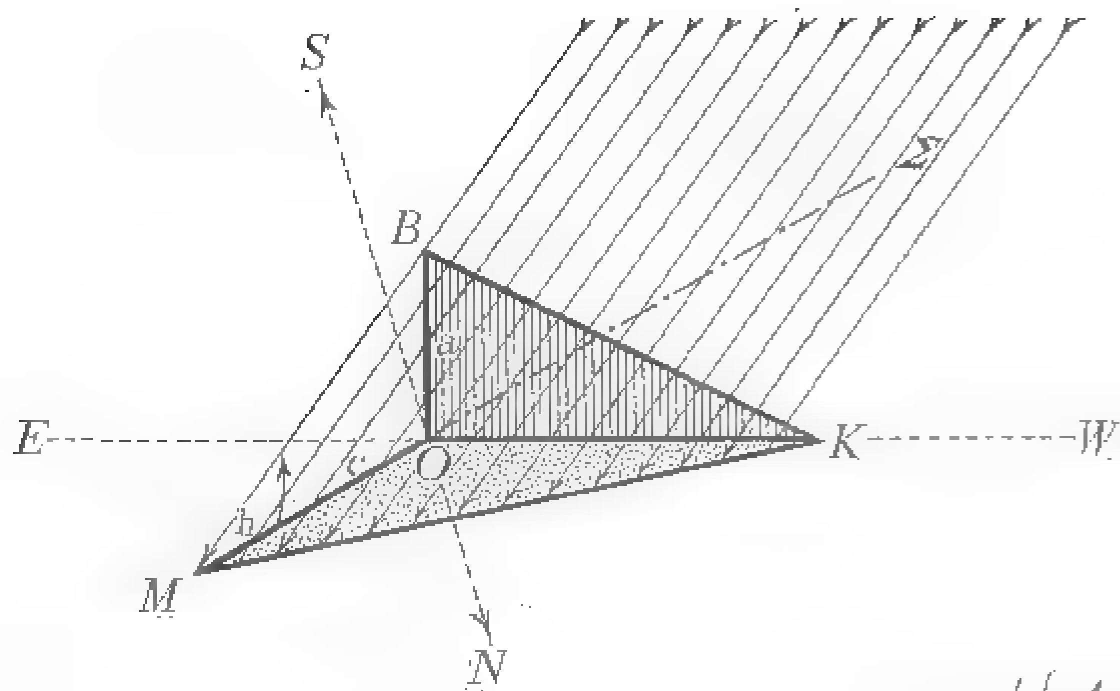


Сл. 139

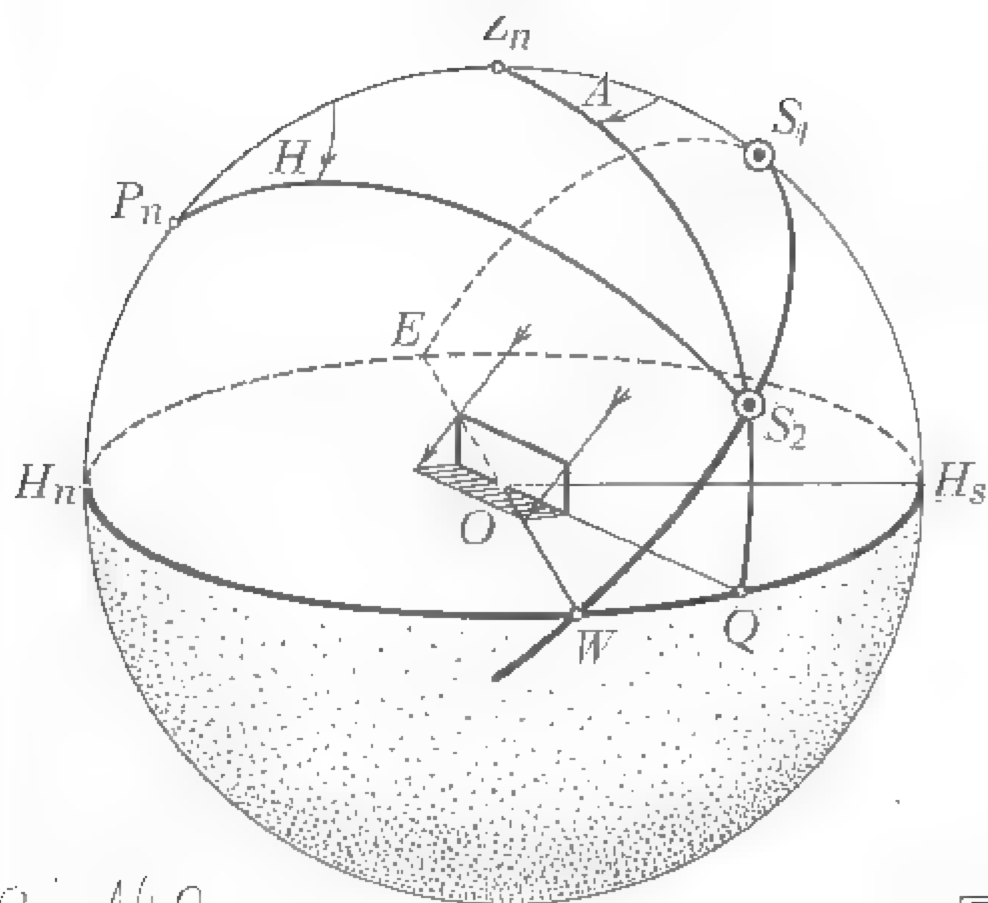




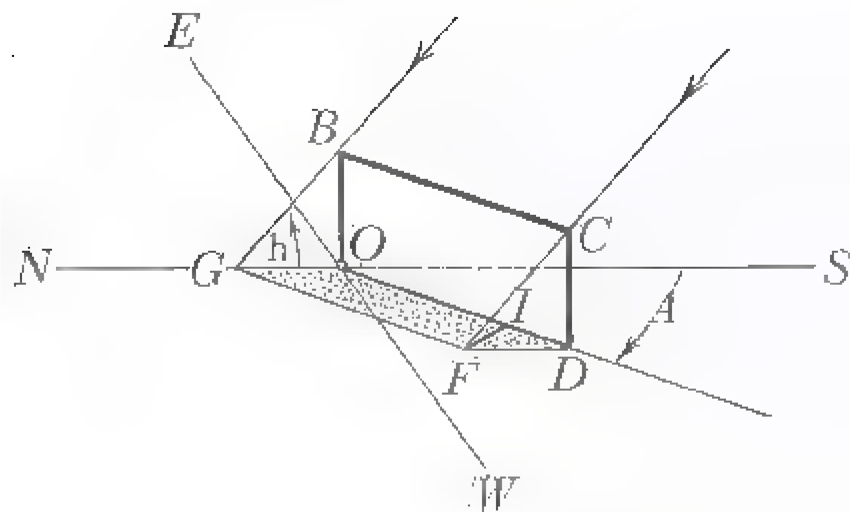
Ca. 140



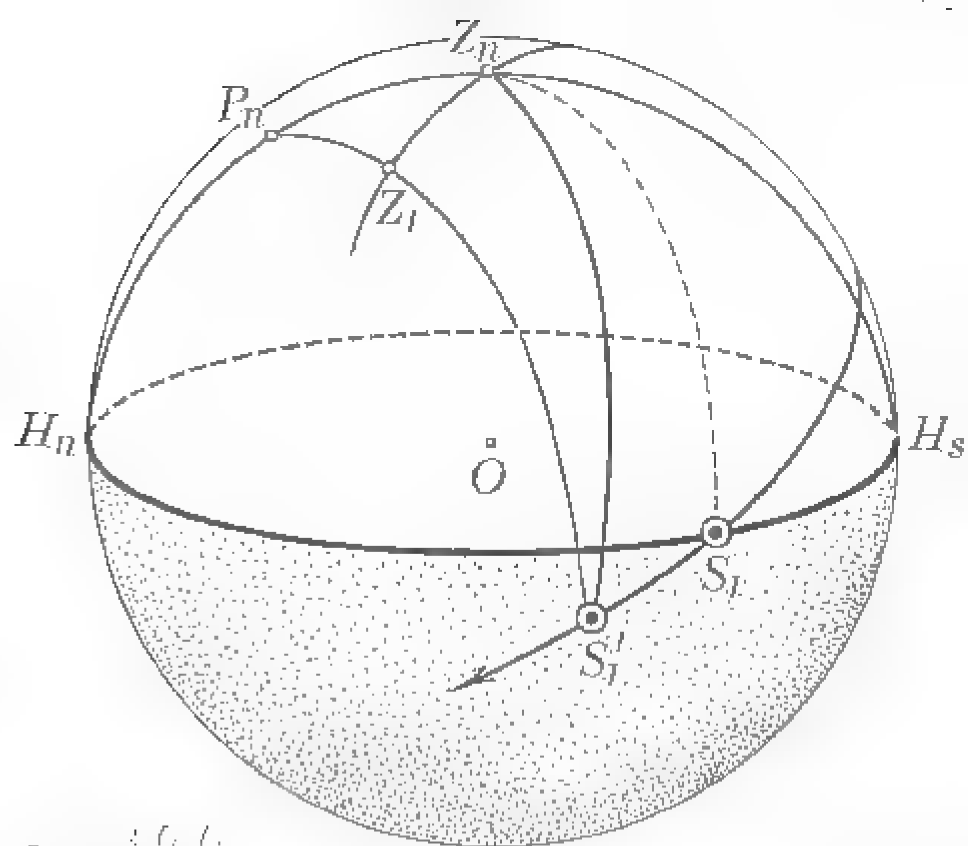
Сл. 141



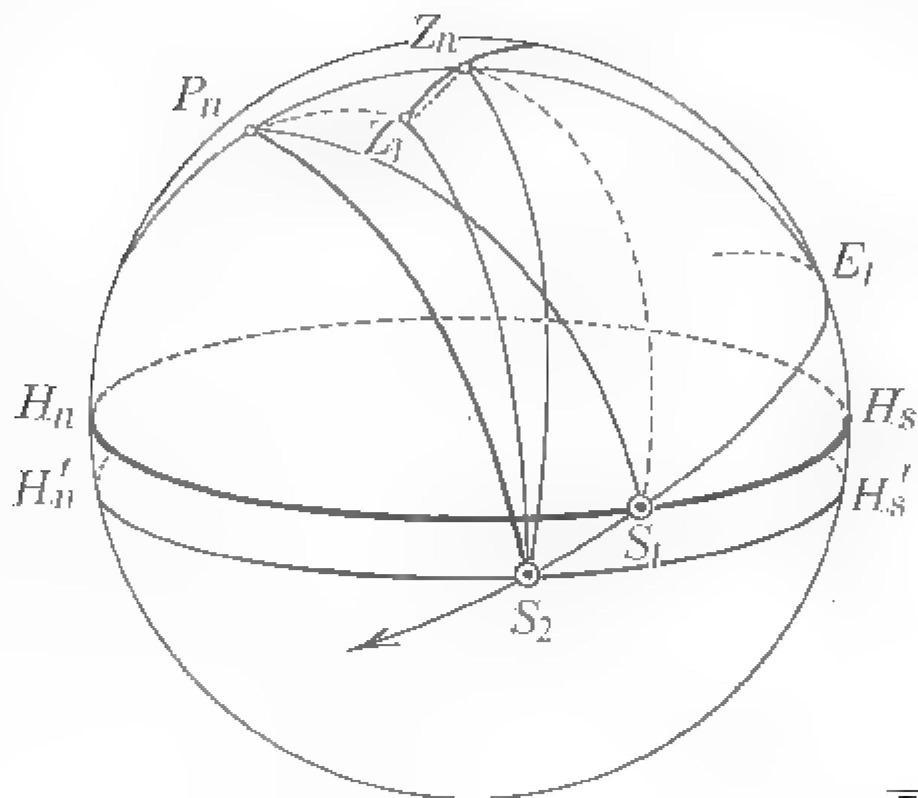
Ci. 142

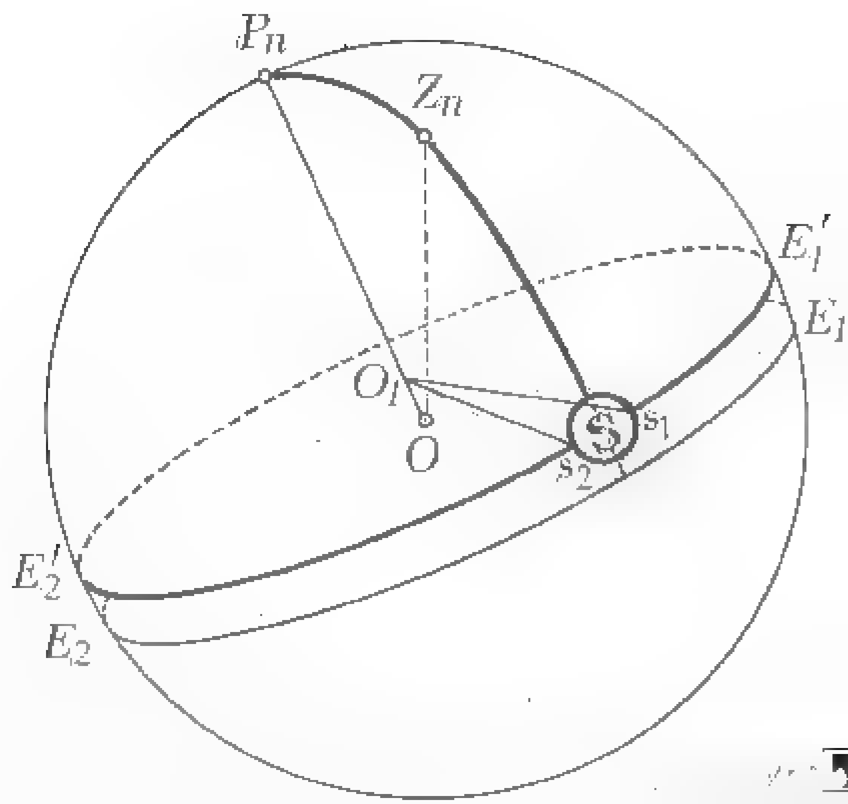


Сл. 143

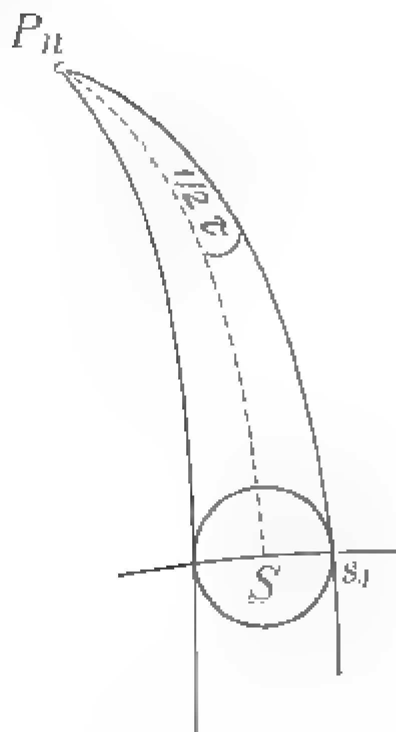


Сл. 144


Ил. 145
Z_n
P_n
Z_1
E_1
H_n
H_s
H'_n
H'_s
S_1
S_2



Сл. 146



cA, 147

A O S_1 S Π

Сл. 148



Z_n E_1 P_n S E L K H_n O H_s W Q

Cx. 149



I_n

Π_n P_n

G_1

E_n

E_2

O

E_1

E_s

ϵ

A_q

G_2

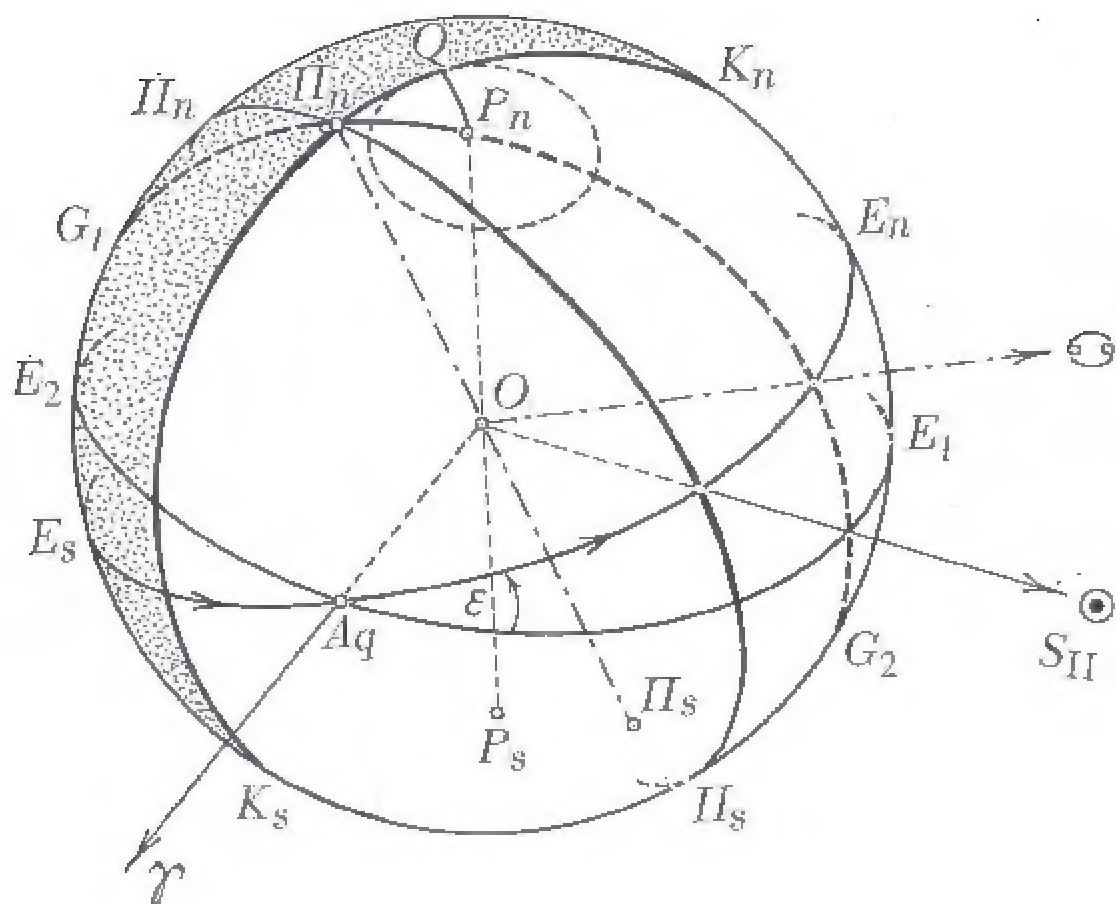
P_s Π_s

S_1

I_s

♈





Сл. 151